数理解析研究所講究録
921 巻 1995 年 95-103

拡張されたShellモデルと間欠性

東邦大・医・物理　齋藤善雄(Yoshio Saito)

大嶋　洋(Hiroshi Oshima)

中内紀彦(Norihiko Nakauchi)

1．はじめに

乱流のエネルギー散逸率は時間および空間の関数であり、その時間的および空間的構造が間欠的であることはよく知られており、実験的にも観測されている[1)]。これは、Kolmogorov[2)]以来の乱流に対するエネルギーカスケードの描像によれば、大きなスケールで系に加えられたエネルギーが乱流の非線形相互作用によってカスケード的に小さなスケールに流れ、この過程でエネルギーの空間的偏りが増幅されることによって生じたものと考えられる。

乱流のエネルギー散逸の間欠性を説明するために、対数正規分布モデルをはじめとしていくつかのモデル[3)]が提案されたが、ここではNovikovの尺度相似性仮説[4)]を取り上げる。いま、1次元的にエネルギー散逸の測定を行って、ある長さrの区間内で散逸されたエネルギーをE_rとする。より大きな長さlの区間内で散逸されたエネルギーE_lとの比

$$p_{r,l}=\frac{E_r}{E_l},\ 0\leq p_{r,l}\leq 1, \tag{1}$$

をここではBreakdown Coefficientと呼ぶ。Novikovは、Lを乱流の外部長さ、l_dを粘性長さとして、長さスケール l, s, r が $L>>l>s>r>>l_d$ のとき $p_{r,l}=p_{r,s}p_{s,l}$ であり、(1) $p_{r,s}$と$p_{s,l}$とは統計的に独立である、(2) $p_{r,l}$の確率分布はスケール比 l/r だけに依存する、という仮説を提案した。

本研究の目的は、乱流の空間的な間欠性を実現するような簡単なダイナミカル・カスケード・モデルを考案し、(1)エネルギー輸送のゆらぎとエネルギー散逸の間欠性との関係を調べること、および(2)エネルギー輸送における尺度相似性仮説を検証することである。

2．ダイナミカル・カスケード・モデル

ここで扱うモデルは波数空間を球殻(shell)状に分割し、さらに実空間をも分割するものである。もし解析的に扱うとすれば、Navier-Stokes方程式からwavelet変換等を用いてモデルを構成しなければならないところであるが、ここではエネルギー輸送にゆらぎを持つような簡単なモデルを考案する。

速度場を$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$、そのFourier係数を$\mathbf{v}(\mathbf{k},t)$とする。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathbf{v}(\mathbf{k},t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})d\mathbf{k}. \tag{2}$$

はじめに波数空間をshell

$$\Delta_n\equiv\left\{\mathbf{k}\,|\,2^{n-\frac{1}{2}}k_0<|\mathbf{k}|<2^{n+\frac{1}{2}}k_0\right\}, \tag{3}$$

に分割し、各shell内を代表する波数の大きさを$k_n=2^nk_0$ とする。各shell内のFourier成分を積分して速度場

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x},t)\equiv\int_{\Delta_n}\mathbf{v}(\mathbf{k},t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})d\mathbf{k}, \tag{4}$$

を作る。ここで大きな箱(box) V_0 を考えて、このbox内の全エネルギーを$E(t)$とし、その内の各shell内のエネルギーを$E_n(t)$とする。

$$\frac{1}{2}\int_{V_0}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}=E(t), \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\int_{V_0}\mathbf{u}_n(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{u}_n(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}=E_n(t). \tag{6}$$

各Shell内のエネルギーを代表する速度の大きさ$u_n(t)$を

$$E_n(t)\equiv\frac{1}{2}u_n(t)u_n(t) \tag{7}$$

で定義する。代表的速度$u_n(t)$の時間発展に対して、BellとNelkin[5]はすでに、(1)動粘性率 $\nu=0$ のときエネルギーを保存する、(2)非線形項は速度について２次の相互作用だけからなる、(3)非線形相互作用の係数は特徴的長さを持たない、(4)最近接shellの間だけで相互作用する、という要請の下に

$$\left(\frac{d}{dt}+\nu k_n^2\right)u_n=ak_n(u_{n-1}u_{n-1}-2u_nu_{n+1})+bk_n(u_{n-1}u_n-2u_{n+1}u_{n+1}), \tag{8}$$

というモデル方程式を提案している。ここで、aとbは定数である。この方程式は慣性小領域でKolmogorovのスケーリング解 $E(k)\sim k^{-5/3}$ を持つことが知られている。このスケーリング解をu_nおよびE_nで表すと

$$\frac{1}{2}u_nu_n\sim kE(k)\sim k^{-2/3}\Rightarrow u_n\sim k_n^{-1/3},E_n\sim k_n^{-2/3}, \tag{9}$$

である。

次に、実空間の大きなbox V_0を2^n個の小さなbox $V_{j,n}$, $j=0,\cdots,2^n-1$に１次元的に分割する。

$$V_0=\sum_{j=0}^{2^n-1}V_{j,n}. \tag{10}$$

n番目のshell内のエネルギーの内でj番目のbox内にあるエネルギー$E_{j,n}(t)$は

$$\frac{1}{2}\int_{V_{j,n}}\mathbf{u}_n(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{u}_n(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}=E_{j,n}(t), \tag{11}$$

であるから、このbox内のエネルギーを代表する複素速度$u_{j,n}(t)$を

$$E_{j,n}(t) \equiv \frac{1}{2} u_{j,n}(t) u^*_{j,n}(t), \tag{12}$$

で定義する。代表的速度$u_{j,n}(t)$の方程式は、n-shellに属する各boxの$u_{j,n}$ の値がすべて等しいとき、BellとNelkinのモデルに帰着することを要請して、

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) u_{j,n} = f \delta_{n,3}$$

$$+Ak_0^{-1/2} k_n^{3/2} \left[u^*_{j/2,n-1} u^*_{j/2,n-1} z_{j,n} - 2^{3/2} u^*_{j,n} \left(u^*_{2j,n+1} z_{2j,n+1} + u^*_{2j+1,n+1} z_{2j+1,n+1} \right) \right]$$

$$+Bk_0^{-1/2} k_n^{3/2} \left[u^*_{j/2,n-1} u^*_{j,n} z_{j,n} - 2^{3/2} \left(u^*_{2j,n+1} u^*_{2j,n+1} z_{2j,n+1} + u^*_{2j+1,n+1} u^*_{2j+1,n+1} z_{2j+1,n+1} \right) \right], \tag{13}$$

とする。ただし、ここでAとB は実定数、fは外力であり、$z_{j,n}$ はエネルギー輸送にゆらぎを起こさせるために導入したものであり、$|z_{j,n}| = 1$ であるような複素定数であるとする。また、以下においてもそうであるが、$j/2$は小数点以下を切り捨てることを含んでいるものとする。

3．モデルのエネルギー輸送

ここではエネルギー輸送率の確率分布を調べるので、以下にその定義を述べる。はじめに、n shell j boxが$n-1$ shell $j/2$ boxから単位時間当たりに流入するエネルギーを$T_{j,n}(n-1,n)$,

$$T_{j,n}(n-1,n) \equiv Ak_0^{-1/2} k_n^{3/2} u^*_{j/2,n-1} u^*_{j/2,n-1} u^*_{j,n} z_{j,n} + Bk_0^{-1/2} k_n^{3/2} u^*_{j/2,n-1} u^*_{j,n} u^*_{j,n} z_{j,n} + \text{c.c.}, \tag{14}$$

とする。また、n shell j boxが$n+1$ shell $2j$ boxと$n+1$ shell $2j+1$ boxへ放出するエネルギーを$T_{j,n}(n,n+1)$,

$$\begin{aligned} T_{j,n}(n,n+1) \equiv\ & Ak_0^{-1/2} k_n^{3/2} 2^{3/2} u^*_{j,n} u^*_{j,n} \left(u^*_{2j,n+1} z_{2j,n+1} + u^*_{2j+1,n+1} z_{2j+1,n+1} \right) \\ & +Bk_0^{-1/2} k_n^{3/2} 2^{3/2} u^*_{j,n} \left(u^*_{2j,n+1} u^*_{2j,n+1} z_{2j,n+1} + u^*_{2j+1,n+1} u^*_{2j+1,n+1} z_{2j+1,n+1} \right) + \text{c.c.}, \end{aligned} \tag{15}$$

とする。図１はこれら２つのエネルギー輸送率の関係を示したものである。

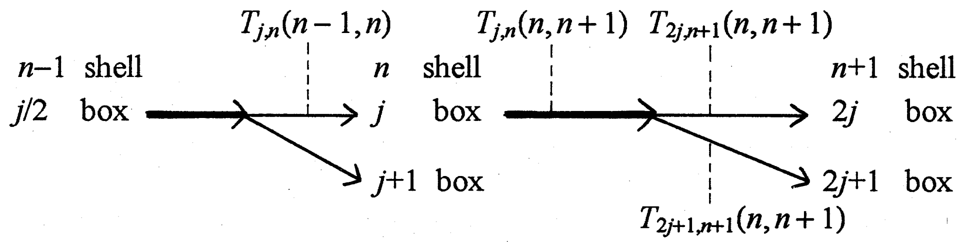

図１

モデル方程式の非線形項はエネルギーを保存するので

$$T_{j,n}(n,n+1)=T_{2j,n+1}(n,n+1)+T_{2j+1,n+1}(n,n+1), \tag{16}$$

が成立している。そこで、n shell j boxから放出されるエネルギーとn+1 shell $2j$ boxに流入してくるエネルギーの比 $p_{j,n;2j,n+1}$を

$$p_{j,n;2j,n+1}\equiv\frac{T_{2j,n+1}(n,n+1)}{T_{j,n}(n,n+1)}, \tag{17}$$

で定義する。これは、もし$T_{j,n}$すべて正ならば $0\le p_{j,n;2j,n+1}\le 1$となるので、NovikovのBreakdown Coefficientに対応するものと思われる。ここでは$p_{j,n;\,2j,n+1}$の確率分布を求めて、確率分布の相似性すなわちNovikovの尺度相似性仮説の（１）を調べる。また、n shell j boxに流入してくるエネルギーとn+1 shell $2j$ boxに流入してくるエネルギーの比 $r_{j,n;\,2j,n+1}$を

$$r_{j,n;2j,n+1}\equiv\frac{T_{2j,n+1}(n,n+1)}{T_{j,n}(n-1,n)}, \tag{18}$$

で定義すると、

$$\begin{aligned} r_{j,n;4j,n+1} &= \frac{T_{4j,n+2}(n+1,n+2)}{T_{j,n}(n-1,n)} = \frac{T_{2j,n+1}(n,n+1)}{T_{j,n}(n-1,n)}\frac{T_{4j,n+2}(n+1,n+2)}{T_{2j,n+1}(n,n+1)} \\ &= r_{j,n\ 2j,n+1}\, r_{2j,n+1;\,4j,n+2}, \end{aligned} \tag{19}$$

なる関係が成り立つので、 $r_{j,n;\,2j,n+1}$の統計的独立性を調べられる。ただし、これはNovikovの尺度相似性仮説の（２）と全く同じものではないことを注意しておく。

4．結果

このモデルでは複素定数 $z_{j,n}$をどう選ぶかがエネルギー輸送の統計に大きく影響する。したがって、実際の乱流のエネルギー輸送の統計を再現するように $z_{j,n}$を決定したいが、現段階ではそのため指針は与えられていない。そこで、ここでは２つの異なる選び方を採用してみることにする。１つは規則的に $z_{j,n}$を与える場合、すなわち、

$$\theta_{j,n}=\cos^{-1}\left(\frac{2j+1}{2^n}\right),j=0,\cdots,2^{n-1}-1, \tag{20}$$

として、$j<2n-1$ のとき

$$z_{j,n}=\cos\theta_{j,n}+\mathrm{i}\sin\theta_{j,n}, \tag{21}$$

$j'\geq 2^{n-1}$のとき、$j'=2^{n-1}+j$として

$$z_{j',n}=\cos\theta_{j,n}-\mathrm{i}\sin\theta_{j,n}, \tag{22}$$

とする場合であり、他は不規則的に $z_{j,n}$を与える場合、すなわち、角度$\theta_{j,n}$を区間[0,2π]の一様乱数として

$$z_{j,n}=\cos\theta_{j,n}+\mathrm{i}\sin\theta_{j,n},\ j=0,\cdots,2^n-1, \tag{23}$$

とする場合である。ただし、ここでは規則的に与えた場合の結果だけを報告する。

方程式(13)に対する初期条件は、適当な初期条件を与えてBell and Nelkinの方程式(8)を時刻t=20まで計算したときの値を使った。定数の値は、A=1.0, B=−0.5, $\nu=5\times10^{-5}$, f=1+iとし、時間刻みは1×10^{-4}とした。時間発展の計算には２次精度のルンゲ・クッタ法を用いている。また、nの最大値は13である。図２と図３は全エネルギーと全エンストロフィーの時間変化を示している。どちらも時間的に振動しているが、エンストロフィーの方が特に激しく振動している。これはnが大きいとき隣り合うboxの $z_{j,n}$の値があまり違わないことによると思われる。

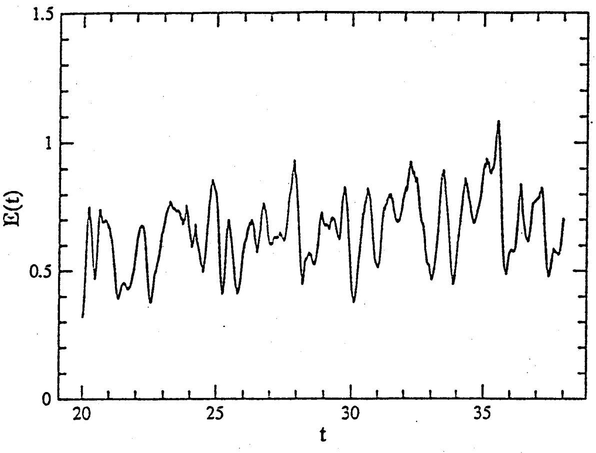

図2

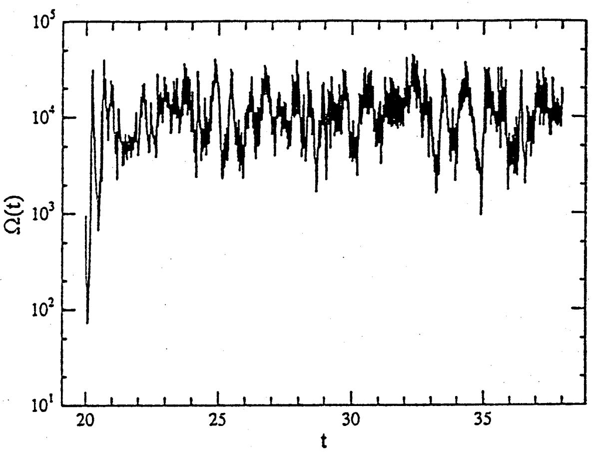

図3

図４はt=38におけるエネルギースペクトルを表している。破線はKolomogorovのスペクトルである。n=4から9までが慣性小領域であると考えられる。図５はt=34における実空間(n=13,j=0,･･･,8191)におけるエンストロフィー（粘性率をかければエネルギー散逸）を表しており、エネルギー散逸の間欠性が現れている。

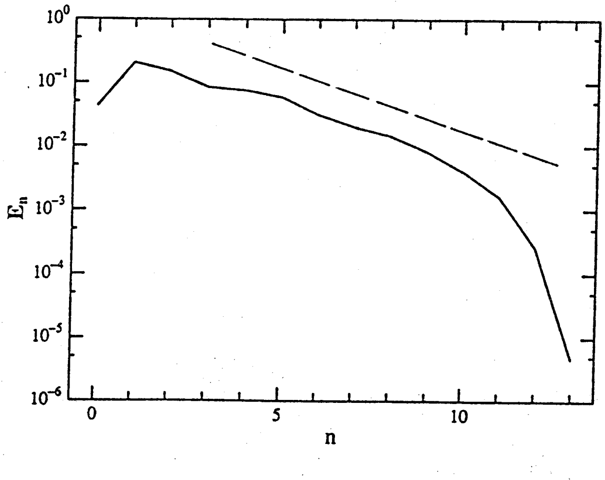

図４

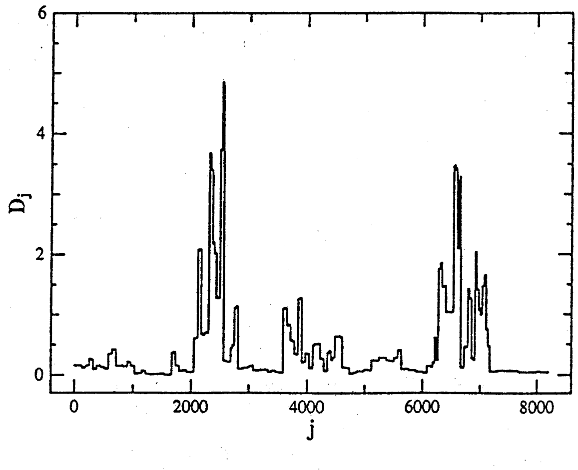

図５

図６はt=34～38における $p_{j,n;2j,n+1}$ の確率分布を示しており、図６-a, b, cはそれぞれn=4,5,6の場合である。図６-aと図６-bはかなりよく似ているが、図６-c は1/2近辺の確率が非常に大きくなっている。この傾向はnが大きくなるとともに顕著になる。

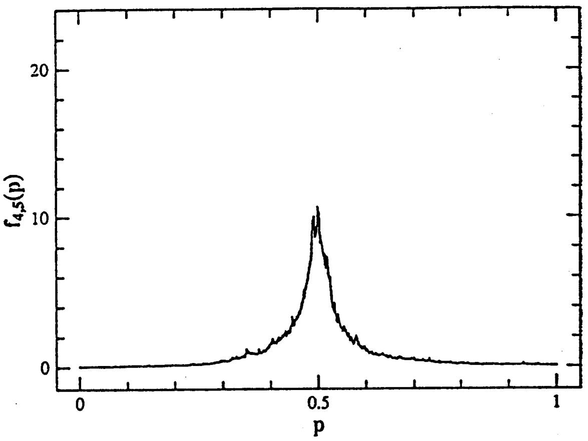

図６-a

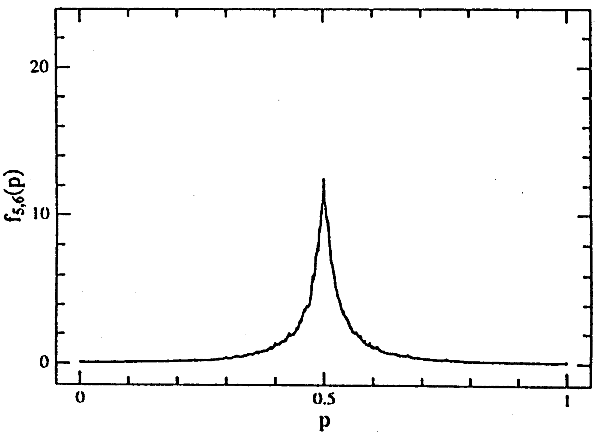

図６-b

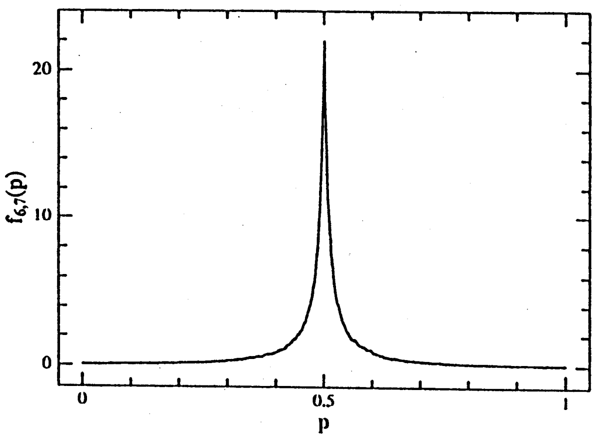

図６-c

今回の計算例は実際の乱流のエネルギー散逸を再現できたとは言い難いが、複素定数 $z_{j,n}$ の選び方を慎重に検討すればより良いモデルが作れるものと思われる。また、計算例が少ないことと確率分布等の統計量の計算も不十分な段階なので、今後さらに計算を進めたいと考えている。

参考文献

1) C.W. Van Atta and T.T. Yeh, **71** (1975) 417.

2) A.S. Monin and A.M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics (MIT Press, Cambridge, MA, 1975), Chap. 8.

3) A.N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. 13 (1962) 77.

Y. Saito, J. Phys. Soc. Japan **61** (1992) 403.

4) E.A. Novikov, Appl. Math. Mech. **35** (1971) 231.

5) T.L. Bell and M. Nelkin, Phys. Fluids **20** (1977) 345, J. Fluid Mech. **88** (1978) 369.