

## 右辺項の工夫によるポアソン方程式の 高次精度差分公式について

広島市立大学情報科学部 竹内 敏己 (Toshiki Takeuchi)

広島市立大学情報科学部 藤野 清次 (Seiji Fujino)

### 1 はじめに

高次精度の差分公式については、今まで多くの研究がなされてきた [1], [3], [9], [10] [15], [17], [21]. 特に、流体解析の分野では現在も盛んに研究されている [4], [11], [16]. 一般に、高次精度の差分公式の導出は、方程式の離散化のときに使う格子点の数を増やして精度を向上させる、という考え方に基づいて行なわれるものが多い。このようにして導き出された高次精度の差分公式は、差分公式を構成する格子点数を増加させればさせる程必然的に精度は高くなる一方で、左辺の係数行列の非零要素が増えるにしたがって演算量が増加し、さらに領域の境界付近の点の取り扱いが非常に煩雑になるなど実際的でない点も多い。

一方、ポアソン方程式に対して、左辺の離散化で用いる格子点の数を出来るだけ少なくして差分公式の精度を上げる方法を R.E. Lynch が文献 [13] で提唱した。具体的には、2次元の  $x, y$  方向の格子間隔が等しい場合に、周囲の 8 点を使う 4 次精度の差分公式の剰余項に着目し、そして方程式の右辺項を利用してそれを消去し、精度を 6 次まで高めるという方法である。この元となる 4 次精度の差分公式自体は、文献 [8] に記述が見られるように古くから知られ、いろいろな文献 [6], [17], [18] で取り上げられてきた。したがって、Lynch の発想自体は特別新しいものではない。

しかし、Lynch (文献 [12], [13], [14]) の考え方の真価は、格子点と格子点の間に位置する補助的な点を使って、従来の公式になかった簡潔な形の高次精度の公式を考案した点にある。これにより領域の境界近傍の点が非常に簡単に処理できるようになった。また、これらの差分公式は、HODIE method (High Order Difference approximation via Identity Expansions の略) という名称で上に列記した多くの文献で引用されその有用さは広く知られている。ただし、上の Lynch の文献では、(i) 3次元の 4 次精度、6 次精度の差分公式がそれぞれ一つだけしか記述されていないこと、(ii) 8 次精度の差分公式に対する考察が不足していること、(iii) 計算機による実験が少なく計算機への実装に対する考察が不十分であること、など明らかにすべき事柄も多く、研究はその後も行なわれている [5], [20].

そこで、本研究の目的は、3次元ポアソン方程式の右辺項を利用して精度を高める Lynch 流の差分公式の (a) 種々のバリエーションを研究/評価し、(b) ベクトル計算機向きの差分公式を提案することにある。さらに、(c) Lynch 流の考え方で到達できる最高次数は 6 次精度までで、8 次精度の差分公式は理論的にできないことを明らかにする。

本論文は以下のような構成になっている。まず、第 2 章では、3次元の 4 次および 6 次精度の差分公式を導出する。第 3 章では、8 次精度の差分公式の導出が不可能なことを理論的に明らかにする。そして第 4 章では、本研究で得られた差分公式に対する

数値実験結果を報告し、新しく提案した4次精度の差分公式がベクトル計算機向きの公式であることを確かめる。最後に簡単なまとめをおこなう。

## 2 ポアソン方程式に対する2次,4次,6次精度の差分公式

### 2.1 問題設定

本研究では、単位立方体： $I (= [0, 1]^3)$ におけるポアソン方程式を扱う。すなわち、 $I$ の内部 ( $= (0, 1)^3$ ) およびその境界  $\partial I$  において、次のような境界値問題を考える。

$$\Delta u = f \quad \text{in } I \quad (2.1)$$

$$u = g \quad \text{on } \partial I \quad (2.2)$$

ここで、 $\Delta u$  は  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \left( = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$  を表す。

### 2.2 解析領域の分割と格子について

本研究では、単位超立方体： $I (= [0, 1]^3)$ 上の各辺を  $h = 1/N$  刻みで  $N$ 等分した格子を用いる。そのとき、 $I$ の内部 ( $= (0, 1)^3$ )の格子点の座標は、 $(ih, jh, kh)$ , ( $1 \leq i, j, k \leq N-1$ )と書ける。

### 2.3 シングルセルと差分公式

ここでは、シングルセル<sup>[9]</sup>内の27個の格子点を使って差分公式を構成する。ここでシングルセルとは、Fig. 1に示した領域： $[(i-1)h, (i+1)h] \times [(j-1)h, (j+1)h] \times [(k-1)h, (k+1)h]$ をさす。また、本論文を通して  $u(ih, jh, kh) = u$ ,  $f(ih, jh, kh) = f$ と略記する。以下のように、中心点  $(ih, jh, kh)$ からの距離が  $\sqrt{m}h$  ( $m = 1, 2, 3$ )である点における関数  $u$ の和を  $\sum_{\sqrt{m}} u$ という記法で表す。すなわち、

$$\begin{aligned} \sum_1 u &= \sum_{\pm} u(ih \pm h, jh, kh) + \sum_{\pm} u(ih, jh \pm h, kh) \\ &\quad + \sum_{\pm} u(ih, jh, kh \pm h), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{2}} u &= \sum_{\pm} u(ih \pm h, jh \pm h, kh) + \sum_{\pm} u(ih, jh \pm h, kh \pm h) \\ &\quad + \sum_{\pm} u(ih \pm h, jh, kh \pm h), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\sum_{\sqrt{3}} u = \sum_{\pm} u(ih \pm h, jh \pm h, kh \pm h) \quad (2.5)$$

と定義する。ここで、記法： $\sum_{\pm}$ は、式中に現れる記号 $\pm$ について、符合が+のときの式と同じく符合が-のときの式の和をとることを意味する。また、記法： $\sum_{\sqrt{m}} u$ と同じ意味で、ポアソン方程式の右辺項  $f$ についても、記法： $\sum_1 f, \sum_{\sqrt{2}} f, \sum_{\sqrt{3}} f$ を使う。Fig. 1に、 $\sum_1, \sum_{\sqrt{2}}, \sum_{\sqrt{3}}$ で使用する格子点をそれぞれ○印、●印そして◎印で示す。 $\sum_1 u, \sum_{\sqrt{2}} u, \sum_{\sqrt{3}} u$ で使用する格子点数はそれぞれ6点、12点、8点になる。

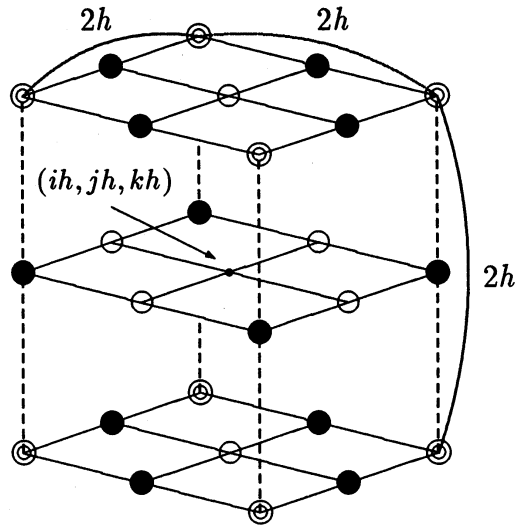


Fig. 1. Three groups of gridpoints at a distance of  $\sqrt{m}h$  ( $m = 1, 2, 3$ ) from the central point  $(ih, jh, kh)$  in a single cell.

## 2.4 Taylor 展開による $\sum_m u$ の近似式

ここでは, Taylor 展開を利用して  $\sum_{\sqrt{m}} u$  ( $m = 1, 2, 3$ ) に対する近似式を求める. まず, 点  $(ih, jh, kh)$  を中心とする Taylor 展開から,

$$\begin{aligned} u(ih \pm h, jh, kh) &= u + \frac{h}{1!} \left( \pm \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \dots \\ &+ \frac{h^2}{2!} \left( \pm \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u + O(h^3), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} u(ih \pm h, jh \pm h, kh) &= u + \frac{h}{1!} \left( \pm \frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \dots \\ &+ \frac{h^2}{2!} \left( \pm \frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u + O(h^3), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} u(ih \pm h, jh \pm h, kh \pm h) &= u + \frac{h}{1!} \left( \pm \frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{\partial}{\partial y} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right) u + \dots \\ &+ \frac{h^2}{2!} \left( \pm \frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{\partial}{\partial y} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u + O(h^3) \end{aligned} \quad (2.8)$$

が得られる. これらの公式を使うと,  $\sum_{\sqrt{m}} u$  ( $m = 1, 2, 3$ ) に対する 10 次精度の近似式が次のように導ける (以下では, 式の簡素化のため  $X = xx, Y = yy, Z = zz$  と略記する).

$$\begin{aligned} \sum_1 u &= 6u + h^2(u_x + u_y + u_z) + \frac{h^4}{12}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ &+ \frac{h^6}{360}(u_{xxx} + u_{yyy} + u_{zzz}) \end{aligned}$$

$$+\frac{h^8}{20160}(u_{xxxx} + u_{yyyy} + u_{zzzz}) + O(h^{10}), \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\sqrt{2}}u &= 12u + 4h^2(u_x + u_y + u_z) + \frac{h^4}{3}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ &+ h^4(u_{xy} + u_{yz} + u_{zx}) + \frac{h^6}{90}(u_{xxx} + u_{yyy} + u_{zzz}) \\ &+ \frac{h^6}{12}(u_{xxy} + u_{xyy} + u_{yyz} + u_{yzz} + u_{zxx} + u_{zzx}) \\ &+ \frac{h^8}{5040}(u_{xxxx} + u_{yyyy} + u_{zzzz}) \\ &+ \frac{h^8}{360}(u_{xxyy} + u_{xyyy} + u_{yyyz} + u_{yzzz} + u_{zzzx} + u_{zxxy}) \\ &+ \frac{h^8}{144}(u_{xxyy} + u_{yyzz} + u_{zzxx}) + O(h^{10}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\sqrt{3}}u &= 8u + 4h^2(u_x + u_y + u_z) + \frac{h^4}{3}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ &+ 2h^4(u_{xy} + u_{yz} + u_{zx}) + \frac{h^6}{90}(u_{xxx} + u_{yyy} + u_{zzz}) \\ &+ \frac{h^6}{6}(u_{xxy} + u_{xyy} + u_{yyz} + u_{yzz} + u_{zxx} + u_{zzx}) + h^6u_{xyz} \\ &+ \frac{h^8}{5040}(u_{xxxx} + u_{yyyy} + u_{zzzz}) \\ &+ \frac{h^8}{180}(u_{xxyy} + u_{xyyy} + u_{yyyz} + u_{yzzz} + u_{zzzx} + u_{zxxy}) \\ &+ \frac{h^8}{72}(u_{xxyy} + u_{yyzz} + u_{zzxx}) \\ &+ \frac{h^8}{12}(u_{xxyz} + u_{yyzx} + u_{zzxy}) + O(h^{10}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

## 2.5 ポアソン方程式に対する 2 次精度差分公式の導出

ポアソン方程式  $\Delta u = f$  に対する 2 次精度差分公式を,  $\Sigma_{\sqrt{m}}u (m = 1, 2, 3)$  に対する次の 4 次精度の近似式を使って導く. これらの近似式は前節の (2.9), (2.10), (2.11) 式より得られる.

$$\begin{aligned} \Sigma_1 u &= 6u + h^2(u_x + u_y + u_z) + O(h^4) \\ &= 6u + h^2\Delta u + O(h^4), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\sqrt{2}}u &= 12u + 4h^2(u_x + u_y + u_z) + O(h^4) \\ &= 12u + 4h^2\Delta u + O(h^4), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\sqrt{3}}u &= 8u + 4h^2(u_x + u_y + u_z) + O(h^4) \\ &= 8u + 4h^2\Delta u + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここで、関係式  $u_x + u_y + u_z = f$  を使い、 $u$  に関する項を左辺に移行すると、ポアソン方程式  $\Delta u = f$  に対するよく知られた次の 2 次精度差分公式が得られる。

$$\frac{1}{h^2} (\sum_1 u - 6u) = f + O(h^2), \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{h^2} (\sum_{\sqrt{2}} u - 12u) = 4f + O(h^2), \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{h^2} (\sum_{\sqrt{3}} u - 8u) = 4f + O(h^2). \quad (2.17)$$

各々の公式において、左辺の離散化で使用する格子点数は、(2.15) 式が 7 点、(2.16) 式が 13 点、(2.17) 式が 9 点であり、右辺の離散化で使用する格子点数はただ 1 点である。

## 2.6 ポアソン方程式に対する 4 次精度差分公式の導出

ポアソン方程式  $\Delta u = f$  に対する 4 次精度差分公式を、 $\sum_{\sqrt{m}} u (m = 1, 2, 3)$  に対する次の 6 次精度の近似式を使って導く。これらの近似式は、同様に (2.9), (2.10), (2.11) 式より得られる。

$$\sum_1 u = 6u + h^2(u_x + u_y + u_z) + \frac{h^4}{12}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + O(h^6), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{2}} u &= 12u + 4h^2(u_x + u_y + u_z) + \frac{h^4}{3}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ &\quad + h^4(u_{xy} + u_{yz} + u_{zx}) + O(h^6), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{3}} u &= 8u + 4h^2(u_x + u_y + u_z) + \frac{h^4}{3}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ &\quad + 2h^4(u_{xy} + u_{yz} + u_{zx}) + O(h^6). \end{aligned} \quad (2.20)$$

ポアソン方程式に対する差分公式を導くためには、右辺に現れる  $u$  の偏微分の項を、 $u$  と  $f$  に関する関係式を使って消去しなければならない。具体的にはポアソン方程式から導かれる次の関係式を使う。

$$u_x + u_y + u_z = f, \quad (2.21)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_{yz} + 2u_{zx} = f_x + f_y + f_z. \quad (2.22)$$

(2.18), (2.19), (2.20) 式のうち二つの式を組み合わせると、(2.22) 式の左辺の形が現れるようにする。ここでは、次の三つの場合に分けて考える。

(a) 近似式 (2.18), (2.19) を使った場合。

$$\begin{aligned} 2\sum_1 u + \sum_{\sqrt{2}} u &= 24u + 6h^2(u_x + u_y + u_z) \\ &\quad + \frac{h^4}{2}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_{yz} + 2u_{zx}) + O(h^6). \end{aligned}$$

(b) 近似式 (2.18), (2.20) を使った場合。

$$\begin{aligned} 8\sum_1 u + \sum_{\sqrt{3}} u &= 56u + 12h^2(u_x + u_y + u_z) \\ &\quad + h^4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_{yz} + 2u_{zx}) + O(h^6). \end{aligned}$$

(c) 近似式 (2.19),(2.20) を使った場合.

$$4\sum_{\sqrt{2}}u - \sum_{\sqrt{3}}u = 40u + 12h^2(u_x + u_y + u_z) + h^4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_{yz} + 2u_{zx}) + O(h^6).$$

これらの式に対して, (2.21), (2.22) 式および  $f_x + f_y + f_z$  の 2 次精度の近似式である

$$f_x + f_y + f_z = \frac{1}{h^2}(\sum_1 f - 6f) + O(h^2) \quad (2.23)$$

を使えば, ポアソン方程式  $\Delta u = f$  に対する次の 4 次精度差分公式が得られる.

(a) 近似式 (2.18),(2.19) を使った場合 (Lynch の文献 [13] による).

$$\frac{1}{3h^2} (2\sum_1 u + \sum_{\sqrt{2}} u - 24u) = f + \frac{1}{6}\sum_1 f + O(h^4). \quad (2.24)$$

(b) 近似式 (2.18),(2.20) を使った場合.

$$\frac{1}{6h^2} (8\sum_1 u + \sum_{\sqrt{3}} u - 56u) = f + \frac{1}{6}\sum_1 f + O(h^4). \quad (2.25)$$

(c) 近似式 (2.19),(2.20) を使った場合.

$$\frac{1}{6h^2} (4\sum_{\sqrt{2}} u - \sum_{\sqrt{3}} u - 40u) = f + \frac{1}{6}\sum_1 f + O(h^4). \quad (2.26)$$

それぞれの公式において, 左辺の離散化で使用する格子点数は, (2.24) 式が 19 点, (2.25) 式が 15 点, (2.26) 式が 21 点になる. 一方, 右辺の離散化で使う格子点数は 1 点だけでなくいずれも 7 点使っている. これらの公式をベクトル計算機で使うときは, 後述の第 2.8 章 [IC 分解のベクトル化について] を参照のこと.

## 2.7 ポアソン方程式に対する 6 次精度差分公式の導出

ポアソン方程式  $\Delta u = f$  に対する 6 次精度差分公式を,  $\sum_{\sqrt{m}} u (m = 1, 2, 3)$  に対する次の 8 次精度の近似式を使って導く. これらの近似式は, 同様に (2.9), (2.10), (2.11) 式より得られる.

$$\begin{aligned} \sum_1 u &= 6u + h^2(u_x + u_y + u_z) + \frac{h^4}{12}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ &\quad + \frac{h^6}{360}(u_{xxx} + u_{yyy} + u_{zzz}) + O(h^8), \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{2}} u &= 12u + 4h^2(u_x + u_y + u_z) + \frac{h^4}{3}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ &\quad + h^4(u_{xy} + u_{yz} + u_{zx}) + \frac{h^6}{90}(u_{xxx} + u_{yyy} + u_{zzz}) \\ &\quad + \frac{h^6}{12}(u_{xxy} + u_{xyy} + u_{yyz} + u_{yzz} + u_{zxx} + u_{zxx}) + O(h^8), \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\sqrt{3}}u &= 8u + 4h^2(u_x + u_y + u_z) + \frac{h^4}{3}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\
&\quad + 2h^4(u_{xy} + u_{yz} + u_{zx}) + \frac{h^6}{90}(u_{xxx} + u_{yyy} + u_{zzz}) \\
&\quad + \frac{h^6}{6}(u_{xxy} + u_{xyy} + u_{yyz} + u_{yzz} + u_{zxx} + u_{zzx}) \\
&\quad + h^6 u_{xyz} + O(h^8). \tag{2.29}
\end{aligned}$$

ポアソン方程式に対する差分公式を導くためには、前節で4次精度差分公式を導いたときと同じように、右辺に現れる  $u$  の偏微分の項を関係式  $u_x + u_y + u_z = f$  を使って消去しなければならない。

ここでは、 $u$  の偏微分の項を消去するための必要十分条件を求める。そのため、(2.27), (2.28), (2.29) 式にそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  なる重みをつけた次式を考える。

$$\begin{aligned}
\alpha \Sigma_1 u + \beta \Sigma_{\sqrt{2}} u + \gamma \Sigma_{\sqrt{3}} u &= \\
&\quad (6\alpha + 12\beta + 8\gamma)u + h^2(\alpha + 4\beta + 4\gamma)(u_x + u_y + u_z) \\
&\quad + h^4 \left( \frac{\alpha}{12} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3} \right) (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + h^4(\beta + 2\gamma)(u_{xy} + u_{yz} + u_{zx}) \\
&\quad + h^6 \left( \frac{\alpha}{360} + \frac{\beta}{90} + \frac{\gamma}{90} \right) (u_{xxx} + u_{yyy} + u_{zzz}) \\
&\quad + h^6 \left( \frac{\beta}{12} + \frac{\gamma}{6} \right) (u_{xxy} + u_{xyy} + u_{yyz} + u_{yzz} + u_{zxx} + u_{zzx}) \\
&\quad + h^6 \gamma u_{xyz} + O(h^8). \tag{2.30}
\end{aligned}$$

まず、(2.30) 式の右辺の第2項の  $u$  の2階偏微分の項は(2.21)式を使って消去可能である。次に、第3, 4項の  $u$  の4階偏微分の項を(2.22)式を使って消去するためには、

$$2 \left( \frac{\alpha}{12} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3} \right) = \beta + 2\gamma \tag{2.31}$$

が必要条件となる。仮に、第5, 6, 7項の  $u$  の6階偏微分の項が(2.21)式を使って消去できたとすると、 $X, Y, Z$  に対する対称性により、変数  $a, b$  を使って次のように置くことが出来る。

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{\alpha}{360} + \frac{\beta}{90} + \frac{\gamma}{90} \right) (u_{xxx} + u_{yyy} + u_{zzz}) \\
&\quad + \left( \frac{\beta}{12} + \frac{\gamma}{6} \right) (u_{xxy} + u_{xyy} + u_{yyz} + u_{yzz} + u_{zxx} + u_{zzx}) + \gamma u_{xyz} \\
&= a(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + b(f_{xy} + f_{yz} + f_{zx}). \tag{2.32}
\end{aligned}$$

この(2.32)式の右辺は、(2.21)式を使うと、

$$\begin{aligned}
&a(u_{xxx} + u_{yyy} + u_{zzz}) \\
&\quad + (a + b)(u_{xxy} + u_{xyy} + u_{yyz} + u_{yzz} + u_{zxx} + u_{zzx}) + 3b u_{xyz} \tag{2.33}
\end{aligned}$$

となる。これより、次の関係式が導かれる。

$$a = \frac{\alpha}{360} + \frac{\beta}{90} + \frac{\gamma}{90}, \quad (2.34)$$

$$a + b = \frac{\beta}{12} + \frac{\gamma}{6}, \quad (2.35)$$

$$3b = \gamma. \quad (2.36)$$

(2.31), (2.34), (2.35), (2.36) 式の四つの式が, (2.30) 式の右辺に現れた  $u$  の偏微分の項を全て消去するための必要十分条件である。これらの四つの式を  $\alpha, \beta, \gamma$  に関して連立して解くと,  $t$  を 0 以外の任意のパラメータとして次の解が得られる。

$$\alpha = 14t, \beta = 3t, \gamma = t.$$

これより, ポアソン方程式の 6 次精度の差分公式では, シングルセル内の 27 個の格子点すべてが左辺の離散化で必要になることがわかる。ここで,  $t = 1$  とおいて (2.30) 式の右辺の  $u$  を消去した式を計算すると,

$$\begin{aligned} & 14\sum_1 u + 3\sum_{\sqrt{2}} u + \sum_{\sqrt{3}} u \\ &= 128u + 30h^2 f + \frac{5}{2}h^4(f_x + f_y + f_z) \\ & \quad + \frac{1}{12}h^6(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + \frac{1}{3}h^6(f_{xy} + f_{yz} + f_{zx}) + O(h^8) \end{aligned} \quad (2.37)$$

となり, ポアソン方程式に対する次の 6 次精度の差分近似式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{30h^2} (14\sum_1 u + 3\sum_{\sqrt{2}} u + \sum_{\sqrt{3}} u - 128u) \\ &= f + \frac{h^2}{12}(f_x + f_y + f_z) + \frac{h^4}{360}(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) \\ & \quad + \frac{h^4}{90}(f_{xy} + f_{yz} + f_{zx}) + O(h^6). \end{aligned} \quad (2.38)$$

### 2.7.1 中間点の $f$ を使った 6 次精度差分公式の実現

さて, ポアソン方程式の 6 次精度の差分公式を得るためには, (2.38) 式の右辺項を 6 次精度で離散化しなければならない。そのためには, シングルセル内の 27 個の格子点における関数  $f$  の値だけでは不可能であり, 格子点以外での関数  $f$  の値が必要である。そこで, シングルセル内のいま考えている対象点からの距離が  $h, \sqrt{2}h, \sqrt{3}h$  となる 27 個の格子点の外に, 格子点と格子点の中間の点 (対象点からの距離が  $\frac{1}{2}h, \frac{\sqrt{2}}{2}h, \frac{\sqrt{3}}{2}h$  となる) での関数  $f$  の値を使った公式を導く。格子点と格子点の中間の点における  $f$  の値に対しても, 格子点での  $f$  の値の場合と同じく次のような記法を用いる。

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{1}{2}} f &= \sum_{\pm} f(ih \pm \frac{1}{2}h, jh, kh) + \sum_{\pm} f(ih, jh \pm \frac{1}{2}h, kh) \\ & \quad + \sum_{\pm} f(ih, jh, kh \pm \frac{1}{2}h), \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{\sqrt{2}}{2}} f &= \sum_{\pm} f(ih \pm \frac{1}{2}h, jh \pm \frac{1}{2}h, kh) + \sum_{\pm} f(ih, jh \pm \frac{1}{2}h, kh \pm \frac{1}{2}h) \\ & \quad + \sum_{\pm} f(ih \pm \frac{1}{2}h, jh, kh \pm \frac{1}{2}h), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\sum_{\frac{\sqrt{3}}{2}} f = \sum_{\pm} f(ih \pm \frac{1}{2}h, jh \pm \frac{1}{2}h, kh \pm \frac{1}{2}h). \quad (2.41)$$



(2.38) 式の右辺の離散化のために、次の式を用いる。

$$\sum_1 f = 6f + h^2(f_x + f_y + f_z) + \frac{h^4}{12}(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + O(h^6), \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{2}} f &= 12f + 4h^2(f_x + f_y + f_z) \\ &\quad + \frac{h^4}{3}(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + h^4(f_{xy} + f_{yz} + f_{zx}) + O(h^6), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{3}} f &= 8f + 4h^2(f_x + f_y + f_z) \\ &\quad + \frac{h^4}{3}(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + 2h^4(f_{xy} + f_{yz} + f_{zx}) + O(h^6), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\sum_{\frac{1}{2}} f = 6f + \frac{h^2}{4}(f_x + f_y + f_z) + \frac{h^4}{192}(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + O(h^6), \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{\sqrt{2}}{2}} f &= 12f + h^2(f_x + f_y + f_z) \\ &\quad + \frac{h^4}{48}(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + \frac{h^4}{16}(f_{xy} + f_{yz} + f_{zx}) + O(h^6), \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{\sqrt{3}}{2}} f &= 8f + h^2(f_x + f_y + f_z) \\ &\quad + \frac{h^4}{48}(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) + \frac{h^4}{8}(f_{xy} + f_{yz} + f_{zx}) + O(h^6). \end{aligned} \quad (2.47)$$

(2.42)~(2.47) 式のうち (2.42), (2.43), (2.44) 式の中から二つの式と (2.45), (2.46), (2.47) 式の中から一つの式を選んだ 9 通りの組み合わせにより、3 次元ポアソン方程式に対する 9 通りの公式が導出できる。それぞれの公式はいろいろな応用分野で幅広い使い道があると思われる [16]。Table 1 に 9 通りの差分公式を示す。ただし、表中の  $a_1, \dots, a_7$  の欄は、差分公式を

$$\begin{aligned} &\frac{1}{30h^2} (14\sum_1 u + 3\sum_{\sqrt{2}} u + \sum_{\sqrt{3}} u - 128u) \\ &= a_1 \sum_1 f + a_2 \sum_{\sqrt{2}} f + a_3 \sum_{\sqrt{3}} f + a_4 \sum_{\frac{1}{2}} f + a_5 \sum_{\frac{\sqrt{2}}{2}} f + a_6 \sum_{\frac{\sqrt{3}}{2}} f + a_7 f \end{aligned} \quad (2.48)$$

と表わしたときの係数の値を表す。

Table 1. Coefficients of the right-hand side of discretized equation: (2.48).

差分公式	係数 (格子点)			係数 (中間点)			
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
(i)	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{90}$		$\frac{4}{15}$			$-\frac{17}{30}$
(ii)	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{144}$			$\frac{1}{15}$		$\frac{11}{60}$
(iii)	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{360}$				$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$
Lynch(iv)	$-\frac{1}{180}$		$\frac{1}{180}$	$\frac{4}{15}$			$-\frac{11}{18}$
(v)	$\frac{1}{360}$		$\frac{1}{288}$		$\frac{1}{15}$		$\frac{7}{45}$
(vi)	$\frac{1}{90}$		$\frac{1}{720}$			$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{18}$
(vii)		$-\frac{1}{360}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{4}{15}$			$-\frac{28}{45}$
(viii)		$\frac{1}{720}$	$\frac{1}{360}$		$\frac{1}{15}$		$\frac{29}{180}$
(ix)		$\frac{1}{180}$	$-\frac{1}{720}$			$\frac{1}{15}$	$\frac{37}{90}$

## 2.8 IC 分解のベクトル化について

ICCG 法で連立 1 次方程式を解くとき、IC 分解のベクトル化はいわゆる超平面法で行なった [7]。そこで、計算効率を考えるために、三つの 4 次精度差分公式:(2.24), (2.25), (2.26) および 6 次精度差分公式:(2.48) において、方程式の左辺の離散化で使われる格子点数および超平面の数を下のようにとまとめた。

差分公式	左辺の格子点数	超平面の数
(2.24) 式	19 点	$6N - 5$
(2.25) 式	15 点	$5N - 4$
(2.26) 式	21 点	$7N - 6$
6 次精度公式	27 点	$7N - 6$

これからわかるように、4 次精度公式の中で (2.26) 式は、(2.24), (2.25) 式に比べて、左辺の離散化で使う格子点数も超平面の数も多いので効率がよくないと予想される。事実、実際の数値実験でも他の二つに比べて効率がよくなかった。また、次節で示す通り、(2.26) 式は、(2.24), (2.25) 式に比べて、係数行列の条件数が大きく、数値的に解きにくいことが予想される。したがって、第 4 章の表から (2.26) 式の数値実験結果は省略した。

## 2.9 係数行列の条件数について

ここでは、前節でとりあげた四つの精度公式について、その係数行列の理論的な性質を調べる。具体的には、連立一次方程式の解き易さの指針となる、係数行列の条件数を求めた [19]。下に、それぞれの公式の係数行列の条件数、 $N \rightarrow \infty$  のときの評価式、 $N = 100$  のときの条件数を示す。なお、公式 (2.26) の場合は、最小固有値が負となり、 $\cos \frac{\pi}{N}$  を使った式では表すことができない。

差分公式	条件数	$N \rightarrow \infty$	$N=100$
(2.24) 式	$\frac{6 + \cos \frac{\pi}{N} + \cos^2 \frac{\pi}{N}}{6 - 3 \cos \frac{\pi}{N} - 3 \cos^2 \frac{\pi}{N}}$	$\sim \frac{16N^2}{9\pi^2}$	1801
(2.25) 式	$\frac{7 + 6 \cos \frac{\pi}{N} + \cos^3 \frac{\pi}{N}}{7 - 6 \cos \frac{\pi}{N} - \cos^3 \frac{\pi}{N}}$	$\sim \frac{28N^2}{9\pi^2}$	3152
(2.26) 式	—	—	38205
6 次精度公式	$\frac{32 + 21 \cos \frac{\pi}{N} - 9 \cos^2 \frac{\pi}{N} + 2 \cos^3 \frac{\pi}{N}}{32 - 21 \cos \frac{\pi}{N} - 9 \cos^2 \frac{\pi}{N} - 2 \cos^3 \frac{\pi}{N}}$	$\sim \frac{92N^2}{45\pi^2}$	2072

## 3 8 次精度差分公式の実現性の検討

ここでは、ポアソン方程式に対する 8 次精度差分公式の実現について検討する。8 次精度差分公式を得るためには、 $\sum_{\sqrt{m}} u(m=1, 2, 3)$  に対する 10 次精度の近似式であ

る (2.9), (2.10), (2.11) 式を使う必要がある。以下では、前章のときと同様に、(2.38) 式において、左辺を 8 次の項まで展開した次の式を考える。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{30h^2} (14\sum_1 u + 3\sum_{\sqrt{2}} u + \sum_{\sqrt{3}} u - 128u) \\
&= f + \frac{h^2}{12}(f_x + f_y + f_z) + \frac{h^4}{360}(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}) \\
&\quad + \frac{h^4}{90}(f_{xy} + f_{yz} + f_{zx}) \\
&\quad + \frac{h^6}{20160}(u_{xxxx} + u_{yyyy} + u_{zzzz}) \\
&\quad + \frac{h^6}{2160}(u_{xxxY} + u_{xYyy} + u_{YyyZ} + u_{Yzzz} + u_{zzzX} + u_{zxxx}) \\
&\quad + \frac{h^6}{864}(u_{xxyY} + u_{yYzz} + u_{zzxx}) \\
&\quad + \frac{h^6}{360}(u_{xxyZ} + u_{yYzx} + u_{zzxy}) + O(h^8). \tag{3.49}
\end{aligned}$$

ポアソン方程式に対する 8 次精度差分公式を得るためには、上の式の右辺の  $u$  の偏微分に関する項を、関係式  $u_x + u_y + u_z = f$  を使って全て消去しなければならない。消去した後の式は、 $X, Y, Z$  の対称性より変数  $a, b, c$  を使って次のように書ける。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{20160}(u_{xxxx} + u_{yyyy} + u_{zzzz}) \\
&\quad + \frac{1}{2160}(u_{xxxY} + u_{xYyy} + u_{YyyZ} + u_{Yzzz} + u_{zzzX} + u_{zxxx}) \\
&\quad + \frac{1}{864}(u_{xxyY} + u_{yYzz} + u_{zzxx}) + \frac{1}{360}(u_{xxyY} + u_{yYzz} + u_{zzxx}) \\
&= a(f_{xxx} + f_{yyy} + f_{zzz}) \\
&\quad + b(f_{xxy} + f_{xyy} + f_{yyz} + f_{yzz} + f_{zxx} + f_{zzx}) + cf_{xyz} \\
&= a(u_{xxxx} + u_{yyyy} + u_{zzzz}) \\
&\quad + (a+b)(u_{xxxY} + u_{xYyy} + u_{YyyZ} + u_{Yzzz} + u_{zzzX} + u_{zxxx}) \\
&\quad + 2b(u_{xxyY} + u_{yYzz} + u_{zzxx}) \\
&\quad + (2b+c)(u_{xxyZ} + u_{yYzx} + u_{zzxy}). \tag{3.50}
\end{aligned}$$

これより、

$$a = \frac{1}{20160}, \quad a + b = \frac{1}{2160}, \quad 2b = \frac{1}{864}, \quad 2b + c = \frac{1}{360}$$

なる四つの式が得られるが、これは解を持たない。したがって、Lynch 流の右辺項を修正し精度を上げる方法では、3 次元ポアソン方程式に対する 8 次精度差分公式の導出が不可能であることがわかった。

## 4 数値実験

### 4.1 4次精度差分公式の性能評価

ここでは、ポアソン方程式:  $\Delta u = f$  を離散化して得られる連立1次方程式を ICCG 法で解いた。また、不完全 Cholesky 分解のベクトル化は超平面法で行なった。反復計算の収束判定は相対残差  $L_2$  ノルムが  $10^{-12}$  以下で行ない、計算は全て倍精度演算で行なった。右辺項  $f$  は下に示す厳密解が  $u_1$  または  $u_2$  になるように定めた。解析領域と格子間隔は、(i)  $N_x = N_y = N_z$  のときは単位立方体  $[0, 1]^3$  で格子間隔は  $h = \frac{1}{N_x-1} = \frac{1}{N_y-1} = \frac{1}{N_z-1}$  とした。(ii) それ以外のときは、格子間隔はすべて同じ  $\frac{1}{39}$  とし、解析領域は大きさが  $\frac{N_x-1}{39} \times \frac{N_y-1}{39} \times \frac{N_z-1}{39}$  の直方体にした。ここで、 $N_x, N_y, N_z$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の格子点数を表す。境界条件は全周 Dirichlet 条件を課した。使用計算機は、ドイツ Karlsruhe 大学 Numerikforschung für Supercomputer の Siemens S-600 (Fujitsu VP-2600) である。4次精度の差分公式は本研究で求めた (2.25) 式および Lynch による (2.24) 式の性能を評価した。以下の Table 2 から Table 4 では、15 点の欄は (2.25) 式の結果を、19 点  $Lynch$  の欄は (2.24) 式の結果をそれぞれ表している。

$$\text{厳密解 } u_1 : u_1(x, y, z) = \sin(\pi x) + \sin(\pi y) + \sin(\pi z)$$

$$\text{厳密解 } u_2 : u_2(x, y, z) = e^{x+y+z}$$

Table 2 に通常の2次精度および4次精度の各差分公式の最大誤差を示す。厳密解は  $u_1$  とする。各行の下段の括弧内の数字は最上段の結果を1.0としたときの比率である。格子間隔が  $1/2$  になるにしたがって誤差がそれぞれおよそ  $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$ ,  $\frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4$  になっていることがわかる。

Table 2. Maximum errors of the 2nd-order and 4th-order difference schemes for the equations with the exact solution  $u_1$ .

格子 点数	格子 間隔	2次精度	4次精度	
		通常の7点	15点	19点 $Lynch$
$5^3$	$\frac{1}{4}$	$6.77 \times 10^{-2}$ (1.0)	$2.26 \times 10^{-3}$ (1.0)	$2.28 \times 10^{-3}$ (1.0)
$9^3$	$\frac{1}{8}$	$1.77 \times 10^{-2}$ $(\frac{1}{3.83})$	$1.39 \times 10^{-4}$ $(\frac{1}{16.26})$	$1.39 \times 10^{-4}$ $(\frac{1}{16.40})$
$17^3$	$\frac{1}{16}$	$4.47 \times 10^{-3}$ $(\frac{1}{3.89})^2$	$8.66 \times 10^{-6}$ $(\frac{1}{16.15})^2$	$8.66 \times 10^{-6}$ $(\frac{1}{16.23})^2$

Table 3(a),(b) に通常の2次精度の差分公式および4次精度の差分公式の最大誤差と  $L_2$  ノルムでの誤差を示す。本研究で提案した15点差分公式の誤差は、Lynch の19点差分公式のそれと同程度であることがわかる。

Table 3(a). Maximum errors of the 2nd-order and 4th-order difference schemes when the equation is solved by the ICCG method.

$N_x \times N_y \times N_z$	厳密解	2次精度	4次精度	
		通常の7点差分	15点	19点 <sup>Lynch</sup>
40 × 40 × 40	$u_1$	$7.53 \times 10^{-4}$	$2.45 \times 10^{-7}$	$2.45 \times 10^{-7}$
	$u_2$	$4.79 \times 10^{-5}$	$1.42 \times 10^{-8}$	$3.69 \times 10^{-9}$
80 × 40 × 20	$u_1$	$3.37 \times 10^{-4}$	$1.09 \times 10^{-7}$	$1.09 \times 10^{-7}$
	$u_2$	$4.97 \times 10^{-5}$	$1.48 \times 10^{-8}$	$3.84 \times 10^{-9}$
160 × 40 × 10	$u_1$	$7.91 \times 10^{-5}$	$2.57 \times 10^{-8}$	$2.57 \times 10^{-8}$
	$u_2$	$1.13 \times 10^{-4}$	$3.34 \times 10^{-8}$	$8.68 \times 10^{-9}$

Table 3(b). Error measured in  $L_2$ -norm of the 2nd-order and 4th-order difference schemes when the equation is solved by the ICCG method.

$N_x \times N_y \times N_z$	厳密解	2次精度	4次精度	
		通常の7点	15点	19点 <sup>Lynch</sup>
40 × 40 × 40	$u_1$	$3.56 \times 10^{-4}$	$9.74 \times 10^{-8}$	$9.74 \times 10^{-8}$
	$u_2$	$1.95 \times 10^{-5}$	$5.78 \times 10^{-9}$	$1.50 \times 10^{-9}$
80 × 40 × 20	$u_1$	$1.14 \times 10^{-4}$	$3.70 \times 10^{-8}$	$3.70 \times 10^{-8}$
	$u_2$	$1.67 \times 10^{-5}$	$4.96 \times 10^{-9}$	$1.29 \times 10^{-9}$
160 × 40 × 10	$u_1$	$2.70 \times 10^{-5}$	$8.76 \times 10^{-9}$	$8.76 \times 10^{-9}$
	$u_2$	$2.40 \times 10^{-5}$	$7.10 \times 10^{-9}$	$1.84 \times 10^{-9}$

Table 4 に収束までに要した ICCG 法の反復回数と CPU 時間 (sec) を示す。この表から、4 次精度の 15 点および 19 点差分公式に対する ICCG 法の反復回数は 7 点差分のときとほとんど変わらないこと、そして新たに提案した (a)15 点差分公式の方が (b)Lynch による 19 点差分公式より計算効率がよいことがわかる。この理由は、(a)の方が (b) よりも (i) 左辺の離散化で使う点が少ないこと、そして (ii) 超平面法でベクトル化したときベクトル長が長いためである。Table 4 に示した例では、格子点数 ( $N_x, N_y, N_z$ ) がそれぞれ (40, 40, 40), (80, 40, 20), (160, 40, 10) のとき、(a) の場合のベクトル長はそれぞれ 320, 356, 278 となり、(b) の場合のベクトル長 267, 291, 237 より長い。

Table 4. Iteration counts and CPU time (in seconds) of the ICCG method.

$N_x \times N_y \times N_z$	厳密解	2次精度	4次精度	
		通常の7点	15点	19点 <sup>Lynch</sup>
40 × 40 × 40	$u_1$	57回 (.508)	56回 (.712)	58回 (.831)
	$u_2$	64回 (.510)	64回 (.768)	63回 (.948)
80 × 40 × 20	$u_1$	68回 (.606)	62回 (.673)	59回 (.811)
	$u_2$	71回 (.511)	64回 (.732)	62回 (.831)
160 × 40 × 10	$u_1$	43回 (.397)	39回 (.370)	37回 (.541)
	$u_2$	43回 (.352)	40回 (.483)	38回 (.514)

#### 4.2 6次精度差分公式の性能評価

Table 5 に通常の 2 次精度および 6 次精度の各差分公式の最大誤差を示す。厳密解は  $u_1$  とする。差分公式は、Table 1 中の Lynch による公式 (vi) と提案した公式 (ii) の二つを表に載せた。各行の下段の括弧内の数字は最上段の結果を 1.0 としたときの比率である。格子間隔が  $1/2$  になるにしたがって誤差がそれぞれおよそ  $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$ ,  $\frac{1}{64} = (\frac{1}{2})^6$  になっていることがわかる。

Table 5. Maximum errors of the 2nd-order and 6th-order difference schemes for the equations with the exact solution  $u_1$ .

格子 点数	格子 間隔	2次精度	6次精度	
		通常の7点	公式(ii)	公式(vi) <sup>Lynch</sup>
5 <sup>3</sup>	$\frac{1}{4}$	$6.77 \times 10^{-2}$ (1.0)	$2.79 \times 10^{-6}$ (1.0)	$2.79 \times 10^{-6}$ (1.0)
9 <sup>3</sup>	$\frac{1}{8}$	$1.77 \times 10^{-2}$ $(\frac{1}{3.83})$	$4.26 \times 10^{-8}$ $(\frac{1}{65.5})$	$4.26 \times 10^{-8}$ $(\frac{1}{65.5})$
17 <sup>3</sup>	$\frac{1}{16}$	$4.47 \times 10^{-3}$ $(\frac{1}{3.89})^2$	$6.63 \times 10^{-10}$ $(\frac{1}{64.9})^2$	$6.63 \times 10^{-10}$ $(\frac{1}{64.9})^2$

提案した公式 (ii) と Lynch による公式 (vi) の最大誤差と  $L_2$  ノルムでの誤差を Table 6 に示す。下線を付けたところは公式 (vi) と比較して値が違うところである。また、表中の数字にすべて  $10^{-12}$  を掛けたものが実際の誤差である。その他の公式についても、Lynch の公式 (vi) の結果を 1.0 としたとき、厳密解  $u_1, u_2$  のどちらの場合も、最大誤差は  $0.9933 \sim 1.0084$ ,  $L_2$  ノルムでの誤差は  $0.99997 \sim 1.00012$  の範囲内に入っていた。以上のことから、新しく提案した差分公式の誤差は Lynch の公式 (vi) と同程度であることがわかる。ただし、格子点数は  $40^3$  とする。

Table 6. Maximum and  $L_2$ -norm errors of the 6th-order difference schemes when  $N_x=N_y=N_z=40$ .

差分公式	厳密解: $u_1$		厳密解: $u_2$		$(\times 10^{-12})$
	Max	L <sub>2</sub> -norm	Max	L <sub>2</sub> -norm	
公式 (vi) <sup>Lynch</sup>	7.6195	1.79931	59.4	17.317	
公式 (ii)	7.6192	1.79934	59.3	17.317	

Table 7 に収束までに要した ICCG 法の反復回数と CPU 時間 (sec) を示す. 格子点数は Table 6 と同じである. この表から, 6 次精度の差分公式を使ったときの ICCG 法の反復回数は 7 点差分のそれと同程度かわずかに少ないこと, そして本提案の公式 (ii) は Lynch による公式 (vi) と計算効率が同じであることがわかる. なお, Table 1 の残りの 7 種類の差分公式についてもほとんど同じ結果が得られた. この結果, 用途に応じた差分公式の選択が可能になった.

Table 7. Iteration counts and CPU time of the ICCG method for the 6th-order difference schemes.

$N_x \times N_y \times N_z$	厳密解	2 次精度		6 次精度	
		通常の 7 点		公式 (ii)	公式 (vi) <sup>Lynch</sup>
20 × 20 × 20	$u_1$	31 回 (.144)		31 回 (.203)	31 回 (.203)
	$u_2$	36 回 (.179)		33 回 (.214)	33 回 (.214)
40 × 40 × 40	$u_1$	59 回 (.422)		59 回 (.963)	59 回 (.963)
	$u_2$	66 回 (.435)		60 回 (1.03)	60 回 (1.03)
80 × 40 × 20	$u_1$	68 回 (.454)		61 回 (1.23)	61 回 (1.23)
	$u_2$	64 回 (.429)		56 回 (1.14)	56 回 (1.14)

## 5 まとめ

3次元ポアソン方程式に対する高次精度の差分公式について研究をおこなった. その結果, 従来は 4 次精度, 6 次精度それぞれ一つしか知られていなかった Lynch 流の差分公式を複数導出することができ, 応用面で拡張ができた. また, 4 次精度の 15 点差分公式はベクトル計算機向きの差分公式であることを数値実験で検証した. さらに, Lynch の方法では 8 次精度の差分公式はできないことを明らかにした.

## 参考文献

- [1] Ananthkrishnaiah U., Manohar R. and Stephenson J.W., High-Order Methods for Elliptic Equations With Variable Coefficients, Numerical Methods for P.D.E., 3(1987), 219-227.
- [2] Birkhoff G., Lynch R.E., Numerical Solution of Elliptic Problems, SIAM Publications, 1984.
- [3] Boisvert R.F., Families of High Order Accurate Discretizations of Some Elliptic Problems, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 2(1981), 268-284.
- [4] Canuto, C. et. al., Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1988.

- [5] Christara C.C., Parallel Computation of Partial Differential Equations on Distributed Memory Machines, *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations VII*, edited by Vichnevetsky R., 1992, 142-149.
- [6] Collatz L., *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, 1953, [English Translation] *The Numerical Treatment of Differential Equations*, Springer-Verlag, 1966.
- [7] Fujino S., Mori M. and Takeuchi T., Performance of hyperplane ordering on vector computers, *J. of Computational Applied Mathematics*, **38**(1991), 125-136.
- [8] Gerschgorin von S., Fehleraschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen, *Ztschr. f. angew. Math. und Mech.*, 1930, 373-382.
- [9] Gupta M.M., Manohar R.P. and Stephenson J.W., A Single Cell High Order Scheme for the Convection-Diffusion Equation with Variable Coefficients, **4**(1984), 641-651.
- [10] Houstis E.N., Vavalis E.A. and Rice J.R., Convergence of  $O(h^4)$  Cubic Spline Collocation Methods for Elliptic Partial Differential Equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **25**(1988), 54-74.
- [11] Lele S.K., Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution, *J. of Comp. Physics*, **103**(1992), 16-42.
- [12] Lynch R.E.,  $O(h^4)$  and  $O(h^6)$  Finite Difference Approximations to the Helmholtz Equation in  $n$ -dimensions, *Proceedings of the 4th IMACS International Conference on Partial Differential Equations*, 1984, 199-202.
- [13] Lynch R.E., Rice J.R., The Hodge method and its performance for solving elliptic partial differential equations, in *Recent Developments in Numerical Analysis*, edited by C. de Boor and G.H. Golub, Academic Press, 1978, 143-175.
- [14] Lynch R.E., Rice J.R., A high-order difference method for differential equations, *Math. Comp.*, **34**(1980), 333-372.
- [15] Manohar R., Stephenson J.W., High Order Difference Schemes for Linear Partial Differential Equations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **5**(1984), 69-77.
- [16] 岡本眞一, コンピュータ流体解析の基礎, (社)産業環境管理協会, 丸善, 1993.
- [17] Rosser J.B., Nine point difference solutions for Poisson's equation, *Comp. and Math. with Appls.*, **1**(1975), 351-360.
- [18] Smith G.D., *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods* (3rd edition), Oxford University Press, 1985.
- [19] 竹内敏己, 藤野清次,  $n$ 次元ポアソン方程式の差分離散化における係数行列の理論固有値解析, 日本応用数理学会平成6年度年会講演予稿集, 1994, pp.250-251.
- [20] Wong Y.S., Preconditioned Conjugate Gradient Methods Applied to Certain Symmetric Linear Systems, *Intern. J. Computer Math.*, **19**(1986), 177-200.
- [21] Young D.M., Dauwalder J.H., Discrete Representations of Partial Differential Operators, in *Error in Digital Computation*, Rall L., ed., Academic Press, New York, 1965, 181-207.