数理解析研究所講究録
909巻 1995年 113-123

SU(2,1)上の実新谷関数

東大数理科学 都築 正男 (Masao Tsuzuki)

§0 序

Gを連結半単純リー群で、中心が有限なもの、Kをその極大コンパクト部分群とする。Gの閉部分群Rと、そのHilbert表現ηに対して、C^∞-写像 $F: G \longrightarrow \mathcal{H}_\eta^\infty$ であり $\forall r \in R$ $\forall g \in G$ について $F(rg) = \eta(r)F(g)$ をみたすもの全体の空間を $C_\eta^\infty(R\backslash G)$ とおく。$C_\eta^\infty(R\backslash G)$ にはGが右移動により作用し、その微分によって、リー環$\mathfrak{g} = Lie(G)$の自然な作用も存在する。さて、Gの既約$(\mathfrak{g}, K)$-加群πに対して、intertwining operator の空間 $\mathcal{I}_{\eta,\pi} := \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi^*, C_\eta^\infty(R\backslash G))$ を問題にしよう。(但し、π^*はπの反傾表現。)

πが、Gの離散系列表現に付随する$(\mathfrak{g}, K)$-加群の場合、山下氏により、$\mathcal{I}_{\eta,\pi}$のSchmidt作用素を用いた特徴づけが得られている。([Y]) ここでは、$G = SU(2,1)$、Rが、Gの対合 $\sigma(g) = I_{1,2}^{-1} g I_{1,2}$ ($I_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$) の固定点全体のなす閉部分群($\cong U(1,1)$)の場合に、$G$の離散系列表現$\pi$に対して、空間$\mathcal{I}_{\eta,\pi}$を山下氏の方法によって調べ、同時に、$\mathcal{I}_{\eta,\pi}$に属するintertwining operatorの行列要素の

明示公式を与える。数論的な観点からみると、$I_\eta\pi$に属するintertwining operatorの行列要素は、村瀬–菅野両氏の保型L–関数の積分表示の理論に現われる"新谷関数"の実素点における類似物と見做され、その適当な積分変換は、ある種の保型L–関数のΓ–因子を与えると期待される。

§1. 記号

$G = SU(2,1) = \left\{ g \in SL_3(\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^t\bar{g} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \right\}$

$K = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} \in G \,\middle|\, k \in U(2),\ k' \in U(1) \right\} \cong U(2)$

とおく。KはGの極大コンパクト部分群となる。

$\mathfrak{p} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ {}^t\bar{u} & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in M_{2,1}(\mathbb{C}) \right\} \ (\subset \mathfrak{g})$

とおくと、Cartan分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を得る。

$\mathfrak{a} := \mathbb{R}H_1$ (但し $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$) は、$\mathfrak{p}$の極大可換部分空間を与える。$A = \exp(\mathfrak{a})$とおく。

$a_r := \exp((\log r)H_1)$ $(r > 0)$ とおく。

$\sigma : G \longrightarrow G$を§0で述べたGの対合的自己同型として、

$H = \{ g \in G \mid \sigma(g) = g \}$ とおくと、

$H = \left\{ \begin{pmatrix} h' & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \in G \,\middle|\, h' \in U(1),\ h \in U(1,1) \right\} \cong U(1,1)$

となる。($H\backslash G$はアファイン対称空間の簡単な例である。)

(1-2) Hの部分群.

以下、$H \ni \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \longmapsto h \in U(1,1)$ によって、Hと$U(1,1)$を同一視する。Hの部分群K', A', M', N'を次のように定める。 $K' := K \cap H$ (Hの極大コンパクト部分群).

$$A' := \left\{ a'_r = \begin{pmatrix} \frac{r+r^{-1}}{2} & \frac{r-r^{-1}}{2} \\ \frac{r-r^{-1}}{2} & \frac{r+r^{-1}}{2} \end{pmatrix} \middle| r > 0 \right\}$$

$$M' := \left\{ m'_\theta := \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N' := \left\{ \begin{pmatrix} 1+xi & -ix \\ ix & 1-ix \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

$(i = \sqrt{-1})$

§2. 表現の parametrization.

(2-1). ルート分解

TをGの対角行列全体のなす部分群とすると、Tは、Kに含まれるGのカルタン部分群となる。Tのユニタリー指標群$\hat{T}$は、単位元での微分を対応させることにより、$\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$のある lattice L_Tと同一視される。$\lambda = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^{\oplus 2}$について、$\chi_\lambda \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{pmatrix} = t_1^{\ell_1} t_2^{\ell_2}$ として、$\chi_\lambda \in \hat{T} \cong L_T$を定めると、$\mathbb{Z}^{\oplus 2} \cong L_T$。 α_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3, i \neq j) \in L_T$を

$\alpha_{ij} \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{pmatrix} = t_i t_j^{-1}$ により定めると、

$\Sigma := \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) = \{ \alpha_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j \}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_c := \{ \Sigma\text{の compact roots} \} = \{ \pm\alpha_{12} \} \\ \Sigma_n := \{ \Sigma\text{の non compact roots} \} = \{ \pm\alpha_{13}, \pm\alpha_{23} \} \end{array} \right.$$

$$X_{\alpha_{ij}} := \begin{cases} E_{ij} & ((i,j) \neq (2,1)) \\ -E_{ij} & ((i,j) = (2,1)) \end{cases} \quad (\in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}))$$ とおく

と、$X_{\alpha_{ij}}$ は root α_{ij} に属する root vector を与え、

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \left(\sum_{i \neq j} \mathbb{C} X_{\alpha_{ij}} \right) \\ \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C} X_{\alpha_{21}} \oplus \mathbb{C} X_{\alpha_{12}} \\ \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C} X_{\alpha_{23}} \oplus \mathbb{C} X_{\alpha_{32}} \end{cases}$$

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} H'_{12} \oplus \mathbb{C} H'_{13} \quad (\text{但し}, H'_{ij} = E_{ii} - E_{jj})$$

(2-2) $\widehat{K}$ の parametrization

$\Sigma_c^+ := \{\alpha_{12}\}$ (Σ_c の正のルート系) とおくと、T の Σ_c^+-dominant weight 全体の集合 L_T^+ は、

$$L_T^+ = \{\lambda = (l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^{\oplus 2} \mid l_1 \geq l_2\}$$ となる。

各 $\lambda \in L_T^+$ に対して、$(\tau_\lambda, V_\lambda)$ を K の既約表現で、highest weight λ をもつものとする。V_λ の $\mathbb{C}$-basis $\{v_i^\lambda\}_{i=0}^{d_\lambda}$ (但し、$d_\lambda = \dim_{\mathbb{C}} V_\lambda = l_1 - l_2$) で、次の性質をもつものを固定する。(定数倍 ($\neq 0$) を除いて $\{v_i^\lambda\}$ は唯一つ。)

$$\begin{cases} \tau_\lambda(H'_{12}) v_k^\lambda = (2k - d_\lambda) v_k^\lambda \\ \tau_\lambda(H'_{13}) v_k^\lambda = (k + l_2) v_k^\lambda \\ \tau_\lambda(X_{\alpha_{12}}) v_k^\lambda = (k+1) v_{k+1}^\lambda & (0 \leq k \leq d_\lambda) \\ \tau_\lambda(X_{\alpha_{21}}) v_k^\lambda = (k - d_\lambda - 1) v_{k-1}^\lambda \end{cases}$$

(但し、$v_k^\lambda = 0$ $(k = -1, d_\lambda + 1)$ と思う。)

Highest weight 理論より、$\widehat{K} = \{\tau_\lambda \mid \lambda \in L_T^+\}$。

(2-3) <u>Gの離散系列表現</u>

Gの離散系列表現のハリシュ-チャンドラ parametrization を復習しておく。ΞをL_T^+の regular element 全体の集合とする。(i.e $\Xi = \{\lambda \in L_T^+ \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0 \ (\forall \alpha \in \Sigma)\}$)

$\hat{G}_{ds}$をGの離散系列表現の同値類の集合とすると、各$\Lambda \in \Xi$について、"Λをハリシュチャンドラ parameter" にもつ$\omega_\Lambda \in \hat{G}_{ds}$が決まり、$\Lambda \to \omega_\Lambda$によって、bijection $\Xi \cong \hat{G}_{ds}$が得られる。Ξは、

$$\Xi_{\mathrm{I}} = \{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^{\oplus 2} \mid l_1 > l_2 > 0\}$$

$$\Xi_{\mathrm{II}} = \{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^{\oplus 2} \mid l_1 > 0 > l_2\}$$

$$\Xi_{\mathrm{III}} = \{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^{\oplus 2} \mid 0 > l_1 > l_2\}$$

の disjoint union となる。$\Lambda \in \Xi_{\mathrm{I}}$ (resp. Ξ_{III}) の時、対応するω_Λは正則 (resp. 反正則) である。$\Lambda \in \Xi_{\mathrm{II}}$の時、対応する$\omega_\Lambda$は、Vogan の意味で large な表現である。各$\Lambda \in \Xi$について、ユニタリー表現$(\pi_\Lambda, H_\Lambda) \in \omega_\Lambda$を固定する。

(2-4) <u>Hの表現</u>

まず、Hの主系列表現を定義しよう。

$n \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{C}$に対して、$V_{n,\nu}$を、H上の$\mathbb{C}$-値可測関数$\varphi : H \to \mathbb{C}$で、$\varphi|K' \in L^2(K')$かつ、

$$\varphi(a'_r m'_\theta n' h) = r^{\nu+1} e^{in\theta} \varphi(h)$$

$(\forall a' \in A',\ \forall m'_0 \in M',\ \forall n' \in N')$ を満たすもの全体の空間とする。$\varphi_1, \varphi_2 \in V_{n,\nu}$ に対して

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{K'} \varphi_1(k') \overline{\varphi_2(k')}\, dk'$$

(dk': normalized Haar 測度) として内積を決めると、$V_{n,\nu}$ は Hilbert 空間となり、H は $V_{n,\nu}$ に右移動で作用し、H の Hilbert 表現 $(\pi_{n,\nu}, V_{n,\nu})$ を得る。$\varepsilon \in \{0,1\}$ について $\mathbb{Z}_\varepsilon = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv \varepsilon\ (2)\}$ とおくと、$\pi_{n,\nu}$ は $(n,\nu) \in \mathbb{Z}_\varepsilon \times (\mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\varepsilon'})$ については既約。(但し $\{\varepsilon, \varepsilon'\} = \{0,1\}$)

◎ $\pi_{n,\nu}$ の infinitesimal structure

$(n,\nu) \in \mathbb{Z}_\varepsilon \times \mathbb{C}$ について、$\pi_{n,\nu}$ に付随する $(\mathfrak{h}, K')$-加群の構造を適当な basis $\{v_m\}$ を用いて記述する。各 $m \in \mathbb{Z}_\varepsilon$ に対し、$v_m\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta}\end{pmatrix} = e^{im\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ をみたす C^∞-ft $v_m \in V_{n,\nu}$ が唯一つ存在する。

〈補題〉 $(\pi^0_{n,\nu}, V^0_{n,\nu})$ を $\pi_{n,\nu}$ に付随する $(\mathfrak{h}, K')$-加群とすると、$V^0_{n,\nu} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \mathbb{C} v_m$ であり

$$\left\{\begin{array}{l} \pi^0_{n,\nu}(H'_{12}) v_m = -\dfrac{m+n}{2} v_m \\ \pi^0_{n,\nu}(H'_{13}) v_m = -\dfrac{n-m}{2} v_m \\ \pi^0_{n,\nu}(X_{\alpha_{23}}) v_m = \dfrac{\nu-m+1}{2} v_{m-2} \\ \pi^0_{n,\nu}(X_{\alpha_{32}}) v_m = \dfrac{\nu+m+1}{2} v_{m+2} \end{array}\right. \qquad (\forall m \in \mathbb{Z}_\varepsilon)$$

次に、Hの離散系列表現全体を、(主系列 $\eta_{n,\iota}$ の分解を用いて) parametrize する。

〈補題〉 $n, k \in \mathbb{Z}$, $n \equiv k+1 \pmod 2$, $k > 0$ とする。$V_{n,k}$ の閉部分空間 $\mathcal{D}_{n,\pm k}$ を、

$$\mathcal{D}_{n,k} := \widehat{\bigoplus_{\substack{m\in\mathbb{Z}_\varepsilon \\ m \geq k+1}}} \mathbb{C} v_m \quad , \quad \mathcal{D}_{n,-k} := \widehat{\bigoplus_{\substack{m\in\mathbb{Z}_\varepsilon \\ m \leq -k-1}}} \mathbb{C} v_m$$

とおいて、定めると、これらは、Hの作用で不変で、$\delta_{n,\pm k} := \eta_{n,k} | \mathcal{D}_{n,\pm k}$ とおくと、$\delta_{n,\pm k}$ は H の離散系列に属する表現を与え $\widehat{H}_{ds} = \left\{ \delta_{n,k} \;\middle|\; \begin{array}{l} n, k \in \mathbb{Z} \\ n \equiv k+1 \ (2), \ k \neq 0 \end{array} \right\}$

§3 結果

$\pi = \pi_\Lambda$ ($\Lambda \in \Xi$) を G の離散系列表現とする。λ を π の Blattner parameter (i.e. π の minimal K-type の Σ_c^+-heighest weight) とし、K-embedding $\iota_0 : V_\lambda \hookrightarrow H_\Lambda | K$ を固定する。

$$\begin{tikzcd} I_{\eta,\pi} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\pi^*, C^\infty_\eta(H\backslash G)) \arrow[r, hook, "\iota_0^*"] \arrow[dr, bend right, "\mathfrak{Z}_{\eta,\lambda}"'] & \mathrm{Hom}_K(\tau_\lambda^*, C^\infty_\eta(H\backslash G)) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\ & C^\infty_{\eta,\tau_\lambda}(H\backslash G/K) \end{tikzcd}$$

として、injective linear map $\mathfrak{Z}_{\eta,\lambda}$ を決める。
但し、$C^\infty_{\eta,\lambda}(H\backslash G/K)$ は、C^∞-写像 $F : G \to H_\eta^\infty \otimes V_\lambda$

で、$F(hgk)=(\eta^\infty(h)\otimes\tau_\lambda(k))F(g)$ $({}^\forall h\in H, {}^\forall k\in K)$
をみたすもの全体とする。次に、1階の微分作用素、

$$\bar{D}_{\eta,\lambda}: C^\infty_{\eta,\lambda}(H\backslash G/K)\longrightarrow C^\infty_{\eta,\tau_\lambda^-}(H\backslash G/K).$$

(但し、τ_λ^- は、$V_\lambda\otimes_{\mathbb{C}}\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の既約成分のうち、Σ_c^+-highest weight が $\lambda-\beta$ $(\beta\in\Sigma_n\cap\Sigma_\Lambda^+)$ という形をもつものの和。$\Sigma_\Lambda^+=\{\beta\in\Sigma \mid \langle\beta,\Lambda\rangle>0\}$)
を、$\bar{D}_{\eta,\lambda}F(g):=(\sum_{i=1}^{4} RX_iF(g)\otimes X_i$ の τ_λ^- 成分。)
と定める。山下氏により、次の定理が得られている。

〈定理[Y]〉 η が、H の主系列表現又は、離散系列表現とすると、$I_{\eta,\pi}\underset{\partial_{\eta,\lambda}}{\cong}\ker(\bar{D}_{\eta,\lambda})$。

(Note: $G=SU(2,1)$ の時、${}^\forall\Lambda\in\Xi$ について、Blattner parameter λ は"壁から遠い")

更に、アファイン対称空間 $H\backslash G$ の構造論から

〈補題[R]〉 $M^*=N_K(A)$ とおくと、写像、
$H\times A\times K\longrightarrow G$ は、C^∞級全射で、各 $g\in G$ について
その"A-成分"は、$Ad(M^*)$ の作用を除き一意的。

上の定理と、この補題を組合せることで、$I_{\eta,\pi}$ を記述するには、微分方程式 $\bar{D}_{\eta,\lambda}F=0$ の解 F の"動径成分" $F|A$ を決定すればよい。計算結果をまとめると次のようになる。

《定理A》$\eta = \eta_{n,\nu}$ $((n,\nu) \in \mathbb{Z}_\varepsilon \times (\mathbb{C} - \mathbb{Z}_\varepsilon))$ を H の既約な主系列表現とする。$\pi = \pi_\Lambda$ $(\Lambda \in \Xi)$ の Blattner parameter を $\lambda = (l_1, l_2)$ とする。$\mu_{n,\lambda} := \dfrac{l_1 + l_2 + n}{3}$ とおく。この時、$\mu_{n,\lambda} \notin \mathbb{Z}$ であれば、$I_\eta \pi = \{0\}$ となる。以下、$\mu_{n,\lambda} \in \mathbb{Z}$ とする。

i) $\Lambda \in \Xi_{\mathrm{I}} \cup \Xi_{\mathrm{III}}$ ならば、$I_\eta \pi = \{0\}$

ii) $\Lambda \in \Xi_{\mathrm{II}}$ ならば、$\dim_{\mathbb{C}} I_\eta \pi = 1$ であり、$I_\eta \pi$ の base T で、$\varphi_T := \partial_{\eta,\lambda}(T)|A$ が次のように与えられるものが唯一つある。

$$\varphi_T(a_r) = \sum_{i=0}^{d_\lambda} r_i(\nu; r)(v_{m_i} \otimes v_i^\lambda) \quad (r > 0)$$

但し、$m_i := -2i + d_\lambda + \mu_{n,\lambda}$

$$r_i(\nu; r) = \Big(\prod_{j=i}^{\xi-1} \frac{\nu + m_j - 1}{2\beta_j}\Big)\Big(\frac{r + r^{-1}}{2}\Big)^{\alpha_i - 2d_\lambda - 4}\Big(\frac{r - r^{-1}}{2}\Big)^{\beta_i}$$
$$\times F\Big(\frac{m_i + 1 + \nu}{2}, \frac{m_i + 1 - \nu}{2}; 1 + \beta_i; \Big(\frac{r - r^{-1}}{r + r^{-1}}\Big)^2\Big)$$
$$(i = 0, \dots, \xi - 1) \qquad \text{——①}$$

$$r_i(\nu; r) = \Big(\prod_{j=\xi+1}^{i} \frac{\nu - m_j - 1}{2\beta_j}\Big)\Big(\frac{r + r^{-1}}{2}\Big)^{-\alpha_i}\Big(\frac{r - r^{-1}}{2}\Big)^{-\beta_i}$$
$$\times F\Big(\frac{-m_i + 1 - \nu}{2}, \frac{-m_i + 1 + \nu}{2}; 1 - \beta_i; \Big(\frac{r - r^{-1}}{r + r^{-1}}\Big)^2\Big)$$
$$(i = \xi + 1, \dots, d_\lambda) \qquad \text{——②}$$

$r_\xi(\nu; r)$ は、$\xi = 0$ の時は②で $i = 0$ とした式、$\xi \neq 0$ の時は①で $i = \xi$ とした式で与える。

但し、$\xi := \inf(d_\lambda, \sup(0, \mu_{n,\lambda} - l_2))$

$$\beta_i := -i - l_2 + \mu_{n,\lambda}, \quad \alpha_i = 2i - \mu_{n,\lambda} + 2$$

$F(a, b; c; z)$ はガウスの超幾何関数である。

《定理B》$\eta = \eta_{n,k}$ ($n, k \in \mathbb{Z}$, $n \equiv k+1$ (2), $k \neq 0$) を H の離散系列の表現とする。$\pi = \pi_\Lambda$ ($\Lambda \in \Xi$) の Blattner parameter を $\lambda = (l_1, l_2)$ とおく。

$\mu_{n,\lambda} := \dfrac{l_1 + l_2 + n}{3} \notin \mathbb{Z}$ ならば、$I_{\eta,\pi} = \{0\}$。

$\mu_{n,\lambda} \in \mathbb{Z}$ の時、

i) $\Lambda \in \Xi_{\mathrm{I}}$ の場合、$I_{\eta,\pi} \neq \{0\}$ となる条件は、

$$\left\{ \begin{array}{l} k > 0, \quad \dfrac{3(k+1)+n}{2} \geqq l_1 + l_2 \\ 2l_2 - l_1 \leqq \dfrac{3(k+1)-n}{2} \leqq 2l_1 - l_2 \end{array} \right.$$

であり、この条件のもとでは、$\dim_{\mathbb{C}} I_{\eta,\pi} = 1$ で、

$$\partial_{\eta,\lambda}(T)(a_r) = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\prod_{j=i+1}^{p-1} \frac{2(j - d_\lambda - 1)}{m_p - m_j} \right) \left(\frac{r - r^{-1}}{2} \right)^{\beta_i} \left(\frac{r + r^{-1}}{2} \right)^{-\mu_{n,\lambda}} \times (v_{m_i} \otimes v_i^{\wedge})$$

を満たす基底 T ($\in I_{\eta,\pi}$) が唯一つある。

(但し、p は、$k-1 = m_p$ により決まる整数で、上の条件の下では、$1 \leqq p \leqq d_\lambda$。)

ii) $\Lambda \in \Xi_{\mathrm{II}}$ の場合、$I_{\eta,\pi} \neq \{0\}$ となる条件は、

$0 < k < m_g + 1$ 又は、$m_g - 1 < k < 0$

である。この条件のもとでは、$\dim_{\mathbb{C}} I_{\eta,\pi} = 1$ で、

$$\partial_{\eta,\pi}(T)(a_r) = \sum_{i=0}^{d_\lambda} r_i(k; r)(v_{m_i} \otimes v_i^{\wedge})$$

を満たす基底 T ($\in I_{\eta,\pi}$) が唯一つある。但し、

$g = \inf(d_\lambda, \sup(0, \mu_{n,\lambda} - l_2))$

で、$r_i(k; r)$ は、定理A の中で定めた関数。

iii) $\Lambda \in \Xi_{\mathrm{III}}$ の場合、$I_\eta \pi \neq \{0\}$ となる条件は

$$\begin{cases} k < 0, \quad \dfrac{3(k-1)+n}{2} \leqslant l_1 + l_2 \\ 2l_2 - l_1 \leqslant \dfrac{3(k-1)-n}{2} \leqslant 2l_1 - l_2 \end{cases}$$

であり、この条件のもとでは、$\dim_{\mathbb{C}} I_\eta \pi = 1$ で、

$$\partial_{\eta,\lambda}(T)(a_r) = \sum_{i=p+1}^{d_\lambda} \left(\prod_{j=p+1}^{i-1} \frac{2(j+1)}{m_j - m_p} \right) \left(\frac{r - r^{-1}}{2} \right)^{-\beta_i} \left(\frac{r + r^{-1}}{2} \right)^{\mu_{n,\lambda}} \times (v_{m_i} \otimes v_i^\lambda)$$

を満たす基底 $T \ (\in I_\eta \pi)$ が唯一つある。但し、p は $-k+1 = m_p$ により決まる整数である。

[文献表]

[R] W. Rossmann : The structure of semisimple symmetric spaces Can. J. Math 31 ('79) (157~180)

[K-O] H. Koseki T. Oda : Whittaker functions for the large discrete series representations of SU(2,2) and related zeta integral. (保型形式シンポジウム報告書 ('93))

[M-S] A. Murase - T. Sugano : Shintani function and its application to automorphic L-functions for classical groups. (I. The case of orthogonal groups) (Math. Ann. 299 (17~56) ('94))

[Y] H. Yamashita : Embedding of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups I, Japan. J. Math. 16 (31~95) ('90).