数理解析研究所講究録
935巻 1996年 75-86

電場下の Bloch 波動関数と Berry phase*

田島　慎一
新潟大学工学部情報工学科

1　序

結晶構造を持つ物質に一様な電場を加えたとき、この摂動が Bloch 状態にあった伝導電子に与える影響について、multiple-scales 法を用いて準古典解析した。Stark-Wannier 局在と呼ばれる共鳴状態について、自分なりに理解したいというのがもともとの動機である。ここでは周期的ポテンシャルを持つ一次元 Schrödinger 方程式の中でも最も簡単な band 構造を持つ Lamé 方程式を対象とした。一般に Buslaev の方法に従って漸近解を構成すると、その初項には Berry phase に似た幾何的位相因子が自然に現れる。この幾何的位相因子を具体的に計算したのでこれらの結果について述べたい。

2　Lamé 方程式の band 構造

この節では Lamé 方程式に関するいくつかの基本的事項について述べる。

正の実数 ω_1 と $Im(\omega_3)\geq 0$ なる純虚数 ω_3 に対し、lattice Ω を

$$\Omega=\{\omega \mid \omega=2m\omega_1+2n\omega_3, \quad m,n\in Z\}$$

で定め、それから原点だけを除いた集合を Ω' で表す。このとき $2\omega_1, 2\omega_3$ を一組の基本周期とする Weierstrass の楕円関数 $\wp(u)$ は

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{\omega\in\Omega'}\left\{\frac{1}{(u-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right\}$$

であり、Weierstrass の ζ 関数と σ 関数はそれぞれ

$$\begin{aligned}\zeta(u) &= \frac{1}{u}+\sum_{\omega\in\Omega'}\left\{\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right\},\\ \sigma(u) &= u\prod_{\omega\in\Omega'}\left(1-\frac{u}{\omega}\right)e^{\frac{u}{\omega}+\frac{u^2}{2\omega^2}}\end{aligned}$$

*武俊に捧げる

で与えられる。σ 関数は lattice Ω のすべての点を一位の零点に持つ整関数であり

$$\zeta(u)=\frac{d}{du}\log\sigma(u),\quad \wp(u)=-\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u)$$

を満たす。これよりこれらの関数を用いて、次の Lamé 方程式

$$-\frac{d^2}{du^2}\psi+2\wp(u+\omega_3)\psi=E\psi \tag{1}$$

の Bloch 解と band 構造を求めることにする。

まず $E=E(z)=-\wp(z)$ を満たす パラメーター z を用いて

$$\chi=\zeta(u+\omega_3+z)-\zeta(u+\omega_3)-\zeta(z)$$

と置く。次の加法定理

$$\begin{aligned}\zeta(u_1+u_2)-\zeta(u_1)-\zeta(u_2) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right),\\ \wp(u_1+u_2)+\wp(u_1)+\wp(u_2) &= \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right)^2\end{aligned}$$

を使うと、関数 χ が Riccati 方程式

$$\chi^2+\frac{d\chi}{du}-2\wp(u+\omega_3)+E=0$$

を満たすことが確かめられる。従って微分作用素として次の因数分解がなりたつ。

$$\frac{d^2}{du^2}-2\wp(u+\omega_3)+E=\left(\frac{d}{du}+\chi\right)\left(\frac{d}{du}-\chi\right).$$

さてここで

$$\psi(u,z)=e^{-\zeta(z)u}\cdot\frac{\sigma(u+\omega_3+z)}{\sigma(u+\omega_3)}$$

と置くと、関数 $\psi(u,z)$ は一階の微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\log\psi(u,z) &= \chi\\ &= \zeta(u+\omega_3+z)-\zeta(u+\omega_3)-\zeta(z)\end{aligned}$$

を満たす。従って、関数 $\psi(u,z)$ は Lamé 方程式 (1) の解である。楕円関数 $\wp(u)$ が偶関数であり $\zeta(u)$ 関数が奇関数であることから、関数 $\psi(u,-z)$ も同じ Lamé 方程式を満たすことがわかる。

今、$e_1=\wp(\omega_1), e_3=\wp(\omega_3), e_2=\wp(\omega_1+\omega_3)$ と置くと

$$\wp'(z)^2=4\left(\wp(z)-e_1\right)\left(\wp(z)-e_2\right)\left(\wp(z)-e_3\right)$$

が成り立つが、関数 $\psi(u,z)$ と $\psi(u,-z)$ の Wronski 行列式は $-\sigma^2(z)\wp'(z)$ である。従って関数 $\psi(u,z)$ と $\psi(u,-z)$ は　$E \neq -e_1, -e_2, -e_3$ のとき、Lamé 方程式 (1) の一次独立な解となる。

さて、Weierstrass の σ 関数は $\sigma(u+2\omega_1) = -e^{2\zeta(\omega_1)(u+\omega_1)}\sigma(u)$ を満たすので

$$\psi(u+2\omega_1, z) = e^{-2\zeta(z)\omega_1 + 2\zeta(\omega_1)z}\psi(u,z)$$

が成り立つ。この式に注目して

$$k = k(z) = \frac{i}{\omega_1}(\zeta(z)\omega_1 - \zeta(\omega_1)z) \tag{2}$$

$$b(u,z) = e^{-\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1}zu} \cdot \frac{\sigma(u+\omega_3+z)}{\sigma(u+\omega_3)} \tag{3}$$

と定める。関数 $b(u,z)$ は、変数 u について、周期 $2\omega_1$ を持つ周期関数である。関数 $\psi(u,z)$ はこの関数 $b(u,z)$ を用いて

$$\psi(u,z) = e^{iku}b(u,z)$$

と表すことができる。固体物理学の用語に従って関数 $\psi(u,z)$ のことを　Lamé 方程式 (1) の Bloch 解と呼ぶ事にする。また k を波数ベクトルあるいは結晶運動量と呼び、関数 $b(u,z)$ のことを Bloch 因子と呼ぶことにする。

今

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{z = x+iy \mid 0 \le x \le \omega_1, y = 0\}, \\
I_2 &= \{z = x+iy \mid 0 \le x \le \omega_1, y = \Im m\omega_3\}, \\
J_1 &= \{z = x+iy \mid x = \omega_1, 0 \le y \le \Im m\omega_3\}, \\
J_2 &= \{z = x+iy \mid x = 0, 0 \le y \le \Im m\omega_3\}
\end{aligned}$$

と置くと

$$\wp(I_1) = (-\infty, -e_1], \quad \wp(I_2) = [-e_2, -e_3],$$
$$\wp(J_1) = (-e_1, -e_2), \quad \wp(J_2) = (-e_3, \infty)$$

が成り立つ。例えば $z \in I_1$ のとき $-2\zeta(z)\omega_1 + 2\zeta(\omega_1)z$は実数となるから、$\psi(u)$ は有界でないので、区間 $(-\infty, -e_1]$ は禁止帯である。また $z \in I_2$ のときは

$$\begin{aligned}
\zeta(x+\omega_3) &= \zeta(x) + \zeta(\omega_3) + \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(x) - \wp'(\omega_3)}{\wp(x) - \wp(\omega_3)}\right) \\
&= \zeta(x) + \zeta(\omega_3) + \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(x)}{\wp(x) - \wp(\omega_3)}\right)
\end{aligned}$$

を使って計算すると

$$-2\zeta(x+\omega_3)\omega_1+2\zeta(\omega_1)(x+\omega_3) = 2(\zeta(\omega_3)\omega_1-\zeta(\omega_1)\omega_3)+2\zeta(x)\omega_1-2\zeta(\omega_1)x+\frac{\wp'(x)}{\wp(x)-\wp(\omega_3)}\omega_1$$

を得る。ここで Legendre の関係式を用いれば

$$e^{2(\zeta(\omega_3)\omega_1-\zeta(\omega_1)\omega_3)} = e^{\pi i} = -1$$

となり、他方

$$2\zeta(x)\omega_1 - 2\zeta(\omega_1)x + \frac{\wp'(x)}{\wp(x)-\wp(\omega_3)}\omega_1$$

は実数に値を持つ。これらのことから $z \in I_2$ に対応する区間、すなわち $[-e_2, -e_3]$ も禁止帯である事が確かめられる。同様にして、区間 $(-e_1, -e_2)$ と $(-e_3, \infty)$ は安定帯であることがしめせる。

逆に、周期ポテンシャルをもつ一次元 Schrödinger 方程式でこの様な band 構造を持つものは Lamé 方程式に限る ([23]) 。

3 Buslaev の方法

Buslaev は 1984 年の論文 [11] に於いて perturbed Hill 方程式に対し multiple scaled 法を適用し漸近解析の理論を展開した。この節では Buslaev の方法を用いながら Lamé 方程式 (1) に摂動項を加えた次の方程式を解析する。

$$\left(-\frac{d^2}{du^2} + 2\wp(u+\omega_3) + \varepsilon u - E_0\right)\phi(u,\varepsilon) = 0 \tag{4}$$

摂動項 εu の係数 $\varepsilon > 0$ は $2\omega_1\varepsilon = 0$ と見なせるぐらい十分小さいと仮定する。しかし変数 u は $-\infty$ から $+\infty$ まで動くので、方程式 (4) の解の大域的性質を調べる際は摂動項 εu の影響を無視することは全くできない。そこで $r = \varepsilon u$ をスケールの異なる独立変数と見なし、更に $f(u,r,\varepsilon)|_{r=\varepsilon u} = \phi(u,\varepsilon)$ を満たす未知関数 $f(u,r,\varepsilon)$ を導入する。未知関数 $f(u,r,\varepsilon)$ は次の偏微分方程式をみたす。

$$\left(-\left(\frac{\partial}{\partial u} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + 2\wp(u+\omega_3) + r - E_0\right) f(u,r,\varepsilon) = 0. \tag{5}$$

この偏微分方程式の解として次の様な形式解を考える。

$$f(u,r,\varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon}S(r)}a(u,r,\varepsilon) \tag{6}$$

但し $a(u,r,\varepsilon) = a_0(u,r) + \varepsilon a_1(u,r) + \varepsilon^2 a_2(u,r) + \cdots$ であり各 $a_j(u,r)$ 達は変数 u について周期 $2\omega_1$ を持つ周期関数であるとする。形式的級数 $a(u,r,\varepsilon)$ のみたす偏微分方程式として次をえる。

$$\left(L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2\right) a(u,r,\varepsilon) = 0 \tag{7}$$

但し

$$L_0 = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2i\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + 2\wp(u+\omega_3) + r - E_0, \tag{8}$$

$$L_1 = -2\frac{\partial^2}{\partial u \partial r} - 2i\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}, \tag{9}$$

$$L_2 = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} \tag{10}$$

である。ここで $a(u,r,\varepsilon) = a_0(u,r) + \varepsilon a_1(u,r) + \varepsilon^2 a_2(u,r) + \cdots$ を 方程式 (7) に代入し、ε について整理し直すと次の様な方程式系を得る

$$\begin{aligned} L_0 a_0(u,r) &= 0, \\ L_0 a_1(u,r) &= -L_1 a_0(u,r), \\ L_0 a_{j+2}(u,r) &= -L_1 a_{j+1}(u,r) - L_2 a_j(u,r) \qquad j \geq 0. \end{aligned}$$

さて $a_0(u,r)$ の満たす方程式と、 Lamé 方程式 (1) の Bloch 解 $\psi(u,z) = e^{iku}b(u,z)$ の Bloch 因子 $b(u,z)$ の満たす方程式とを比較してみる。

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2i\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + 2\wp(u+\omega_3) + r - E_0\right) a_0(u,r) = 0,$$

$$\left(-\frac{d^2}{du^2} - 2ik(z)\frac{d}{du} + k^2(z) + 2\wp(u+\omega_3) - E(z)\right) b(u,z) = 0.$$

ここで $r = r(z) = E_0 - E(z)$ とし

$$k(z) = \frac{\partial S}{\partial r}(r)$$

を満たすものとして関数 $S(r(z))$ をさだめると

$$L_0 = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2ik(z)\frac{\partial}{\partial u} + k^2(z) + 2\wp(u+\omega_3) - E(z)$$

となる。そこで u, z を独立変数とする形式的級数 $b(u,z,\varepsilon) = b_0(u,z) + \varepsilon b_1(u,z) + \varepsilon^2 b_2(u,z) + \cdots$ を

$$b(u,z,\varepsilon) = a(u, E_0 - E(z), \varepsilon)$$

によりさだめる。

$$M_0 = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2ik(z)^2\frac{\partial}{\partial u} + k(z)^2 + 2\wp(u+\omega_3) - E(z),$$

$$M_1 = \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^{-1}\left(-2\frac{\partial^2}{\partial u \partial z} - 2ik(z)\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial k}{\partial z}(z)\right)$$

と置くと $b_0(u,z), b_1(u,z)$ は次の方程式を満たす。

$$M_0\left(b_0(u,z)\right)=0, \quad M_0\left(b_1(u,z)\right)=-M_1\left(b_0(u,z)\right). \tag{11}$$

さて z を独立変数とする任意の関数 $N(z)$ と Bloch 因子 $b(u,z)$ の積 $N(z)b(u,z)$ をとり

$$b_0(u,z)=N(z)b(u,z)$$

と置くと、 $b_0(u,z)$ は明かに $M_0\left(b_0(u,z)\right)=0$ を満たす。次に方程式

$$M_0\left(b_1(u,z)\right)=-M_1\left(b_0(u,z)\right)$$

に注目する。この方程式が周期関数解 $b_1(u,z)$ を持つ必要十分条件は

$$\int_0^{2\omega_1} b(u,-z)M_1\left(N(z)b(u,z)\right)du=0 \tag{12}$$

である。実際 $E=E(z)$ と置いた Lamé 方程式 (1) に対応する偏微分作用素を

$$P=-\frac{\partial^2}{\partial u^2}+2\wp(u+\omega_3)-E(z)$$

と置くと、作用素として $e^{ik(z)u}Pe^{ik(z)u}=M_0$ を満たすので注目している方程式は

$$P\left(e^{ik(z)u}b_1(u,z)\right)=-e^{ik(z)u}M_1\left(N(z)b(u,z)\right)$$

と表すことができる。この方程式が境界条件を満たす解を持つ必要十分条件は Fredholm の交代定理により

$$\int_0^{2\omega_1} \psi(u,-z)e^{ik(z)u}M_1\left(N(z)b(u,z)\right)du=0$$

となるが $\psi(u,z)=e^{-ik(z)u}b(u,-z)$ であるのでさきほど述べた必要十分条件 (12)

$$\int_0^{2\omega_1} b(u,-z)M_1\left(N(z)b(u,z)\right)du=0$$

を得る。Buslaev の論文 [11] にある計算と同じ計算をすれば条件式 (12) は $N(z)$ に関する次の一階の微分方程式と同じであることが確かめられる。

$$\frac{\partial N}{\partial z}(z)+\left(\frac{\langle b(u,-z),\frac{\partial b}{\partial z}(u,z)\rangle}{\langle b(u,-z),b(u,z)\rangle}+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}}{\frac{\partial E}{\partial z}}-\frac{\frac{\partial^2 k}{\partial z^2}}{\frac{\partial k}{\partial z}}\right)\right)N(z)=0 \tag{13}$$

但し

$$< f,g >=\int_0^{2\omega_1} f(u)g(u)du$$

なる記号を用いた。

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial z}}{\frac{\partial k}{\partial z}}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial z}}{\frac{\partial k}{\partial z}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}}{\frac{\partial E}{\partial z}}-\frac{\frac{\partial^2 k}{\partial z^2}}{\frac{\partial k}{\partial z}}\right)$$

に注意して

$$N(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial z}}{\frac{\partial k}{\partial z}}\right)^{-\frac{1}{2}} U(z)$$

と置き

$$\theta(z) = -i\frac{\langle b(u,-z), \frac{\partial b}{\partial z}(u,z)\rangle}{\langle b(u,-z), b(u,z)\rangle}$$

と定める。次の結果を得る。

Theorem 1 関数 $U(z)$ は次の方程式を満たす。

$$\frac{dU}{dz}(z) + i\theta(z)U(z) = 0.$$

4 Geometric Phase の計算

この節では Lamé 方程式 (1) に摂動項を加えた方程式 (4)

$$\left(-\frac{d^2}{du^2} + 2\wp(u+\omega_3) + \varepsilon u - E_0\right)\phi(u,\varepsilon) = 0$$

の漸近解に現れる幾何的位相因子

$$U(z) = e^{i\int(\theta(z)dz}$$

に関する具体的計算結果について述べる。

楕円関数 $\wp$ の公式

$$\wp(u_1) - \wp(u_2) = -\frac{\sigma(u_1-u_2)\sigma(u_1+u_2)}{\sigma^2(u_1)\sigma^2(u_2)}$$

を Bloch 因子

$$b(u,z) = e^{-\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1}zu}\cdot\frac{\sigma(u+\omega_3+z)}{\sigma(u+\omega_3)}$$

に使えば

$$b(u,-z)b(u,z) = -\sigma^2(z)\left(\wp(u+\omega_3) - \wp(z)\right) \tag{14}$$

となるので

$$\begin{aligned}
< b(u,-z), b(u,z) > &= \int_0^{2\omega_1} b(u,-z)b(u,z)du \\
&= -\sigma^2(z)\int_0^{2\omega_1}\left(\wp(u+\omega_3) - \wp(z)\right)du \\
&= -\sigma^2(z)\left[\zeta(u+\omega_3)\right]_{u=0}^{u=2\omega_1} + \sigma^2(z)2\omega_1\wp(z) \\
&= \sigma^2(z)\left\{\zeta(\omega_3+2\omega_1) - \zeta(\omega_3) + 2\omega_1\wp(z)\right\} \\
&= 2\sigma^2(z)\left(\zeta(\omega_1) + \omega_1\wp(z)\right)
\end{aligned}$$

を得る。次に

$$b(u,-z)\frac{\partial}{\partial z}b(u,z) = -\sigma^2(z)\left(-\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1}u + \zeta(u+\omega_3+z)\right)(\wp(u+\omega_3)-\wp(z)). \qquad (15)$$

を使って

$$\int_0^{2\omega_1} b(u,-z)\frac{\partial b}{\partial z}(u,z)du$$

の計算をする。

定積分の等式

$$\begin{aligned}\int_0^{2\omega_1} u\wp(u+\omega_3)du &= \int_0^{2\omega_1}\zeta(u+\omega_3)du - 2\omega_1\zeta(2\omega_1+\omega_3),\\ \int_0^{2\omega_1}\zeta(u+\omega_3)\wp(u+\omega_3)du &= -\zeta(\omega_1)\left(\zeta(2\omega_1+\omega_3)+\zeta(\omega_3)\right),\\ \int_0^{2\omega_1}\zeta(u+\omega_3)du &= 2\omega_1\left(\zeta(\omega_1)+\zeta(\omega_3)\right)+2\pi i\end{aligned}$$

と公式

$$\zeta(u+\omega_3+z) = \zeta(u+\omega_3)+\zeta(z)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(u+\omega_3)-\wp'(z)}{\wp(u+\omega_3)-\wp(z)}$$

を使うと

$$\int_0^{2\omega_1} b(u,-z)\frac{\partial b}{\partial z}(u,z)du = \sigma^2(z)\left(\zeta(\omega_1)+\omega_1\wp(z)\right)\left(2\zeta(\omega_3)+2\zeta(z)+\frac{2\pi i}{\omega_1}\right)+\sigma^2(z)\omega_1\wp'(z)$$

をえる。これらのことから

$$i\theta(z) = \zeta(\omega_3)+\zeta(z)+\frac{\pi i}{\omega_1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_1\wp'(z)}{\zeta(\omega_1)+\omega_1\wp(z)} \qquad (16)$$

が導ける。

Theorem 2 $r \neq E_0+e_1,\ E_0+e_2,\ E_0+e_3$ に対し $r = E_0 - E(z)$ の逆関数を $z(r)$ と置く。このとき *Bloch* 解 $e^{iku}b(u,z)$ に対応する *perturbed Lamé* 方程式

$$\left(\frac{d^2}{du^2}+p(u)+\varepsilon u - E_0\right)\psi(u,\varepsilon) = 0$$

の漸近解の初項は次の様になる。

$$e^{\frac{i}{\varepsilon}S(r)}b_0\left(u,z(r)\right)$$

但し

$$
\begin{aligned}
b_0(u,z) &= e^{i\int\theta(z)dz}\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial z}}{\frac{\partial k}{\partial z}}\right)^{-\frac{1}{2}} b(u,z),\\
i\theta(z) &= \zeta(\omega_3)+\zeta(z)+\frac{\pi i}{\omega_1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_1\wp'(z)}{\zeta(\omega_1)+\omega_1\wp(z)},\\
\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial z}}{\frac{\partial k}{\partial z}}\right) &= -i\frac{\omega_1\wp'(z)}{\zeta(\omega_1)+\omega_1\wp(z)}
\end{aligned}
$$

である。

5 あとがき

Stark-Wannier 局在に関しては 1950 年代の終わりに Wannier がその存在を理論的に予測して以来長い間様々な議論がなされていた。1985 年に Agler と Froese [2] らにより数学的存在証明がなされ、1988 年に初めて半導体超格子において観測された。最近 Buslaev と Dmitrieva らにより興味深い研究がなされている。参考文献等をみられたい。

参考文献

[1] E. N. Adams, II, Motion of electron in a perturbed periodic potential, Phys. Rev. **85** (1952), 41-50.

[2] J. Agler and R. Froese, Existence of Stark ladder resonances, Comm. Math. Phys. **100** (1985), 161-171.

[3] N. I. Akhiezer, On the spectral theory of Lamé's equation, Istor. Mat. Issled. **23** (1978), 77-86 (in Russian).

[4] W. Ashcroft and N. D. Mermin, Solid State Physics (1976), Saunders Campany.

[5] J. E. Avron, On the lifetime of Wannier ladder states, Annals of Phys. **143** (1982), 33-53.

[6] G. Bastard, J. A. Brum and R. Ferreira, Electronic states in semiconductor heterostructures, Solid State Phys. **44** (1991), 229-415.

[7] F. Bentosela, Bloch electrons in constant electric field, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 173-182.

[8] F. Bentosela, V. Grecchi and F. Zironi, Approximate ladder of resonances in a semi-infinite crystal, J. Phys. C. Solid State Phys. **15** (1982), 7119-7131.

[9] F. Bentosela and V. Grecchi, Stark-Wannier ladders, Comm. Math. Phys. **142** (1991), 169-192.

[10] M. V. Berry, Quantul phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. London A **392** (1984), 45-57.

[11] V. S. Buslaev, Adiabatic perturbation of a periodic potential, Theoret. and Math. Phys. **58** (1984), 153-159.

[12] V. S. Buslaev, Semiclassical approximation for equations with periodic coefficients, Russian Math. Survey **42** (1987), 97-125.

[13] V. S. Buslaev and L. A. Dmitrieva, Geometric aspects of the Bloch electrons theory in external field, in Topological Phases in Quantum Theory (eds B. Markovski and S. I. Vinitsky), World Scientific (1989), 218-250.

[14] V. S. Buslaev and L. A. Dmitrieva, A Bloch electron in an external field, Leninglad Math. **1** (1990), 287-320.

[15] J. M. Combes and P. D. Hislop, Stark ladder resonances for small electric fields, Comm. Math. Phys. **140** (1991), 291-320.

[16] B. A. Dubrovin, V. B. Matveev and S. P. Novikov, Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties, Russian Math. Surveys **31** (1976), 59-146.

[17] L. Esaki and R. Tsu, Superlattice and negative differential conductivity in semiconductors, IBM J. Res. Develop. **14** (1970), 61-65.

[18] L. Fritsche, Representation of a lattice electron in a uniform electric field, Phys. Stat. Sol **13** (1966), 487-497.

[19] A. Grossmann, Nested Hilbert spsces in quantum mechanics I, J. Math. Phys. **5** (1964), 1025-1037.

[20] J. C. Guillot, J. Ralston and E. Trubowitz, Semi-classical asymptotics in solid state physics, Commun. Math. Phys. **116** (1988), 401-415.

[21] E. Harrell and B. Simon, The mathematical theory of resonances whose widths are exponentially small, Duke Math. J. **47** (1980), 845-902.

[22] I. W. Herbst and J. S. Howland, The Stark ladder and other one-dimensional external field problems, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 23-42.

[23] H. Hochstadt, On the determination of a Hill's equation from its spectrum, Arch. Rat. Mech. Anal. **19** (1965), 353-362.

[24] W. V. Houston, Acceleration of electrons in a crystal lattice, Phys. Review **57** (1940), 184-186.

[25] W. Hunziker, Schrödinger operators with electric or magnetic fields, in Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics, **116**, ed. by K. Osterwalder (1979), 25-44.

[26] A. R. Its and V. B. Matveev, On a class of solutions of the KdV equation, Problems of mathematical physics **8** Izdat Leningrad Univ. (1976), 70-92 (in Russian).

[27] T. Kato, On the convergence of the perturbation method, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA **6** (1951), 145-226.

[28] W. Kohn, Analytic properties of Bloch waves and Wannier functions, Phys. Review **115** (1959), 809-821.

[29] W. Magnus and S. Winkler, Hill's Equation (1979), Dover.

[30] E. E. Mendez, F. Agulló-Rueda and J. M. Hong, Stark localization in GaAs-GaAlAs superlattices under an electric field, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 2426-2429.

[31] G. Nenciu, Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields, Rev. Mod. Phys. **63** (1991), 91-127.

[32] J. R. Oppenheimer, Three notes on the quantum theory of aperiodic effects, Phys. Rev. **13** (1928), 66-81.

[33] D. B. Pearson, Quantum Scattering and Spectral Theory (1988), Academic Press.

[34] J. C. Slater, Electrons in perturbed periodic lattices, Phys. Rev. **76** (1949), 1592-1601.

[35] S. Tajima, Geometric phase in a perturbed Lamé equation, First Korean-Japanese Colloquium on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis (eds J. Kajiwara, H. Kazama and K. H. Shon) (1993), 55-61.

[36] E. C. Titchmarsh, Some theorems on perturbation theory, III, IV, V, Proc. Roy. Soc. **A207** (1951), 321-328; **A210** (1951), 30-47; J. Analyse Math. **4** (1954/56), 187-208.

[37] P. Voisin, J. Bleuse, C. Bouch, S. Gaillard, C. Alibert and A. Regreny, Observation of the Wannier-Stark quantization in a semiconductor superlattice, Phys. Rev. Lett. **61** (1988), 1639-1642.

[38] G. H. Wannier, Wave functions and effective Hamiltonian for Bloch electrons in an electric field, Phys. Rev. **117** (1960), 432-439.

[39] J. Zak, Localized states and effective Hamiltonians in perturbed crystals, Comm. in Physics **1** (1976), 73-79.

[40] C. Zener, A theory of the electrical breakdown of solid dielectrics, Proc. Roy. Soc. London, ser A **145** (1934), 523-529.