数理解析研究所講究録
933 巻 1995 年 16-21

パンルベ方程式の代数函数解について

渡辺 文彦 (北大理) (Humihiko Watanabe)

パンルベ方程式の解には、古典超越函数から有限的操作では得られない一般的な解がある他に、例外的な解として、あるリッカチ方程式の解の有理式で表わされる解と代数函数解とがある。これら例外解が存在するための必要十分条件を求め、かつ解を具体的に明示するという研究は、以前から多くの人々によって手掛けられてきた。これに関して筆者もいくつかの結果を得たが、本稿ではパンルベ第5方程式の代数函数解の決定がいかになされるかを中心に解説したい。なお、この研究は日本学術振興会に申請した課題研究である。

六つのパンルベ方程式の中で現在までに代数函数解が決定されているのは、第2から第5までの4本の方程式である。また、第1方程式には代数函数解がないことも知られている。第2方程式から第5方程式までの代数解の決定方法は可成よく似ているので、まず第2方程式を例に方法の概要を説明したい。なお、第2方程式の有理解は村田氏 [1] によって既に決定済であるが、以下の方法は、村田氏のものよりすこし簡単になっている。第2方程式は次で与えられる。

$$P_2(\alpha) \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = 2q^3 + tq + \alpha$$

ここで t, q, α はそれぞれ独立変数、未知函数、複素パラメータである。$P_2(\alpha)$ の任意の解 q は t に関して複素平面上1価函数であることから、解 q が t の代数函数であるならばこれは必然的に t の有理函数であることがわかる。以下 $P_2(\alpha)$ の解 q は t の有理函数とする。新しい独立変数 s を $ts = 1$ によって導入し $P_2(\alpha)$ を書換えると

$$\bar{P}_2(\alpha) \qquad s^4\frac{d^2q}{ds^2} + 2s^3\frac{dq}{ds} = 2q^3 + \frac{1}{s}q + \alpha$$

となる。解 q の $s = 0$(したがって $t = \infty$) でのロラン展開を $q = \sum_{m\le k} a_k s^k$ とおく。ここで m は整数である。この展開によって $\bar{P}_2(\alpha)$ を更にかきなおせば、

$$(1) \quad \sum_k k(k-1)a_k s^{k+2} + 2\sum_k k a_k s^{k+2} = 2\sum_{k,k',k''} a_k a_{k'} a_{k''} s^{k+k'+k''} + \sum_k a_k s^{k-1} + \alpha$$

を得る。ここで k, k', k'' は m 以上の整数をうごく。式 (1) における5つのロラン級数 (定数 α もロラン級数とみなす) の $s = 0$ での位数を比較すると $m = 1$ が得られる。

式(1)にあらわれる各s^kの係数を比較すれば係数a_kが次々と求まり、有理解qは結局以下のように展開される。

$$q = -\alpha s + \sum_{k \equiv 1 \mod 3} a_k s^k \tag{2}$$

ただしa_kはαの多項式であって、$a_k \equiv 0 \mod \alpha(\alpha^2-1)$をみたす。とくに次の系が直ちにわかる。

系1．(i) $q=0$ は $P_2(0)$ のただひとつの有理解。
(ii) $q=-s$ は$\bar{P}_2(1)$ のただひとつの有理解。したがって $q=-1/t$ は $P_2(1)$ のただひとつの有理解。
(iii) $q=s$ は$\bar{P}_2(-1)$ のただひとつの有理解。したがって $q=1/t$ は $P_2(-1)$ のただひとつの有理解。

さて、$P_2(\alpha)$ の任意の解を qとするとき

$$\bar{q} = -q + \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\frac{dq}{dt} - q^2 - \frac{t}{2}} \tag{3}$$

とおけば、$\bar{q}$は $P_2(\alpha-1)$ の解であることがわかる([2],[3],[4])。しかも$\bar{q}$が $P_2(\alpha-1)$ の解であることと変換(3)とにより、qが$\bar{q}$と $d\bar{q}/dt$ の有理式に表わされ、それは(3)と可逆である。したがって、(3)は $P_2(\alpha)$ の解集合から $P_2(\alpha-1)$ の解集合への双有理変換を定義している。こうして、系1で列挙した有理解から出発して、変換(3)(とその逆変換)を逐次適用することにより、次の命題を得る。

命題2．αを整数とするとき、$P_2(\alpha)$ はただひとつの有理解をもつ。

次に $P_2(\alpha)$ が有理解をもつならば、αは整数にかぎることを示そう。このためには、qを $P_2(\alpha)$ の有理解とするとき、複素射影直線 $\mathbf{CP}^1$上のパッフ形式qdtを考え、これに留数定理を適用すればよい。形式qdt の $t=\infty$ での留数は、変数変換 $s=1/t$ をおこなえば、(2)よりαであることがわかる。$t_0 \in \mathbf{C}$ での qdt の留数は、$t=t_0$がqの極であるときに限り± 1 であり、その他は0である。有理函数の極は有限個であるから、パッフ形式の留数定理により、$\alpha \in \mathbf{Z}$ が得られる。

以上でパンルベ第2方程式の有理函数解(代数函数解)の決定が完了した。このとき使われた方法をパンルベ第5方程式に適用することのより代数函数解を決定することができる。パンルベ方程式は単独の2階常微分方程式として発見されたが、これらはハミルトン方程式系にあらわすことができる。パンルベ第5方程式では次のようになる([5])。

$$S(\mathbf{v}) \qquad \begin{cases} t\dfrac{dq}{dt} = 2q^2p - 2qp + tq^2 - tq + (v_1 - v_2 - v_3 + v_4)q + v_2 - v_1, \\ t\dfrac{dp}{dt} = -2qp^2 + p^2 - 2tpq + tp - (v_1 - v_2 - v_3 + v_4)p + (v_3 - v_1)t, \end{cases}$$

ここで $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ は $v_1+v_2+v_3=v_4=0$ をみたす。第５方程式の一般解は $\mathbf{C}-\{0\}$ 上不分岐であり、$t=0,\infty$ 上では超越的な特異点をもつことが知られている。したがって代数函数解 (p,q) を求めるためには、$t=0,\infty$ 上での解の状況を観察することが手掛りである。

まず最初に代数函数解の $t=\infty$ でのピュイズ展開を調べてみる。新しい変数 s を $ts^e=1$(e は１以上の整数) によって導入して $S(\mathbf{v})$ を書きなおす。q,p の位数を m,n として $q=\sum_{m\leq k}a_ks^k, p=\sum_{n\leq l}b_ls^l$ とおき、$S(\mathbf{v})$ に代入すれば、$e=1$(不分岐) が容易に知られ以下の五通りに展開がきまる。

$$t=\frac{1}{s}$$

(4)
$$\begin{cases} q=(v_1-v_2)s+\cdots \\ p=-s^{-1}+(1-v_2+v_4)s^0+\cdots \end{cases}$$

(5)
$$\begin{cases} q=1+(v_4-v_3)s+\cdots \\ p=-s^{-1}+(v_2-v_4-1)s^0+\cdots \end{cases}$$

(6)
$$\begin{cases} q=\dfrac{1}{2}+(-1+v_1+v_2-v_3-v_4)s+\cdots \\ p=-\dfrac{1}{2}s^{-1}+(-v_1+v_2-v_3+v_4)s^0+\cdots \end{cases}$$

(7)
$$\begin{cases} q=(v_2-v_1)s+\cdots \\ p=(v_1-v_3)s^0+\cdots \end{cases}$$

(8)
$$\begin{cases} q=1+(v_3-v_4)s+\cdots \\ p=(v_3-v_1)s^0+\cdots \end{cases}$$

(4) において、qの展開係数で省略されている部分は、すべて v_1,v_2,v_3,v_4の多項式であって、v_1-v_2でわり切れる。また、p の展開係数で省略されている部分も同様に v_1,v_2,v_3,v_4の多項式であって $1-v_2+v_4$でわり切れている。このような事実は (5),(6),(7),(8) においても同様である。こうして、パンルベ第２方程式における系１に対応して次の結果をうる。

系３．$S(\mathbf{v})$ $(\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3,v_4))$ は以下の有理解をもつ。

(i) $v_1-v_2=1-v_2+v_4=0$ のとき、$(p,q)=(-s^{-1},0)=(-t,0)$;

(ii) $v_4-v_3=v_2-v_4-1=0$ のとき、$(p,q)=(-s^{-1},1)=(-t,1)$;

(iii) $-1+v_1+v_2-v_3-v_4=-v_1+v_2-v_3+v_4=0$ のとき、$(p,q)=(-\frac{1}{2}s^{-1},\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2}t,\frac{1}{2})$;
(iv) $v_2-v_1=v_1-v_3=0$ のとき $(p,q)=(0,0)$;
(v) $v_3-v_4=v_3-v_1=0$ のとき $(p,q)=(0,1)$;

次に $t=0$ での代数函数解のピュイズ展開をしらべる。代数函数解が $\mathbf{P}^1-\{0\}$ 上で不分岐であるから、当然 $t=0$ でも不分岐でなければならない。q,p の $t=0$ における展開を $q=\sum_{m\le k}a_kt^k, p=\sum_{n\le l}b_lt^l$ とおいて $S(\mathbf{v})$ に代入すれば、以下の三通りの展開をうる。

$$\begin{cases} q\equiv 1 \mod t, \\ p=(-v_1+v_2-v_3+v_4)t^0+\cdots, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} q\equiv 1 \mod t, \\ p\equiv 0 \mod t, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} q=(v_1+v_2-v_3-v_4-1)t^{-1}+\cdots, \\ p\equiv 0 \mod t, \end{cases} \tag{11}$$

(9) において、p の展開係数で省略されている部分は、すべて v_1,v_2,v_3,v_4の多項式であって、$-v_1+v_2-v_3+v_4$でわり切れる。(11) における qの展開についても同様である。

さいごに $t=t_0\neq 0,\infty$ での展開をみる。$T=t-t_0$とおき、前と同様に $q=\sum_{m\le k}a_kT^k, p=\sum_{n\le l}b_lT^l$ とおく。m または n が負であるならば、以下の 4 通りの展開となる。

$$\begin{cases} q=-T^{-1}+\cdots, \\ p=(v_1-v_3)T+\cdots, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} q=T^{-1}+\cdots, \\ p=-t_0+\cdots, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} q=\left(\dfrac{v_1-v_2}{t_0}\right)T+\cdots, \\ p=-t_0T^{-1}+\cdots, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} q=1+\cdots, \\ p=t_0T^{-1}+\cdots, \end{cases} \tag{15}$$

ところで岡本氏の研究 [6] によれば、$\mathbf{C}^4$の超平面$v_1+v_2+v_3+v_4=0$の4つのアフィン変換$s_1(\mathbf{v})=(v_2,v_1,v_3,v_4), s_2(\mathbf{v})=(v_3,v_2,v_1,v_4), s_3(\mathbf{v})=(v_1,v_2,v_4,v_3), s_0(\mathbf{v})=(v_1,v_4+1,v_3,v_2-1)$に対して、$S(\mathbf{v})$の解の双有理変換を、パンルベ第2方程式に対して(3)を構成したように、構成することができる。したがって$S(\mathbf{v})$の代数函数解を決定するためには、超平面$v_1+v_2+v_3+v_4=0$の、4つの変換s_1,s_2,s_3,s_0で生成されるアフィン変換群に対する基本領域内で代数函数解を決定すれば十分である。$v_1+v_2+v_3+v_4=0$の基本領域として、$v_1-v_2=0, v_1-v_3=0, v_3-v_4=0, v_2-v_4-1=0$で囲まれた四面体をとることができ、この中に存在する代数解として、系3で列挙したものがある。逆に、この基本領域内の代数解が系3のものに限ることをいうためには、代数解q,pに対して、それのリーマン面上の2つのパッフ形式$qdt, pd(\log t)$に対して留数定理を適用する。上の展開((4)~(15))でみたように、q,pがtの代数函数ならばそれらは全てtの有理函数であり、考えるべきリーマン面は複素射影直線$\mathbf{CP}^1$である。こうしてパンルベ第5方程式の代数函数解の決定がおこなわれる。なお、第5方程式の有理解の研究として[7]があるが、上記の方法は、代数解の分岐の問題も込めてとり扱っている分、一般的であるといえる。

さいごに系3の有理解について注意をのべたい。まず[8]で取扱ったように、$S(\mathbf{v})$は以下の4つのリッカチ解をもつ。

$v_1=v_3$のとき

$$\begin{cases} p=0 \\ t\dfrac{dq}{dt}=tq^2-tq+(v_4-v_2)q+v_2-v_1 \end{cases}$$

$v_1=v_2$のとき

$$\begin{cases} q=0 \\ t\dfrac{dp}{dt}=p^2+tp+(v_3-v_4)p+(v_3-v_1)t. \end{cases}$$

$v_3=v_4$のとき

$$\begin{cases} q=1 \\ t\dfrac{dp}{dt}=-p^2-tp+(v_2-v_1)p+(v_3-v_1)t \end{cases}$$

$v_2=v_4+1$のとき

$$\begin{cases} p=-t \\ t\dfrac{dq}{dt}=-tq^2+tq+(v_1-v_3-1)q+v_2-v_1 \end{cases}$$

系3の有理解のうち(i),(ii),(iv),(v)は、上のリッカチ解の共通解として得られる。

次に、変換$z_0(\mathbf{v})=(v_2-\frac{1}{4},v_4+\frac{3}{4},v_1-\frac{1}{4},v_3-\frac{1}{4})$を考える。このとき系3の(iii)の有理解は、$z_0$に対応する$S(\mathbf{v})$の解の双有理正準変換で不変になる解であることが容易にたしかめられる。

以上の注意二点は、その他のパンルベ方程式にも同様に通用する。

参考文献

[1] Murata, Y., Rational solutions of the second and fourth Painlevé equations, Funk. Ekvac., **28** (1985), 1–32.

[2] Vorob'ev, A. P., On rational solutions of the second Painlevé equation, Diff. Eq., **1** (1965), 58–59.

[3] Lukashevich, N. A., The second Painlevé equation, Diff. Eq., **7** (1971), 853–854.

[4] Okamoto, K., Studies on the Painlevé equations III., second and fourth Painlevé equations, P_{II} and P_{IV}, Math. Ann., **275** (1986), 221–255.

[5] A note of Okamoto (1992).

[6] Okamoto, K., Studies on the Painlevé equations II, Fifth Painlevé equation P_V, Japan. J. Math., **13** (1987), 47–76.

[7] Kitaev, A. V., Law, C. K., and McLeod, J. B., Rational solutions of the fifth Painlevé equation, preprint.

[8] Watanabe, H., Solutions of the fifth Painlevé equation I, to appearin Hok. Math. J.

[9] Umemura, H., and Watanabe, H., Solutions of the second and fourth Painlevé equations I, preprint.