数理解析研究所講究録
910 巻 1995 年 44-54

変換ネットについてのいくつかの性質

Y. Kunimochi † T. Inomata † G. Tanaka †

国持 良行　猪股俊光　田中源次郎
(静岡理工科大学・理工)

あらまし　ネット (特にペトリネット) は，計算機による動作解析のモデルとしてよく用いられる．ここでは，まず，変換ネット間の同型写像を定義する．次に，変換ネットと呼ぶネットを用いて，半群とその半群上の変換を表現する．1 節では，これらに関連する用語を定義し，ネット上の自己同型写像全体が群をなすことを示す．続いて，2 節では，任意の有限群 G に対してある変換ネット N が存在し，N 上の自己同型写像全体が G と (群として) 同型になることを示す．最後に，3 節では変換ネットをもとに得られる L 型ペトリネット言語が正規言語になることを示す．

1　諸定義といくつかの性質

本節では，諸定義とそれらから導かれるいくつかの性質を述べる．なお，以下では，非負整数の集合を $\mathbf{N}$ で表す．さらに $\mathbf{N}-\{0\}$ と $\mathbf{N}\cup\{\infty\}$ を，それぞれ $\mathbf{N}^+$ と ω で表す．まず，(ペトリ) ネットやそれに関する言語について定義する．

定義 1.1　以下の (i) ～ (v) を満たす 4 項対 (P, T, A, W) のことをネットと呼ぶ．さらに，(vi) を満たす 5 項対 (P, T, A, W, μ) のことをペトリネットと呼ぶ．

(i) P はプレース (**place**) の有限集合であり，(ii) T はトランジション (**transition**) の有限集合であり，そして (iii) $P\cap T=\emptyset$ かつ $P\cup T\neq\emptyset$ を満たす．(iv) $A\subset(P\times T)\cup(T\times P)$ はアーク (**arc**) の集合であり，(v) W は**重み付け関数**と呼ばる，A から $\mathbf{N}^+$ への関数である．(vi) μ はマーキング (**marking**)(または，**拡張マーキング**) と呼ばれる，P から $\mathbf{N}$ への (または，P から ωへの) 関数である．■

(v) について，アーク $a\in A$ に対して，$W(a)$ を a の**重さ** と呼ぶ．また，$a=(p,t)\in A\cap(P\times T)$ と表されているとき，$W(a)$ を $W((p,t))$ と書く代わりに，$W(p,t)$ と書く．同様に，$a=(t,p)\in A\cap(T\times P)$ と表されているとき，$W(a)$ を $W((t,p))$ と書く代わりに，$W(t,p)$ と書くことにする．

(vi) について，通常のペトリネットのマーキングは，P から $\mathbf{N}$ への関数であるが，本論文では，∞ を値として取り得るものとし，これを拡張マーキングと呼び，通常のマーキングと区別している．

---

† Department of Computer Science, Shizuoka Institute of Science and Technology, Fukuroi-shi, Japan, 437

記法 1.1 $N=(P,T,A,W)$ をネットとする．このとき，
プレース $p\in P$ に対して，p への入力トランジション全体 $(\{t\in T|(t,p)\in A\})$ を$^{\cdot}p$ で表し，p からの出力トランジション全体 $(\{t\in T|(p,t)\in A\})$ を $p^{\cdot}$ で表す．
トランジション $t\in T$ に対して，t への入力プレース全体 $(\{p\in P|(p,t)\in A\})$ を$^{\cdot}t$ で表し，t からの出力プレース全体 $(\{p\in P|(t,p)\in A\})$ を $t^{\cdot}$ で表す． ■

定義 1.2 $N=(P,T,A,W)$ をネットとし，μ をマーキングとする．このとき，
(i) トランジション $t\in T$ に対して，

$$(\forall p)\{p\in {}^{\cdot}t\Longrightarrow W(p,t)\leq\mu(p)\}\tag{1}$$

が成立するとき，t は マーキング μ のもとで **発火可能** という．このとき、遷移関数 $\delta_N(\mu,t)=\mu'$ を以下のように定義し，$\mu\xrightarrow{t}\mu'$ と表す．

$$\mu'(p)=\begin{cases}\mu(p)-W(p,t) & p\in{}^{\cdot}t-t^{\cdot}\text{のとき}\\ \mu(p)+W(t,p) & p\in t^{\cdot}-{}^{\cdot}t\text{のとき}\\ \mu(p)-W(p,t)+W(t,p) & p\in t^{\cdot}\cap{}^{\cdot}t\text{のとき}\\ \mu(p) & \text{その他のとき}\end{cases}\tag{2}$$

また，この t に関しするマーキングの書き換えを，t の発火ということもある．
(ii) トランジションの列 $\beta=t_1t_2\cdots t_k$ ($k=0$ すなわちβ が空列の場合を含む) に対して，$\mu_0=\mu$ かつ$\mu_{i-1}\xrightarrow{t_i}\mu_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ が成り立つとき，β は μ からの**発火列** であるという．そして，μ_k は μ から (β によって) **可達である** という．このとき，$\delta_N(\mu,\beta)$ を μ_k で定義し，$\mu\xrightarrow{\beta}\mu_k$ または$\mu\xrightarrow{*}\mu_k$ と表す．また，μ から可達なマーキングの集合を $\mathbf{R}_N(\mu)$ と書く．
(iii) Σ を**アルファベット (alphabet)** と呼ばれる，記号の空でない有限集合とする．また，$\sigma:T\longrightarrow\Sigma$ をラベリング関数とする．さらに，F は任意のマーキングの集合とする．このとき，

$$L=\{\sigma(t_1)\sigma(t_2)\cdots\sigma(t_k)|t_1t_2\cdots t_k\in T^*\text{かつ}\delta_N(\mu,\,t_1t_2\cdots t_k)\in F)\}\tag{3}$$

を，(μ を初期マーキング，F を最終状態集合とする) N の **L 型ペトリネット言語** [1] と呼び，$L_N^{\sigma}(\mu,\,F)$ と表す．なお，ここでは，$L_N^{\sigma}(\mu,\,F)$ の正規性のみを議論している．σ を恒等写像 $\mathbf{1}$ とした場合の言語 $L_N^{\mathbf{1}}(\mu,\,F)$ が正規であることと任意のσ について正規であることは同値である．そこで，以後 T 自身をΣ (つまり σ は恒等写像) とみなして，言語 $L_N^{\mathbf{1}}(\mu,\,F)$ を L 型ペトリネット言語と定義し，単に $L_N(\mu,\,F)$ と表すことにする． ■

定義 1.3 以下の (i) 〜 (v) を満たす 5 項対 $(Q,\,\delta,\,\Sigma,\,s,\,F)$ のことを**有限状態機械 (finite state machine)** という．
(i) Q は**状態 (state)** の有限集合であり，(ii) Σ はアルファベットである．(iii) δ は遷移関数と呼ばれる，$Q\times\Sigma$ から Q への関数である．(iv) $s\in Q$ は**初期状態 (initial state)** であり，(v) $F\subset Q$ は**最終状態 (final state)** の集合である．

以下では，語 $w \in \Sigma^*$ に対しても遷移関数 $\delta : Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q : (q, w) \mapsto \delta(q, w)$ が次の方法で定義されるものとする:

$$\delta(q,w) = \begin{cases} \delta(\delta(q,x),w') & w = xw'(x \in \Sigma \text{と } w' \in \Sigma^* \text{の連接}) \\ q & w = \lambda(\text{空語}) \end{cases} \tag{4}$$

有限状態機械 $C = (Q, \delta, \Sigma, s, F)$ によって生成される言語 $L(C)$ とは $L(C) = \{\beta \in \Sigma^* | \delta(s, \beta) \in F\}$ のことである．そして，有限状態機械によって生成される言語のことを**正規言語**という． ■

ここで，ペトリネット言語と有限状態機械の関連について述べる．ネット $N = (P, T, A, W)$ に対して，μ_0 から可達なマーキングの集合 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ が有限集合であるならば，一つの有限状態機械 $C_N(\mu_0, F)$ を構成することができる: 状態集合 Q として $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ を，アルファベット Σ として T そのものを，遷移関数 δ として δ_N を，初期状態 s として μ_0 を，最終状態集合 F として $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ の任意の部分集合を，それぞれ採用して得られる 5 項対 $C_N(\mu_0, F) = (\mathbf{R}_N(\mu_0), T, \delta_N, \mu_0, F)$ は有限状態機械である． よって，N のペトリネット言語 $L_N(\mu_0, F)$ は，$C_N(\mu_0, F)$ によって生成される正規言語 $L(C_N(\mu_0, F))$ と一致する．

続いて，ネット上の同型写像に関する定義を行なう．なお，P上，T 上，および A 上の写像は，引数を左から写像に適用するものとする．

定義 1.4 $N_1 = (P_1, T_1, A_1, W_1)$ と $N_2 = (P_2, T_2, A_2, W_2)$ はネットとする．このとき，写像 $\alpha : P_1 \to P_2$ と $\beta : T_1 \to T_2$の対$\varphi = (\alpha, \beta)$ が次を満たすならば，N_1 から N_2 への **準同型 (homomorphism)** と呼ぶ．

$$(\forall a)\{a \in A_1 \Longrightarrow (a)\tilde{\varphi} \in A_2 \text{かつ } W_2((a)\tilde{\varphi}) \leq W_1(a)\} \tag{5}$$

但し，φ に対して全射 $\tilde{\varphi} : A_1 \longrightarrow A_2$ を，

$$(a)\tilde{\varphi} = \begin{cases} ((p)\alpha, (t)\beta) & a = (p,t) \in A_1 \cap (P_1 \times T_1) \text{のとき} \\ ((t)\beta, (p)\alpha) & a = (t,p) \in A_1 \cap (T_1 \times P_1) \text{のとき} \end{cases} \tag{6}$$

で定義する (以後，誤解を生じない場合には，$(a)\tilde{\varphi}$ を単に $(a)\varphi$ と書く). ■

定義 1.5 $\varphi = (\alpha, \beta) : N_1 \to N_2$ を準同型とする．α と β がともに，全射であるとき，φ は **上への準同型**と呼ぶ．さらに，φ が,

$$(\forall a)\{a \in A \Longrightarrow W_2((a)\varphi) = W_1(a)\} \tag{7}$$

を満たすとき，φ は**整合的 (well-formed)** 準同型と呼ばれる． ■

定義 1.6 ネット N_1 から N_2 への整合的準同型 $\varphi = (\alpha, \beta)$ は，α と β がともに，単射であるとき，**同型写像 (isomorphism)** と呼ばれる．とくに，$N_1 = N_2 = N$ のときは，N の**自己同型 (automorphism)** と呼ばれる．また，N の自己同型全体を $\mathbf{Aut}(N)$ で表す． ■

まず，上に定義した $\mathbf{Aut}(N)$ は,

$$(id_P, id_T) \in \mathbf{Aut}(N) \tag{8}$$

であるから，$\mathbf{Aut}(N) \neq \emptyset$ である．ここに，$id_P : P \longrightarrow P$ と $id_T : T \longrightarrow T$ は恒等写像である．なお，以下では，$(id_P, id_T) \in \mathbf{Aut}(N)$ を $\mathbf{1}_{\mathbf{Aut}(N)}$ (誤解を生じないときは単に $\mathbf{1}$) と書くことにする．続いて，$\mathbf{Aut}(N)$ が群をなすことを示す．

性質 1.1

1. 2つの自己同型の各要素の合成して得られる組も自己同型になる，つまり

$$\varphi_1 = (\alpha_1, \beta_1), \varphi_2 = (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbf{Aut}(N) \Longrightarrow (\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2) \in \mathbf{Aut}(N) \tag{9}$$

が成り立つので，$\mathbf{Aut}(N)$ 上の 2 項演算 $\cdot$ を次のように定義できる：任意の 2 要素 φ_1, φ_2に対し，$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \overset{def}{=} (\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2)$ ($\cdot$ は写像の合成を表すが，以下では特に注意を必要とする場合以外は，$\cdot$を省略する)．

2. このとき，$(\mathbf{Aut}(N), \cdot)$ は群をなす．単位元は (id_P, id_T) であり，任意の元 $\varphi = (\alpha, \beta)$ の逆元φ^{-1} が一意に存在し，$\varphi^{-1} = (\alpha^{-1}, \beta^{-1})$ と表される． ■

1. について　式 (9) が成り立つことを示す．

$\varphi_i = (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbf{Aut}(N)$ $(i = 1, 2)$ であることから，$\alpha_i : P \to P$ と $\beta_i : T \to T$ は，ともに全単射，すなわち置換となる．したがって，$\alpha_1\alpha_2 : P \to P$ と$\beta_1\beta_2 : T \to T$ も全単射となる．さらに，φ_1 は整合的準同型だから，

$$a \in A \Longrightarrow (a)\varphi_1 \in A \text{ かつ } W((a)\varphi_1) = W(a)$$

φ_2 も整合的準同型だから，

$$(a)\varphi_1 \in A \Longrightarrow W((a)\varphi_1\varphi_2) = W((a)\varphi_1)$$

よって，

$$a \in A \Longrightarrow (a)\varphi_1\varphi_2 \in A \text{ かつ } W((a)\varphi_1\varphi_2) = W((a)\varphi_1) = W(a)$$

従って，$\varphi_1\varphi_2$ は整合的準同型である．よって，(9) が成り立つ．

以上のように，(8) と (9) から $\mathbf{Aut}(N)$ における演算 (合成) $\cdot$ を $(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_1 \cdot \beta_2)$ で定義すると，$(\mathbf{Aut}(N), \cdot)$ はモノイドをなす ($\cdot$ が結合律を満たすことは明らかである)．なお，単位元は，$\mathbf{1}$ である．

2. について　任意の元 φ に逆元が存在することを示す，すなわち，

$$\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N) \Longrightarrow (\exists! \varphi^{-1} \in \mathbf{Aut}(N))\{\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \mathbf{1}\} \tag{10}$$

が成り立つことを示す:

置換 α と β について，P と T がともに有限だから，$\alpha^n = id_P$ かつ $\beta^m = id_T$ となる $n, m \in \mathbf{N}^+$ が存在する．$\varphi^{nm} = (\alpha, \beta)^{nm} = (\alpha^{nm}, \beta^{nm}) = \mathbf{1}$ すなわち，$\varphi\varphi^{nm-1} = \varphi^{nm-1}\varphi = \mathbf{1}$ と

なるから，$\varphi^{-1} = \varphi^{nm-1} \in \mathbf{Aut}(N)$ である (逆元の一意性は明らか)．なお，$\varphi^{-1} = (\gamma, \delta)$ とすると，$(\alpha\gamma, \beta\delta) = (id_P, id_T)$ より，$\gamma = \alpha^{-1}, \delta = \beta^{-1}$であるから，

$$\varphi^{-1} = \varphi^{nm-1} = (\alpha^{nm-1}, \beta^{nm-1}) = (\alpha^{-1}, \beta^{-1}) \tag{11}$$

と表せる．

(10) と (11) から任意の $\varphi = (\alpha, \beta)$ は逆元$\varphi^{-1} = (\alpha^{-1}, \beta^{-1})$ をもち，モノイド $\mathbf{Aut}(N)$ は群をなす． ■

定義 1.7 $N = (P, T, A, W)$ をネットとする．このとき，次の (i) ~ (vi) の条件を満たすならば，N のことを **変換ネット** と呼ぶ．

(i) P はソースプレースの集合 S と内部プレースの集合 Q と呼ばれる，空でない互いに素な 2 つ集合からなる ($P = Q \cup S, Q \cap S = \emptyset, Q \neq \emptyset, S \neq \emptyset$)．

(ii) 各ソースプレースと各内部プレースに対して出力トランジションが (一意に) 定まる:

$$(\forall q)(\forall x)\{q \in Q \wedge x \in S \Longrightarrow |q^{\cdot} \cap x^{\cdot}| = 1\} \tag{12}$$

(iii) 相異なる 2 つの内部プレースに共通な出力トランジションは存在しない:

$$(\forall p)(\forall q)\{p \in Q \wedge q \in Q \wedge p \neq q \Longrightarrow |p^{\cdot} \cap q^{\cdot}| = 0\} \tag{13}$$

(iv) 相異なる 2 つのソースプレースに共通な出力トランジションは存在しない:

$$(\forall x)(\forall y)\{x \in S \wedge y \in S \wedge x \neq y \Longrightarrow |x^{\cdot} \cap y^{\cdot}| = 0\} \tag{14}$$

(v) ソースプレースへの入力トランジションはない:

$$(\forall x)\{x \in S \Longrightarrow |{}^{\cdot}x| = 0\} \tag{15}$$

(vi) 各トランジションの入力プレース数は 2 であり，出力プレース数は 1 である:

$$(\forall t)\{t \in T \Longrightarrow |{}^{\cdot}t| = 2 \text{ かつ } |t^{\cdot}| = 1\} \tag{16}$$

■

$\forall q \in Q$ と $\forall x \in S$ に対して，(12)~(14) により，$q^{\cdot} \cap x^{\cdot} = \{t\}$ となる $t \in T$ が唯一存在し，逆にすべてのトランジションは 2 つの入力プレースをもち，一方は内部プレースであり，他方はソースプレースである．故に，このトランジションを $\mathbf{t}(q, x)$ と表すことができる．そして，(15) により，ソースプレース $x \in S$ への入力トランジションはないので，トランジションの出力は，常に内部プレースとなる．従って，$\mathbf{t}(q, x)$ に対し，(15) と (16) により，$(t, q') \in A$ となる唯一の $q' \in Q$ が存在する．この q' を $\mathbf{q}(q, x)$ と表す．

例 1.1 上記定義の変換ネット N において，$x \in S$ に対して，変換:

$$(x)\tau : Q \longrightarrow Q : q \longmapsto \mathbf{q}(q, x) \tag{17}$$

が考えられる．変換集合 $\{(x)\tau | x \in S\}$ で生成される，Q 上の変換半群 (つまり，上記変換集合を含む最小の変換半群) を $T(N)$ で表し，ネット N の**特性半群** と呼ぶ．

逆に，集合 Q 上の変換の集合 S を考える．S で生成される変換半群 S' について，$(Q)S' = \{(q)f | q \in Q, f \in S'\}$ が Q に等しければ，

(i) $P = Q \cup S$

(ii) $T = Q \times S$

(iii) $$\begin{aligned} A = \ & \{(q,(q,f)) | f \in S, q \in Q\} \cup \\ & \{(f,(q,f)) | f \in S, q \in Q\} \cup \\ & \{((q,f),(q)f) | f \in S, q \in Q\} \end{aligned}$$

(iv) $W(q,(q,f)) = W(f,(f,q)) = W((q,f),(q)f) = 1$($W$は適当でよい)

とおくことにより，変換ネット $N = (P, T, A, W)$ が考えられる． ■

例 1.2 Q と S を空でない互いに素な集合とし，τ は$\tau : S \longrightarrow (Q \longrightarrow Q)$ なる写像とする，このとき，次のネット $N = (P, T, A, W)$ は変換ネットになる．

(i) $P = Q \cup S$

(ii) $T = Q \times S$

(iii) $A = \{(q,(q,x)),(x,(q,x)),((q,x),(q)(x)\tau) | q \in Q,\ x \in S\}$

(iv) $W : A \longrightarrow \mathbf{N}^+$ なる写像とする．

N が変換ネットである理由は以下の通りである．(ii) と (iii) より各内部プレース $q \in Q$ と各ソースプレース $x \in S$ に対して，それら 2 つを入力プレースとするトランジション (q, x) が存在し，その出力プレースは内部プレース $(q)(x)\tau$ 唯一つである．そして，これ以外のトランジションは存在しない．これを図示すると，図 1 のようになる．図中では，プレースを円で表し，トランジションを線分で表し，そしてアークを矢印で表す．

この変換ネットを，Q, S, τ, W によって決まる**標準的変換**ネットと呼び，$\mathcal{N}(Q, S, \tau, W)$ と表す． ■

2 ネットの同型写像

定理 2.1 任意の有限群 G に対して，G と $\mathbf{Aut}(N)$ とが同型 ($\mathbf{Aut}(N) \cong G$) となるネット N が存在する． ■

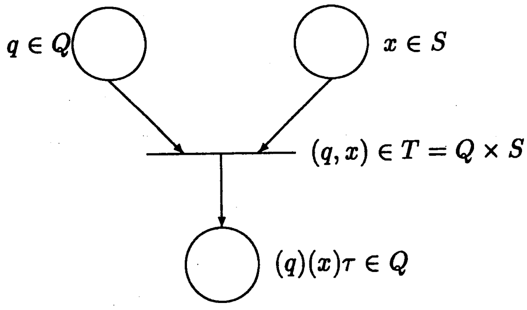

図 1: 標準的変換ネット $\mathcal{N}(Q, S, \tau, W)$ の構造

証明　G' を G と同型な群する．なお，$y \in G$ の同型写像による像を $y'(\in G')$ と書く．$\rho : G' \to \mathbf{N}$ を単射とする．但し，任意の $y' \in G'$ に対して，$\rho(y') \geqq 2$ とする．

このとき，標準的な変換ネット $N_1 = \mathcal{N}(G, G', \tau_1, W_1)$ とする．ただし，$\tau_1 : G' \longrightarrow (G \longrightarrow G)$ と重み付け関数 W_1 を次のように定義する．

(i)　$(\forall x \in G)(\forall y' \in G')\{(x)(y')\tau_1 = xy\}$

(ii)　$(\forall x \in G)(\forall y' \in G')[\{W_1(x, (x, y')) = W_1((x, y'), xy) = 1\} \wedge \{W_1(y', (x, y')) = \rho(y')\}]$

つまり，$P = G \cup G'$ はプレースの集合であり，G は内部プレースの集合であり，G' はソース (プレース) の集合である．$T = G \times G'$ はトランジションの集合であり，各トランジション $(x, y') \in G \times G'$ へは内部プレース x とソースプレース y' からのちょうど 2 つ入力アークがあり，(x, y') からは内部プレース $xy \in G$ へのただ 1 つの出力アークがある．なお，このネット N_1 のアーク全体を A_1 と表すことにする:

$$A_1 = \{(x, (x, y')), (y', (x, y')), ((x, y'), xy) | x \in G, y' \in G'\}$$

そして，ソースプレース y'からトランジションへのアークの重みは，$\rho(y') \geqq 2$(なお，ρ は単射) で与えられ，その他のアークの重みは 1 である．これを図示すると，図 2 のようになる．

そこで，

1.　$\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ について，$\alpha | G' = id_{G'}$.

2.　$\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ について，α が G の単位元 e を固定するとき，$\varphi = (\alpha, \beta) = \mathbf{1}$ である，つまり，

$$(e)\alpha = e \Longrightarrow (\alpha, \beta) = \mathbf{1}. \tag{18}$$

3.　G から $\mathbf{Aut}(N_1)$ への同型写像 ϕ が存在する．

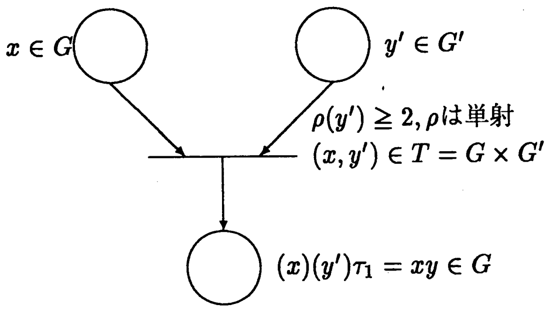

図 2: 標準的変換ネット $N_1 = \mathcal{N}(G,\, G',\, \tau_1,\, W_1)$ の構造

の 3 段階に分けて証明をする.

1. について　$\varphi = (\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ とする. この N_1 の自己同型写像 φ によって, 任意のソース $y' \in G'$ から出るアーク $(y', (x, y')) \in A_1$ は, アーク $((y')\alpha, (x, y')\beta) \in A_1$ に移る. そして, φ の整合性 (7) の条件から,

$$W_1((y')\alpha, (x, y')\beta) = W_1(y', (x, y')) = \rho(y')$$

である. ρ は単射であるから, $\rho(y')$ の重さを持つアークは, ネット N_1 中ではソース y' から出るものに限られる. よって, $(y')\alpha = y'$. α は G' のすべての元を固定する. 従って, α の G' 上の制限は単位置換である $(\alpha|G' = id_{G'})$.

2. について　$(e)\alpha = e$ であるとき, 任意のソースプレース $y' \in G'$ に対して, β はトランジション (e, y') を固定する, すなわち, $(e, y')\beta = (e, y')$ である. なぜならば,

$$\begin{aligned}
&(e, (e, y')) \in A_1 より,\quad ((e)\alpha, (e, y')\beta) = (e, (e, y')\beta) \in A_1 \quad (仮定による)\\
&(y', (e, y')) \in A_1 より,\quad ((y')\alpha, (e, y')\beta) = (y', (e, y')\beta) \in A_1 \quad (\mathbf{1}.による)
\end{aligned}$$

$(e, y')\beta$ は, e と y' によって決まるトランジションだから, $(e, y')\beta = (e, y')$.

さらに,

$$((e, y'), y) \in A_1 より,\quad ((e, y')\beta, (y)\alpha) = ((e, y'), (y)\alpha) \in A_1$$

であるから, $ey = y = (y)\alpha$ となる. α は G の各元を固定する, つまり $\alpha = id_P$. また, $(x,\, y') \in G \times G'$ について,

$$\begin{aligned}
&(x, (x, y')) \in A_1 より,\quad ((x)\alpha, (x, y')\beta) = (x, (x, y')\beta) \in A_1 \quad (\alpha = id_P による)\\
&(y', (x, y')) \in A_1 より,\quad ((y')\alpha, (x, y')\beta) = (y', (x, y')\beta) \in A_1 \quad (\alpha = id_P による)
\end{aligned}$$

$(x, y')\beta$ は, x と y' によって決まるトランジションだから, $(x, y')\beta = (x, y')$. つまり $\beta = id_T$.

3. について　任意の $g \in G$ に対して, $\phi(g) = (\alpha_g,\, \beta_g)$ を次のように定義すると, $\phi(g)$ は N_1 の自己同型写像になる. すなわち, $\phi(g) \in \mathbf{Aut}(N_1)(\phi(G) \subset \mathbf{Aut}(N_1))$.

$$(z)\alpha_g = \begin{cases} gz & z \in G \text{ のとき} \\ z & z \in G' \text{のとき} \end{cases} \tag{19}$$

$$(x, y')\beta_g = (gx, y') \tag{20}$$

逆に，任意の $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ に対して，ある $g \in G$ が存在して，$(\alpha, \beta) = \phi(g)$ となることを示す：

$(e)\alpha = g$ とする．このとき，(α, β) と$\phi(g^{-1}) = (\alpha_{g^{-1}}, \beta_{g^{-1}}) \in \mathbf{Aut}(N_1)$ の合成は，

$$(e)\alpha\alpha_{g^{-1}} = (g)\alpha_{g^{-1}} = g^{-1}g = e$$

であるから，$\alpha\alpha_{g^{-1}}$ は e を固定するので，**2.** により，

$$(\alpha\alpha_{g^{-1}}, \beta\beta_{g^{-1}}) = \mathbf{1}_{\mathbf{Aut}(N_1)} \in \mathbf{Aut}(N_1) \tag{21}$$

となる．ところで，α_g と β_gの定義により，

$$\begin{array}{ll} x \in G \Longrightarrow & (x)\alpha_g\alpha_{g^{-1}} = (gx)\alpha_{g^{-1}} = g^{-1}gx = x \\ y' \in G' \Longrightarrow & (y')\alpha_g\alpha_{g^{-1}} = (y')\alpha_{g^{-1}} = y' \end{array} \tag{22}$$

かつ

$$(x, y') \in G \times G' \Longrightarrow (x, y')\beta_g\beta_{g^{-1}} = (gx, y')\beta_{g^{-1}} = (g^{-1}gx, y') = (x, y') \tag{23}$$

であるので，$(\alpha_{g^{-1}})^{-1} = \alpha_g$ および $(\beta_{g^{-1}})^{-1} = \beta_g$ が成り立つ．よって，式 (21) と上記の性質から，

$$\alpha = (\alpha_{g^{-1}})^{-1} = \alpha_g \text{ かつ } \beta = (\beta_{g^{-1}})^{-1} = \beta_g \tag{24}$$

従って，

$$\mathbf{Aut}(N_1) = \phi(G) = \{(\alpha_g, \beta_g) | g \in G\} \tag{25}$$

以上により，

$$\phi : G \to \mathbf{Aut}(N_1) : g \longmapsto (\alpha_g, \beta_g) \tag{26}$$

は同型写像である．よって， $\mathbf{Aut}(N_1) \cong G$ となる． ■

3 変換ネットとL型ペトリネット言語の関係

$N = (P, T, A, W)$ を変換ネットとし，その重み付け関数 W が，$(\forall a \in A)(W(a) = 1)$ とする．

μ_0 を後で定義する単純マーキングとすると，N の μ_0 から可達な集合 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ が有限であるならば，(μ_0 を初期マーキング，F を最終状態集合とする) N の L 型言語 $L_N(\mu_0, F)$ は，

有限状態機械 $C_N(\mu_0, F) = (\mathbf{R}_N(\mu_0), \delta_N, T, \mu_0, F)$ によって生成されるので，正規言語となる．以下では，$\mathbf{R}_N(\mu_0)$ が有限であることを証明する．

まず，マーキングについての定義をする．

定義 3.1 $N = (P, T, A, W)$ を変換ネットし，$\mu : P \longrightarrow \omega$ を拡張マーキングとする．また，任意の内部プレース $p \in Q$ に対して，$\mu(p) \neq \infty$ のとき，μ のことを**単純マーキング** と呼ぶ．単純マーキング μ の内部プレース集合 Q 上への制限$\mu|Q$ を**内部マーキング** と呼び，$\bar{\mu}$ で表す． ■

まず，変換ネットに関する定理を証明するために，補題を示す．なお，以下では，混乱を招かない場合は $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ のようにプレースに番号がついているとし，μ を n 項対 $(\mu(p_1), \mu(p_2), \cdots, \mu(p_n))$ で表す．

補題 3.1 $N = (P, T, A, W)$ を変換ネットとし，$(\forall a \in A)(W(a) = 1)$ とする．さらに，μ_0 を単純マーキング μ_0 とする．このとき，初期マーキングμ_0 から可達なマーキングの集合 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ は有限集合である． ■

証明 単純マーキングには，

1. 任意の $x \in S$ について，$\mu(x) = \infty$ ．
2. 任意の $x \in S$ について，$\mu(x) \neq \infty$ ．
3. ある $x \in S$ について，$\mu(x) = \infty$，ある $y \in S$ について，$\mu(x) \neq \infty$.

の 3 種類のケースがある．

1. の場合 $\bar{\mu} = (m_1, \cdots, m_i, \cdots, m_j, \cdots, m_n)$ を内部マーキングとする．$\bar{\mu}(p_i) = m_i > 0$ とする．このとき，任意の $x \in S$ について，p_i と x で定まるトランジション t は発火可能である．$t^{\cdot} = \{p_j\}$ ならば

$$\bar{\mu} = (m_1, \cdots, m_i, \cdots, m_j, \cdots, m_n) \xrightarrow{t} (m_1, \cdots, m_i - 1 \cdots, m_j + 1, \cdots, m_n) \tag{27}$$

となる．よって，t を繰り返し m_i 回発火させたのち，p_i のトークンはすべて p_j に移る．従って，μ_0 から可達な内部マーキング$\bar{\mu} = (m_1, \cdots, m_i, \cdots, m_j, \cdots, m_n)$ は，整数方程式:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i = m \tag{28}$$

の非負整数解でなくてはならない．よって，

$$|\mathbf{R}_N(\mu_0)| \leqq {}_{n+m-1}C_m \tag{29}$$

である．等号は，特性半群 $\mathcal{T}(N)$ が Q 上可移の (すなわち，任意の $q, q' \in Q$ に対して，ある $s \in \mathcal{T}(N)$ が存在して $q' = (q)s$ となる) ときに成り立つ．

2. と 3. の場合

$$X = \{x \in S | \mu(x) \neq \infty\} \subset S \tag{30}$$

とおく，内部マーキング $\bar{\mu}$ に，$r = |X|$ 個の項を付けた $r + n$ 対を考える:

$$(\mu(x_1),\, \mu(x_2), \cdots,\, \mu(x_r); \mu(p_1),\, \mu(p_2), \cdots,\, \mu(p_n))\ \text{但し}, x_i \in X,\, p_j \in Q \tag{31}$$

$y \in S - X$ のとき，$t \in y^{\cdot}$ なる t が発火しても，$k_1 = (\sum_{i=1}^{r} \mu(x_i)) + (\sum_{j=1}^{n} \mu(p_j))$ の値は不変である．

$x \in X$ のとき，$t \in x^{\cdot}$ なる t が発火すると，${}^{\cdot}t = \{x, p\}$ であるソースプレース x と内部プレース p からトークンが一つずつ除かれ，$t^{\cdot} = \{q\}$ である内部プレース q へトークンが 1 つ追加される．従って，t の発火によって，ネットのトークンの総数は 1 つ減る．従って，$k_0 = (\sum_{j=1}^{n} \mu(p_j))$ とすると，起こり得る $r + n$ 項対 $(u_1,\, u_2, \cdots,\, u_r,\, v_1,\, v_2, \cdots,\, v_n)$ は，整数不等式:

$$k_0 \leqq u_1 + u_2 + \cdots + u_r + v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leqq k_1 \tag{32}$$

の非負整数解でなくてはならない．つまり，$\mathbf{R}_N(\mu_0)$ は有限である． ■

定理 3.1 $N = (P, T, A, W)$ を変換ネットとし，$(\forall a)(W(a) = 1)$ とする．さらに，μ_0 を単純マーキング μ_0 とし, F を任意のマーキングの集合とする．このとき，μ_0 を初期マーキングとし F を最終状態集合とする N の L 型ペトリネット言語 $L_N(\mu_0, F)$ は正規である． ■

証明 上記補題により，可達なマーキング集合 $\mathbf{R}_N(\mu_0)$ は有限集合であるから，N から有限状態機械 $C_N(\mu_0, F)$ が構成される． そして $L_N(\mu_0, F)$ は，$C_N(\mu_0, F)$ によって生成される正規言語 $L(C_N(\mu_0, F))$ と一致する． ■

参考文献

[1] James. L. Peterson："Petri net theory and the modeling of systems", Prentice-Hall, (1981), 邦訳 "ペトリネット入門", 市川・小林訳, (共立出版).