

# Bessel 関数を含む振動積分に対する 数値積分公式

東京大学工学部物理工学科 緒方秀教 (Hidenori Ogata)  
東京大学工学部物理工学科 杉原正顯 (Masaaki Sugihara)

## 1 はじめに

本研究の目的は、Bessel 関数を含む振動関数の半無限区間積分

$$\int_0^{\infty} \hat{f}(x) J_n(x) dx \quad (1.1)$$

( $\hat{f}(x)$  はべき的に減衰する関数) に対して有効な数値積分公式を構築することである。  
上の積分 (1.1) や Fourier 変換型積分

$$\int_0^{\infty} \hat{f}(x) \sin x dx \quad (1.2)$$

( $\hat{f}(x)$  はべき的に減衰する関数) といった振動積分は、DE 公式 [6] を含め従来の数値積分則では計算が困難とされてきた。ところが、1991 年大浦・森により Fourier 積分 (1.2) に対して有効な DE 公式が提案された [4]。従来の DE 公式は DE 変換により被積分関数が二重指数関数的に減衰するようにしていたが、大浦・森の公式はその代わりに、台形則の標本点が三角関数  $\sin x$  の零点に無限遠で二重指数関数的に減衰するような DE 変換を用いている。この公式は、変数変換型公式では振動積分は計算できないという、数値積分における従来の常識を打ち破ったという点で画期的である。

ところが Bessel 関数を含む振動積分 (1.1) に対しては、大浦・森の公式は有効でない。何故なら、Bessel 関数の零点は三角関数  $\sin x$  のように厳密に等間隔に並んでいるわけではないので、大浦・森の公式を適用しても、標本点は被積分関数の零点に二重指数関数的に近付かないからである。

この困難を解消するためには、台形則の標本点が三角関数の等間隔な零点をとっていることに着目して、Bessel 関数の零点を標本点に持つような積分則を作ればよいと、考えられる。そのうえで大浦・森と同種の変数変換を適用すれば、Bessel 関数の零点に標本点が二重指数関数的に近付くようにすることが出来ると、期待される。

我々は前回の研究会で、Bessel 関数の零点を標本点に持つ補間公式「Lagrange-Bessel 補間」を提案した。そこで今回はこの補間を応用して、Bessel 関数の零点を標本点に持つ積分公式「Lagrange-Bessel 積分則」をつくり、それに大浦・森型の DE 変換を適用して、Bessel 関数を含む振動積分の数値計算に成功した。

本論文の構成は次の通りとする：第 2 節では、Lagrange-Bessel 補間をもとに、Bessel 関数の零点を標本点にもつ積分則、「Lagrange-Bessel 積分則」を導出し、その誤差解析を行

う。ここでは、次の2種類の積分：

$$\text{対称積分 } I_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \quad (1.3)$$

$$\text{反対称積分 } I_A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn } x f(x)dx = \left( \int_0^{\infty} - \int_{-\infty}^0 \right) f(x)dx \quad (1.4)$$

を考えることにする。

第3節では、Lagrange-Bessel 積分則と大浦・森のアイデアを組み合わせ、Bessel 関数を含む振動積分 (1.1) に対する算法を考案し、数値実験例を紹介する。最後の第4節では、本研究を総括し今後の課題について述べる。

## 2 Lagrange-Bessel 積分則

まず最初にすべきことは、Bessel 関数の零点を標本点に持つ積分則をつくることであるが、我々は、前回提案した Lagrange-Bessel 補間 [3] から、この積分則を導出することにする。

Lagrange-Bessel 補間とは、Bessel 関数の零点

$$\cdots < -\frac{h}{\pi}j_{nk} < \cdots < -\frac{h}{\pi}j_{n2} < -\frac{h}{\pi}j_{n1} < \frac{h}{\pi}j_{n1} < \frac{h}{\pi}j_{n2} < \cdots < \frac{h}{\pi}j_{nk} < \cdots \quad (2.1)$$

( $h > 0$  は定数、 $0 < j_{n1} < j_{n2} < \cdots < j_{nk} < \cdots$  は Bessel 関数  $J_n(x)$  の零点) を標本点に持つ補間公式のことであり、文献 [1] における補間の一般論から、次の式で与えられる：

$$\begin{aligned} f(x) &\approx L_h^{(n)} f(x) && (2.2) \\ &\equiv -\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{h}{\pi}j_{nk}\right) \frac{(hj_{nk}/(\pi x))^n J_n(\pi x/h)}{J_{n+1}(j_{nk})(\pi x/h - j_{nk})} + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-\frac{h}{\pi}j_{nk}\right) \frac{(hj_{nk}/(\pi x))^n J_n(\pi x/h)}{J_{n+1}(j_{nk})(\pi x/h + j_{nk})}. \end{aligned}$$

また、この補間の誤差は、関数  $f(z)$  が実軸近傍で正則であるとき、簡単な留数計算により、次のように複素積分で表わすことができる：

$$\Delta L_h^{(n)} f(x) \equiv f(x) - L_h^{(n)} f(x) = \frac{J_n(\pi x/h)}{2\pi i x^n} \int_{\Gamma} \frac{z^n f(z) dz}{(z-x)J_n(\pi z/h)}, \quad (2.3)$$

ここで  $\Gamma$  は実軸を Fig. 1 のように挟む積分路であり、 $\Gamma$  上およびその内部で  $f(z)$  は正則であるようにとる。

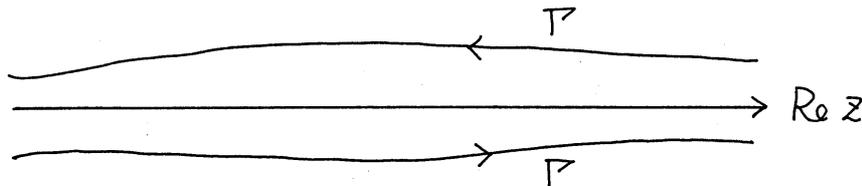


Fig. 1. The contour  $\Gamma$ .

この誤差表現は、あとで Lagrange-Bessel 積分則の誤差評価を行う出発点となる。

上で述べた Lagrange-Bessel 補間をもとに、これから Lagrange-Bessel 積分則を導出するのであるが、本研究では次の2種類の積分を考えることにする：

$$I_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$I_A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x f(x) dx = \left( \int_0^{\infty} - \int_{-\infty}^0 \right) f(x) dx.$$

前者を関数  $f(x)$  の対称積分 (symmetric integral)、後者を反対称積分 (antisymmetric integral) と呼ぶ。

初めに、対称積分 (1.3) に対する積分則を導出する。Lagrange-Bessel 補間 (2.2) の両辺を  $x$  について全無限区間上で積分し、右辺において形式的に項別積分を実行することにより、次の積分則を得る：

$$I_S(f) \approx Q_S^{(n)}(f, h)$$

$$\equiv h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{h}{\pi} j_{nk}\right) \frac{\mathbf{H}_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})} + h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-\frac{h}{\pi} j_{nk}\right) \frac{\mathbf{H}_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})}, \quad (2.4)$$

ここで  $\mathbf{H}_n(x)$  は0次の Struve 関数である [7]。これを、( $n$  次) Lagrange-Bessel 対称積分則と呼ぶことにする。

対称積分則 (2.4) の誤差は、Lagrange-Bessel 補間の誤差表示 (2.3) の両辺を  $x$  について積分することにより、次のように複素積分で表わすことができる：

$$\Delta Q_S^{(n)}(f, h) \equiv I_S(f) - Q_S^{(n)}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \Phi_S^{(n)}(z, h) dz, \quad (2.5)$$

$$\Phi_S^{(n)}(z, h) = \pi \left( \mp i + \frac{\mathbf{H}_n(\pi z/h)}{J_n(\pi z/h)} \right) \quad (\pm \operatorname{Im} z > 0), \quad (2.6)$$

ここで  $\Gamma$  は実軸を Fig. 1 のように挟む積分路で、 $\Gamma$  上およびその内部で  $f(z)$  は正則であるようにとる。関数  $\Phi_S^{(n)}(z, h)$  を、文献 [2] にならって、対称積分則 (2.5) の誤差の特性関数と呼ぶことにする。

この積分表示から誤差評価を得るには、誤差の特性関数 (2.6) のおおよその値を見積もらなければならないが、漸近展開公式 [7]

$$J_n\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sim \sqrt{\frac{2h}{\pi^2 z}} \cos \left[ \frac{\pi}{h} \left( z - \frac{nh}{2} - \frac{h}{4} \right) \right] \quad (|\arg z| < \pi), \quad (2.7)$$

$$\pm J_n\left(\frac{\pi z}{h}\right) + i \mathbf{H}_n\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sim H_n^{(1/2)}\left(\frac{\pi z}{h}\right) + \frac{i}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(n-m+1/2)} \left(\frac{\pi z}{2h}\right)^{n-2m-1} \quad (|\arg z| < \pi) \quad (2.8)$$

( $H_n^{(1)}(\pi z/h)$ ,  $H_n^{(2)}(\pi z/h)$  は Hankel 関数)、

$$H_n^{(1)}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sim \sqrt{\frac{2h}{\pi^2 z}} \exp \left[ i \frac{\pi}{h} \left( z - \frac{nh}{2} - \frac{h}{4} \right) \right] \quad (-\pi < \arg z < 2\pi), \quad (2.9)$$

$$H_n^{(2)}\left(\frac{\pi z}{h}\right) \sim \sqrt{\frac{2h}{\pi^2 z}} \exp \left[ -i \frac{\pi}{h} \left( z - \frac{nh}{2} - \frac{h}{4} \right) \right] \quad (-2\pi < \arg z < \pi), \quad (2.10)$$

さらに  $(-1)^n J_n(\pi z/h)$ ,  $(-1)^n \mathbf{H}_n(\pi z/h)$  が偶関数であることから、実軸から離れたところで

$$\Phi_S^n(z, h) \approx Ch^{1/2-n} z^{n-1/2} \exp\left(\pm i \frac{\pi}{h} z\right) \quad (\pm \operatorname{Im} z \gg 0) \quad (2.11)$$

( $C$ は  $h$  によらない定数) となることが分かる。

これを用いて例えば、 $f(z)$  が  $z = a_1, a_2, \dots, a_L$  に極を持つ有理形関数で、 $|z| \rightarrow \infty$  のとき一様に  $|z^{n-1/2} f(z)| \rightarrow 0$  となるならば、(2.5) に留数定理を適用して、誤差評価

$$|\Delta Q_S^{(n)}(f, h)| = \left| -\sum_{l=1}^L f(a_l) \Phi_S^{(n)}(a_l, h) \right| \approx |C| |f(a_M)| h^{1/2-n} |a_M|^{n-1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{h} |\operatorname{Im} a_M|\right)$$

(ここで  $|\operatorname{Im} a_M| = \min_{l=1}^L \{|\operatorname{Im} a_l|\}$  であるとする) を得る。

積分の標本点  $\pm h j_{nk}/\pi$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) は、Bessel 関数の零点  $j_{nk}$  の性質から、

$$\pm \frac{h}{\pi} j_{nk} \sim \pm h \left( k + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad (k \rightarrow \infty)$$

と、原点から離れたところで漸近的に等間隔に並んでいる。すなわち、パラメータ  $h$  は Lagrange-Bessel 積分則の「漸近的な標本点間隔」と言うことも出来る。上の定理は、対称積分則の漸近的な標本点間隔  $h$  を小さくするにつれて、積分誤差は  $O[\exp(-\text{const}/h)]$  のオーダーで指数的減少することを示している。

これを、従来の全無限区間における台形則の場合と比較してみる。台形則

$$I_S(f) \approx Q_{\text{trape}}(f, h) \equiv h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)$$

の誤差は次のように表わされる [5]:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\text{trape}}(f, h) &\equiv I_S(f) - Q_{\text{trape}}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \Phi_{\text{trape}}(z, h) dz, \\ \Phi_{\text{trape}}(z, h) &= -\frac{\pi \exp(\pm i\pi z/h)}{\sin(\pi z/h)} \quad (\pm \operatorname{Im} z > 0). \end{aligned}$$

2つの積分則の誤差の特性関数の値を比較すると、実軸から離れたところでそれぞれ

$$\begin{aligned} |\Phi_S^{(n)}(z, h)| &\approx Ch^{1/2-n} |z|^{n-1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{h} |\operatorname{Im} z|\right), \\ |\Phi_{\text{trape}}(z, h)| &\approx 2\pi \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\operatorname{Im} z|\right) \end{aligned}$$

となっている。両者とも実軸からはなれるにしたがい  $\approx \exp(-(c/h)|\operatorname{Im} z|)$  のように指数関数的に値が減衰するが、係数  $c$  を見ると Lagrange-Bessel 対称積分則は台形則の  $1/2$  になっている。すなわち、それだけ Lagrange-Bessel 対称積分則の誤差の減衰は、台形則の誤差の減衰より遅くなっていることが分かるが、そればかりでなく、実はあとで振動積分の数値計算を行う際、この違いが重要になることが分かる。

このように対称積分則だけ見た限り、Lagrange-Bessel 積分則には何のメリットもないかのように、一見思える。ところが、Lagrange-Bessel 補間に基づく積分則が有効な積分も存在し、実は反対称積分  $I_A(f)$  がそれである。

これから反対称積分に対する Lagrange-Bessel 積分則を導出するが、Bessel 関数の次数  $n$  が一般の非負整数の場合計算が多少煩雑になるので、 $n = 0$  の場合についてのみ具体的に計算を示すことにする。

Lagrange-Bessel 補間 (2.2) の両辺に  $\operatorname{sgn} x$  を掛け、全無限区間で積分することにより、次の近似式を得る：

$$I_A(f) \approx Q_A^{(0)}(f, h) \equiv h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{h}{\pi} j_{0k}\right) \frac{N_0(j_{nk})}{J_1(j_{1k})} - h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-\frac{h}{\pi} j_{0k}\right) \frac{N_0(j_{nk})}{J_1(j_{1k})}. \quad (2.12)$$

これを 0 次 Lagrange-Bessel 反対称積分則と呼ぶことにする。

この積分則の誤差は、補間誤差 (2.3) の両辺に  $\operatorname{sgn} x$  を掛け、 $x$  について全無限区間で積分することにより、次のように複素積分表示することができる：

$$\Delta Q_A(f, h) \equiv I_A^{(0)}(f) - Q_A^{(0)}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \Phi_A^{(0)}(z, h) dz, \quad (2.13)$$

$$\Phi_A^{(0)}(z, h) = \begin{cases} -i\pi H_0^{(1)}(\pi z/h)/J_0(\pi z/h) & (\operatorname{Im} z > 0), \\ i\pi H_0^{(2)}(\pi z/h)/J_0(\pi z/h) & (\operatorname{Im} z < 0). \end{cases} \quad (2.14)$$

関数  $\Phi_A^{(n)}(z, h)$  を反対称積分則 (2.13) に対する誤差の特性関数と呼ぶことにする。

漸近公式 (2.7), (2.9), (2.10) と  $J_0(\pi z/h)$  が偶関数であることから、反対称積分則に対する誤差の特性関数の値は、実軸から離れたところで

$$\Phi_A^{(0)}(z, h) \approx \mp 2\pi i \exp\left(\pm i \frac{2\pi}{h} z\right) \quad (\pm \operatorname{Im} z \gg 0) \quad (2.15)$$

と振る舞う。これより例えば、 $f(z)$  が  $z = a_1, a_2, \dots, a_L$  に極を持つ有理形関数で、 $|z| \rightarrow \infty$  のとき一様に  $|f(z)| \rightarrow 0$  となるならば、(2.13) に留数定理を適用して、誤差評価

$$|\Delta Q_A^{(0)}(f, h)| = \left| -\sum_{l=1}^L f(a_l) \Phi_A^{(0)}(a_l, h) \right| \approx 2\pi |f(a_M)| \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\operatorname{Im} a_M|\right)$$

(ここで  $|\operatorname{Im} a_M| = \min_{l=1}^L \{|\operatorname{Im} a_l|\}$  であるとする) を得る。

この場合も誤差は指数関数的に減少しているが、ここで注意すべきことは、Lagrange-Bessel 反対称積分則、(対称積分に対する) 台形則の誤差の特性関数を比較すると、

$$|\Phi_A^{(0)}(z, h)| \approx 2\pi \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\operatorname{Im} z|\right), \\ |\Phi_{\text{trape}}(z, h)| \approx 2\pi \exp\left(-\frac{2\pi}{h} |\operatorname{Im} z|\right)$$

と、実軸から離れたところで両者の値が同じように振る舞っていることである。これより Lagrange-Bessel 反対称積分則は、対称積分に対する台形則と同程度の精度を達成することが分かる。

なお、Bessel 関数の次数  $n$  が一般の整数の場合、Lagrange-Bessel 反対称積分則は次のようになる：

$$\begin{aligned}
I_A(f) &\approx Q_A^{(n)}(f, h) \\
&\equiv h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{h}{\pi} j_{nk}\right) \frac{N_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})} - h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-\frac{h}{\pi} j_{nk}\right) \frac{N_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})} \\
&\quad + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{f^{2\lambda+1}(0)}{(2\lambda+1)!} \left(\frac{h}{\pi}\right)^{2(\lambda+1)} \sum_{m=0}^{n-\lambda-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} 2^{n-2m} C_{n-\lambda-m-1}^{(n)}, \quad (2.16)
\end{aligned}$$

ここで  $C_m^{(n)} (m = 0, 1, 2, \dots)$  は、 $1/J_n(x)$  の  $x = 0$  での Laurent 展開における  $x^{2k-n}$  の係数である：

$$\frac{1}{J_n(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(n)} x^{2m-n}.$$

$n = 1, 2$  の場合について、公式 (2.16) を具体的に書き下しておく：

$$\begin{aligned}
Q_A^{(1)}(f, h) &= h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{h}{\pi} j_{1k}\right) \frac{N_1(j_{1k})}{J_2(j_{1k})} - h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-\frac{h}{\pi} j_{1k}\right) \frac{N_1(j_{1k})}{J_2(j_{1k})} \\
&\quad + 4 \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 f'(0), \quad (2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_A^{(2)}(f, h) &= h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{h}{\pi} j_{2k}\right) \frac{N_2(j_{2k})}{J_3(j_{2k})} - h \sum_{k=1}^{\infty} f\left(-\frac{h}{\pi} j_{2k}\right) \frac{N_2(j_{2k})}{J_3(j_{2k})} \\
&\quad + \frac{32}{3} \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 f'(0) + \frac{16}{3} \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 f^{(3)}(0). \quad (2.18)
\end{aligned}$$

また、積分則 (2.16) の誤差は、次のように表わされる：

$$\Delta Q_A^{(n)}(f, h) \equiv I_A(f) - Q_A^{(n)}(f, h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \Phi_A^{(n)}(z, h) dz, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_A^{(n)}(z, h) &= \begin{cases} -i\pi H_n^{(1)}(\pi z/h)/J_n(\pi z/h) & (\text{Im } z > 0), \\ i\pi H_n^{(2)}(\pi z/h)/J_n(\pi z/h) & (\text{Im } z < 0). \end{cases} \\
&\approx \mp 2\pi i \exp\left(\pm i \frac{2\pi}{h} z\right) \quad (\pm \text{Im } z \gg 0). \quad (2.20)
\end{aligned}$$

### 3 Bessel 関数を含む振動積分

この節では、本研究の主題である、Bessel 関数を含む振動積分 (1.1) の数値計算を扱う。はじめに、Fourier 積分に対する大浦・森の方法 [4] について復習しておく。計算したい Fourier 積分を

$$I_{\text{Fourier}}(\hat{f}) = \int_0^{\infty} \hat{f}(x) \sin x dx \quad (3.1)$$

とおく。この積分に対する大浦・森の方法は次のとおりである：

**算法 3.1** (Fourier 変換型積分による大浦・森の方法)

1: 変数変換

$$x = \frac{\pi}{h}\varphi(u), \quad \varphi(u) = \frac{u}{1 - \exp(-2\pi \sinh u)} \quad (3.2)$$

を施す (ここで  $h$  は台形則のメッシュである):

$$I_{\text{Fourier}}(\hat{f}) = \frac{\pi}{h} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\pi}{h}\varphi(u)\right) \varphi'(u) du \quad (F(x) = \hat{f}(x) \sin x). \quad (3.3)$$

2: (3.3) に、台形則を適用する:

$$I_{\text{Fourier}}(\hat{f}) \approx \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\pi}{h}\varphi(kh)\right) \varphi'(kh). \quad (3.4)$$

■

関数  $\varphi(u)$  の性質

$$\varphi(u) \sim u \quad (\text{二重指数関数的}) \quad (u \rightarrow +\infty) \quad (3.5)$$

から、標本点  $(\pi/h)\varphi(kh)$  は遠方で二重指数関数的に  $(\pi/h) \cdot kh = \pi k$ 、すなわち、 $\sin x$  の零点に近づく。これにより、変数変換後の被積分関数は標本点上で二重指数関数的に減衰し、比較的少ない点数で積分値を計算することが出来るのである。

さて、いよいよ Bessel 関数を含む振動積分

$$I_{\text{Bessel}}^{(n)}(\hat{f}) = \int_0^{\infty} \hat{f}(x) J_n(x) dx \quad (3.6)$$

を考えるわけであるが、大浦・森の方法から、次のような strategy で臨めばよいということが、自然に思いつく:

1: 振動積分 (3.6) に対して、大浦・森型の変数変換を施す。

2: 変数変換した積分に対し、Lagrange-Bessel 積分則を適用する。

ところが Lagrange-Bessel 積分則は対称積分則、反対称積分則の 2 種類存在するので、それに応じて、振動積分に対する算法も 2 種類考えられる。

まず、対称積分則に基づく算法は次の通りである:

算法 3.2 (対称積分則に基づく算法) 1: 大浦・森と同じ変数変換

$$x = \frac{\pi}{h}\varphi(u), \quad \varphi(u) = \frac{u}{1 - \exp(-2\pi \sinh u)} \quad (3.7)$$

を施す:

$$I_{\text{Bessel}}^{(n)}(\hat{f}) = \frac{\pi}{h} \int_{-\infty}^{\infty} G_n\left(\frac{\pi}{h}\varphi(u)\right) \varphi'(u) du \quad (G_n(x) = \hat{f}(x) J_n(x)). \quad (3.8)$$

2: (3.8) に対し、Lagrange-Bessel 対称積分則を適用する：

$$\begin{aligned}
 I_{\text{Bessel}}(\hat{f}) &\approx Q_{\text{LB-S}}^{(n)}(\hat{f}, h) \\
 &\equiv \pi \sum_{k=1}^{\infty} G_n \left( \frac{\pi}{h} \varphi \left( \frac{h}{\pi} j_{nk} \right) \right) \varphi' \left( \frac{h}{\pi} j_{nk} \right) \frac{\mathbf{H}_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})} \\
 &+ \pi \sum_{k=1}^{\infty} G_n \left( \frac{\pi}{h} \varphi \left( -\frac{h}{\pi} j_{nk} \right) \right) \varphi' \left( -\frac{h}{\pi} j_{nk} \right) \frac{\mathbf{H}_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})}. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

■

標本点は無限遠で

$$\frac{\pi}{h} \varphi \left( \frac{h}{\pi} j_{nk} \right) \sim \frac{\pi}{h} \cdot \frac{h}{\pi} j_{nk} = j_{nk} \quad (\text{二重指数関数的}) \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.10)$$

となるため、被積分関数は標本点上で二重指数関数的に減衰する。

次は反対称積分則に基づく算法であるが、まず反対称積分則 (2.16) から直ちに次の近似則が得られる：奇関数  $f(x)$  に対して

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} f(x) dx &\approx h \sum_{k=1}^{\infty} f \left( \frac{h}{\pi} j_{nk} \right) \frac{N_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})} \\
 &+ \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{f^{2\lambda+1}(0)}{(2\lambda+1)!} \left( \frac{h}{\pi} \right)^{2(\lambda+1)} \sum_{m=0}^{n-\lambda-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} 2^{n-2m-1} C_{n-\lambda-m-1}^{(n)}. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

近似則 (3.11) を活用するには、変数変換  $x = (\pi/h)\phi(u)$  で、

(1) 関数  $\phi(u)$  が大浦・森の変換関数  $\varphi(u)$  と同じ性質を満たす：

$$\phi(u) \rightarrow u \quad (\text{二重指数関数的}) \quad (u \rightarrow +\infty).$$

(2) 変数変換後の被積分関数  $G_n((\pi/h)\phi(u))\phi'(u)$  が奇関数となる。

の2つの性質を満たすものを見つければよい。そのような  $\phi(u)$  として、例えば、

$$\phi(u) = u \tanh \left( \frac{\pi}{2} \sinh u \right) \quad (3.12)$$

が思いつく。

算法 3.3 (反対称積分則に基づく算法) 1: 変数変換

$$x = \frac{\pi}{h} \phi(u), \quad \phi(u) = u \tanh \left( \frac{\pi}{2} \sinh u \right) \quad (3.13)$$

を施す：

$$I_{\text{Bessel}}^{(n)}(\hat{f}) = \frac{\pi}{h} \int_0^{\infty} G_n \left( \frac{\pi}{h} \phi(u) \right) \phi'(u) du. \quad (3.14)$$

2: (3.14) に対し、近似則 (3.11) を適用する：

$$\begin{aligned}
 I_{\text{Bessel}}^{(n)}(\hat{f}) &\approx Q_{\text{LB-A}}^{(n)}(\hat{f}, h) \\
 &\equiv \pi \sum_{k=1}^{\infty} G_n \left( \frac{\pi}{h} \phi \left( \frac{h}{\pi} j_{nk} \right) \right) \phi' \left( \frac{h}{\pi} j_{nk} \right) \frac{N_n(j_{nk})}{J_{n+1}(j_{nk})} \\
 &\quad + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left( \frac{d}{du} \right)^{2\lambda+1} \left\{ G_n \left( \frac{\pi}{h} \phi(u) \right) \phi'(u) \right\} \Big|_{u=0} \\
 &\quad \times \frac{1}{(2\lambda+1)!} \left( \frac{h}{\pi} \right)^{2\lambda+1} \frac{n-\lambda-1}{\sum_{m=0}^{n-\lambda-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} 2^{n-2m-1} C_{n-\lambda-m-1}^{(n)}} \quad (3.15) \blacksquare
 \end{aligned}$$

$n = 0, 1, 2$  の場合に (3.14) を具体的に書き下すと、次のようになる：

$$Q_{\text{LB-A}}^{(0)}(\hat{f}, h) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \left( \frac{\pi}{h} \phi \left( \frac{h}{\pi} j_{0k} \right) \right) \phi' \left( \frac{h}{\pi} j_{0k} \right) \frac{N_0(j_{0k})}{J_1(j_{0k})}, \quad (3.16)$$

$$Q_{\text{LB-A}}^{(1)}(\hat{f}, h) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} G_1 \left( \frac{\pi}{h} \phi \left( \frac{h}{\pi} j_{1k} \right) \right) \phi' \left( \frac{h}{\pi} j_{1k} \right) \frac{N_1(j_{1k})}{J_2(j_{1k})} + 2hG_1(0), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{LB-A}}^{(2)}(\hat{f}, h) &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} G_2 \left( \frac{\pi}{h} \phi \left( \frac{h}{\pi} j_{2k} \right) \right) \phi' \left( \frac{h}{\pi} j_{2k} \right) \frac{N_2(j_{2k})}{J_3(j_{2k})} \\
 &\quad + \left[ \frac{16}{3}h - \frac{8}{3} \left( 1 - \frac{2}{\pi^2} \right) h^3 \right] G_2(0) + 8h^2 G_2'(0). \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

ここで提案した算法が実際にうまくいくか、簡単な例

$$\hat{f}(x) \equiv 1, \quad I_{\text{Bessel}}^{(0)}(1) = \int_0^{\infty} J_0(x) dx = 1 \quad (3.19)$$

について、対称積分則による算法、反対称積分則による算法により数値実験を行ってみた。

式(3.9),(3.15)において無限和  $\sum_{k=1}^{\infty} \dots$  は計算機では計算できないので、項の絶対値が  $10^{-13}$  より小さくなったところで和を打ち切ることとし、パラメータ  $h$  を徐々に小さくしながら各算法による倍精度での計算値と真値との絶対誤差の変化を調べた。Fig. 2 に、計算に用いた標本点数に対する絶対誤差の変化をプロットした。

実験結果をみると、二つの算法の間に歴然とした違いがあることがわかる。反対称積分に基づく算法では順調に誤差が減衰しているのに対し、対称積分に基づく算法では誤差がほとんど減衰していない。二つの算法はどちらももうまくいくと一見思われるが、この違いはどうして現われるのか？

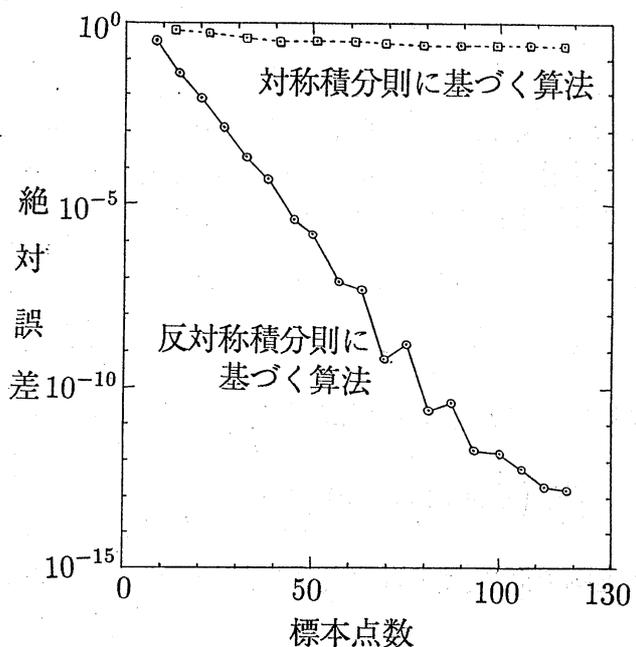


Fig. 2. Comparison of the performance of Lagrange-Bessel symmetric quadrature and antisymmetric one for  $\int_0^{\infty} J_0(x) dx$  (The horizontal axis is of the number of abscissae used. The absolute errors are plotted).

はじめに、対称積分則に基づく算法がうまくいかない理由を考える。この算法の誤差は第2節の誤差解析から

$$\begin{aligned}\Delta Q_{\text{LB}_S}^{(n)}(\hat{f}, h) &\equiv I_{\text{Bessel}}^{(n)}(\hat{f}) - Q_{\text{LB}_S}^{(n)}(\hat{f}, h) \\ &= \frac{\pi}{h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G_n \left( \frac{\pi}{h} \varphi(w) \right) \varphi'(w) \Phi_S^{(n)}(w, h) dw\end{aligned}\quad (3.20)$$

と表わされる。ところがここで注意しなければならないのは、変数変換(3.7)が「スケール因子」 $(\pi/h)$ を含むため、誤差の積分表示(3.20)において、パラメータ $h$ は特性関数 $\Phi_S^{(n)}(z, h)$ ばかりでなく、関数 $G_n$ にも含まれることである。この $G_n$ は Bessel 関数 $J_n$  (これは虚軸方向には指数関数的に増大する)を含むため、 $\text{Re } w$ が大きいところで

$$\left| G_n \left( \frac{\pi}{h} \varphi(w) \right) \varphi'(w) \right| \approx \left| G_n \left( \frac{\pi}{h} w \right) \right| \propto \left| J_n \left( \frac{\pi}{h} w \right) \right| \approx \sqrt{\frac{h}{2\pi^2 |w|}} \exp \left( \frac{\pi}{h} |\text{Im } z| \right)\quad (3.21)$$

となり、指数関数的に増大してしまう。したがって、折角特性関数 $\Phi_S^{(n)}$ が

$$|\Phi_S^{(n)}(w, h)| \approx |C| h^{1/2-n} |w|^{n-1/2} \exp \left( -\frac{\pi}{h} |\text{Im } w| \right)$$

と指数的減衰しても、 $G_n(\pi\varphi(w)/h)\varphi'(w)$ が(3.21)のように指数的増大してそれを打ち消してしまうので、積分表示(3.20)における被積分関数は

$$\begin{aligned}\left| \frac{\pi}{h} G_n \left( \frac{\pi}{h} \varphi(w) \right) \varphi'(w) \Phi_S^{(n)}(w, h) \right| &\propto \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{h}{2\pi^2 |w|}} \exp \left( \frac{\pi}{h} |\text{Im } w| \right) \\ &\quad \times |C| h^{1/2-n} |w|^{n-1/2} \exp \left( -\frac{\pi}{h} |\text{Im } w| \right) \\ &= \text{const} \cdot h^{-n} |w|^{n-1}\end{aligned}$$

となる。ゆえに、対称積分則に基づく算法の誤差 $\Delta Q_{\text{LB}_S}^{(n)}(\hat{f}, h)$ は、パラメータ $h$ を小さくしても指数的減衰を示さなくなると考えられる。

一方、反対称積分則に基づく算法については、積分誤差は

$$\begin{aligned}\Delta Q_{\text{LB}_A}^{(n)}(\hat{f}, h) &\equiv I_{\text{Bessel}}^{(n)}(\hat{f}) - Q_{\text{LB}_A}^{(n)}(\hat{f}, h) \\ &= \frac{\pi}{h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G_n \left( \frac{\pi}{h} \phi(w) \right) \phi'(w) \Phi_A^{(n)}(w, h) dw\end{aligned}\quad (3.22)$$

と表わされる。この算法の場合も、関数 $G_n(\pi\phi(w)/h)\phi'(w)$ は

$$\left| G_n \left( \frac{\pi}{h} \phi(w) \right) \phi'(w) \right| \approx \left| G_n \left( \frac{\pi}{h} w \right) \right| \propto \left| J_n \left( \frac{\pi}{h} w \right) \right| \approx \sqrt{\frac{h}{2\pi^2 |w|}} \exp \left( \frac{\pi}{h} |\text{Im } z| \right)\quad (3.23)$$

と虚軸方向に指数的増大するが、特性関数 $\Phi_A^{(n)}(w, h)$ は

$$|\Phi_A^{(n)}(w, h)| \approx 2\pi \exp \left( -\frac{2\pi}{h} |\text{Im } w| \right)$$

ともっと速く指数的減衰するので、積分表示(3.22)において被積分関数は

$$\begin{aligned}\left| \frac{\pi}{h} G_n \left( \frac{\pi}{h} \phi(w) \right) \phi'(w) \Phi_A^{(n)}(w, h) \right| &\propto \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{h}{2\pi^2 |w|}} \exp \left( \frac{\pi}{h} |\text{Im } w| \right) \cdot 2\pi \exp \left( -\frac{2\pi}{h} |\text{Im } w| \right) \\ &= \text{const} \cdot h^{-1/2} |w|^{-1/2} \exp \left( -\frac{\pi}{h} |\text{Im } w| \right)\end{aligned}$$

と、指数的減衰を保つ。ゆえに、反対称積分則に基づく算法の誤差 $\Delta Q_{\text{LB-A}}^{(n)}(f, h)$ は、パラメータ $h$ を小さくすると指数的減衰を示す。なお同じ理由により、Fourier 変換型積分に対する大浦・森の方法も成功している。

## 4 まとめと今後の課題

本研究において、Bessel 関数の零点を標本点にもつ積分則、すなわち、「Lagrange-Bessel 積分則」を対称積分、反対称積分に対し構成した。複素関数論に基づく誤差解析により、とくに反対称積分に対する積分則「Lagrange-Bessel 反対称積分則」が、対称積分に対する台形則と同程度の精度を達成し、大浦・森のアイデアと組み合わせて、Bessel 関数を含む振動積分の計算に応用できることが分かった。

今後の課題としては例えば、整数に限らない任意の次数 $\nu$ の Bessel 関数  $J_\nu(x)$  を含む振動積分の計算、Neumann 関数  $N_\nu(x)$  を含む振動積分の計算が残されている。

## 参考文献

- [1] Levin, B. Ja., *Distribution of Zeros of Entire Functions* (English translation), American Mathematical Society, Providence, 1964.
- [2] 森正武, 数値解析, 共立出版, 1973.
- [3] 緒方秀教, 杉原正顯, 無限区間における補間についての考察, 京都大学数理解析研究所講究録 880(1994), 19–27.
- [4] Ooura, T. and Mori, M., The double exponential formula for oscillatory functions over the half infinite interval, *J. Comput. Appl. Math.*, 38(1991), 353–360.
- [5] Stenger, F., Integration formula based on the trapezoidal formula, *J. of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 12(1973), 103–114.
- [6] Takahasi, H. and Mori, M., Double exponential formula for numerical integration, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 9(1974), 121–141.
- [7] Watson, G., N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London, 1944.