

境界要素法の進展

Developments in Boundary Element Method

日本大学生産工学部 登坂宣好

(Nobuyoshi Tosaka)

1. はじめに

境界要素法 (BEM) が, 差分法 (FDM), 有限要素法 (FEM) について第 3 の数値計算手法¹⁾として注目を浴びてから早や 20 年近くが経過しようとしている. BEM は境界積分方程式の汎用的な離散化手法としてこれまで様々な問題に対し進展を続けている. その間, 手法の有効性と適用性を確かなものにするための多くの努力が重ねられている.

本論では, BEM における基本原理とそこに含まれる問題点に関する最近の話題である正則化技法 (regularization technique) と多重相反技法 (multiple reciprocity technique) および非線形問題への拡張について紹介する.

2. 境界要素法の原理

BEM の基本的な定式化とその離散化を次のような 2 次元のラプラス方程式を対象として示すことにする²⁾.

◦ Laplace 方程式

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ただし, Ω は閉曲線 Γ で囲まれた閉領域の内部とし, Γ の外向き単位法線ベクトルを n とする. なお, 式 (1) の解をユニークに定めるには, Γ 上で適当な境界条件が規定されているものとする.

式 (1) に対する積分方程式表現は, ラプラス作用素の基本解 v^* をテスト関数とする次の積分恒等式

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) v^* d\Omega = 0 \quad (2)$$

から発散定理を用いて次のように導かれる.

$$C(y)u(y) = \int_{\Gamma} q(x)v^*(x,y)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u(x)q^*(x,y)d\Gamma(x) \quad (x \in \Gamma) \quad (3)$$

ただし,

$$q(x) \equiv \frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}, \quad q^*(x,y) \equiv \frac{\partial v^*(x,y)}{\partial n(x)} \quad (4)$$

$$v^*(x,y) : \nabla^2 v^*(x,y) = -\delta(x-y) \quad (5)$$

$$C(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi} & (\mathbf{y} \in \Gamma) \\ 1 & (\mathbf{y} \in \Omega) \end{cases} \quad (6)$$

ここで, α は境界点 \mathbf{y} での境界曲線の形状に依存して定まる角度を表し, 滑らかな場合 $\alpha = \pi$ となる. なお, 式(5)を満足する基本解および(4)の q^* は2点間の距離 $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ に対し

$$v^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (7)$$

$$q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}}{r^2} \quad (8)$$

で与えられる.

式(3)において $\mathbf{y} \in \Gamma$ のときの表現を特に境界積分方程式 (boundary integral equation: BIE) とよぶ.

この BIE を数値的に解くための離散化手法, すなわち BEM は次のような一連の操作, 1) 境界 Γ の離散化, 2) 未知量の離散化, 3) ソース点の離散化 (選点法), 4) 積分の近似 (数値積分), をもとに構成されている. 特に上記の 1), 2) の離散化は境界要素の導入によって行われる.

これらの操作の結果, 式(3)の BIE は次のような境界要素方程式とよばれる離散化表現となる.

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{Q} \quad (9)$$

ただし, \mathbf{H} と \mathbf{G} は係数行列, \mathbf{U} と \mathbf{Q} は境界点における未知数からなる節点ベクトルとする.

3. 正則化技法

BIE の離散化手法としての BEM 解析を実行しようとする際には, BIE に含まれる積分核である基本解の有する特異性に起因する積分の特異性に対する考慮が重要となる.

BEM では, $r \rightarrow 0$ のとき積分の特異性として, weakly singularity ($o(\ln r)$), strongly singularity ($o(r^{-1})$), hyper singularity ($o(r^{-2})$) の3種類が存在し, その正則化を計ることが必須となる.

このような特異性のため, 式(3)において $C(\mathbf{y}) = \alpha/2\pi$ の場合の境界積分方程式のみならず $C(\mathbf{y}) = 1$ に対する内点に関する積分方程式でも \mathbf{y} が境界に近くなると積分は特異に近い状態となる. このような状態を特に, 積分方程式の疑似特異性とよんでいる. したがって, この積分を精度良く評価しないと解の精度が著しく低下する.

このような特異性に対する正則化技法として種々のものが提案されている³⁾. その中でも相対量を用いた次のような積分方程式表現が有効である⁴⁾.

○相対量による BIE

$$\int_{\Gamma} q(\mathbf{x}) v^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})\} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma) \quad (10)$$

○相対量による内点の積分方程式

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} -q(\mathbf{x})v^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \{u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{z})\}q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{x}) + u(\mathbf{z}) \quad (\mathbf{y} \in \Omega, \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Gamma) \quad (11)$$

ただし, \mathbf{z} は内点 \mathbf{y} から最も近い境界上の点とする.

相対量による正則化技法の適用例として非圧縮性粘性流体のキャビティー流れ問題における中央部の境界近傍水平方向流速分布の結果⁵⁾を Fig.1 に示す. Fig.1 では, 従来の BEM の結果との比較を示し, $u(I)$ と $u(B)$ はそれぞれ内点と境界点の水平流速を表す.

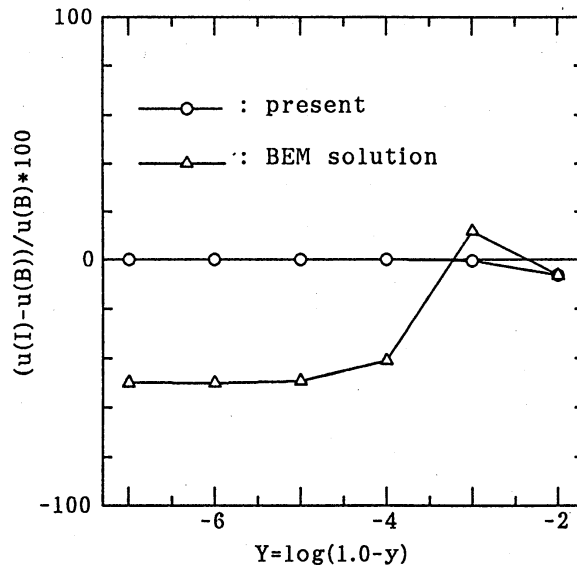


Fig.1 Error of horizontal velocity for $x=0.5$ ($Re=100$)

4. 多重相反技法

BEMが差分法や有限要素法と異なるのは境界型解法であるということである. すなわちBEMの未知量は全ての境界点に関するものに限られる.

対象とする問題によっては, 積分方程式による定式化の中に境界積分項のみならず領域積分項を含む場合も考えられる. 固有値問題や非線形問題はそのような定式化の代表的な例である.

このような場合にも境界型解法の特徴を發揮させるべく領域積分項を境界積分項に変換させるような手法が提案されている. そのような手法の一つとして多重相反技法が存在している. その技法を次のヘルムホルツ方程式を対象として紹介する.

○ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (12)$$

ヘルムホルツ方程式に対する積分方程式表現はヘルムホルツ微分作用素の基本解を $v^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ として次のように与えられる.

$$C(\mathbf{y})u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} q(\mathbf{x})v^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} u(\mathbf{x})q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (13)$$

ただし, 基本解 v^* ($\nabla^2 v^* + k^2 v^* = -\delta(x-y)$) は 0 次の第 2 種 Hankel 関数を用いて次のように与えられる.

$$v^*(x, y) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(kr) \quad (14)$$

ここで i は虚数単位を表す.

この B I E を B E M で解く場合, 基本解 v^* が未知パラメータ k を変数として含んでいるので得られる離散化式は標準的な固有方程式とはならない. そのため, 固有パラメータ k を決定するのに, "Determinant Search 法" が用いられている⁶⁾.

そこで, k を変数として含まないような基本解として Laplacian の基本解 (7) を採用することにすれば次のような積分方程式を得る.

$$C(y) = \int_{\Gamma} q(x)v^*(x, y)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u(x)q^*(x, y)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} k^2 u(x)v^*(x, y)d\Omega(x) \quad (15)$$

この方程式では右辺第 3 項の領域積分の離散化が必要となり, 境界要素のみならず内部要素, いわゆる境界-内部要素型解法 (boundary-domain element method; B · DEM) が考えられる⁶⁾. この場合, 前述した B E M の特性が失われることになる.

ここで, 境界積分方程式 (13) と積分方程式 (15) に対する離散化手法である境界要素法と境界-内部要素型解法による解析例を示す. $\pi \times \pi$ の正方領域に対してディリクレ境界条件 ($u = 0$) を与えたときの固有値問題の近似解について, フーリエ級数解との比較を通して Table.1 に示す. ただし使用する要素は B E M のとき 20 の境界要素 (一定要素) とし, 境界-内部要素型解法では 20 境界要素 (一定要素) と 25 内部要素 (1 次要素) とする.

Table.1 Analytical and numerical solutions

mode (m,n)	Anal.Sol.	BEM	B · DEM
(1,1)	1.414	1.409	1.436
(2,1)	2.236	2.221	2.301
(2,2)	2.828	2.795	2.947
(3,1)	3.162	3.132	3.308

次に, 領域積分項を境界積分項に変換して B I E とするために導入された多重相反手法を紹介する^{6,7)}.

式 (15) の右辺第 3 項を境界積分に書き換えるには次のように考える. まず, 式 (7) で与えられるラプラス作用素の基本解 v^* を v_0^* と書き,

$$\nabla^2 v_1^* = -v_0^*, \quad q_1^* = \frac{\partial v_1^*}{\partial n} \quad (16)$$

を満足する関数 v_1^* および q_1^* を導入する. このような関数に注目すると, v_0^* に関する領域積分項は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v_0^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{x}) &= -\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \nabla^2 v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\Gamma} \{q(\mathbf{x}) v_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) q_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&\quad + \int_{\Omega} k^2 u(\mathbf{x}) v_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{x}) \tag{17}
\end{aligned}$$

ここで、上式の右辺の第1項は境界積分項として与えられているが、第2項は領域積分項である。しかし、その形状は右辺と類似しているので、同じ考え方を多重反復し次々に境界積分項に書き換えることができる。

そこで、式(16)に対応して

$$\nabla^2 v_j^* = -v_{j-1}^*, \quad (\nabla^2 v_0^* = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \tag{18}$$

なる関数列 $v_j (j=0, 1, 2, \dots, n)$ を採用することにすれば、式(15)は n 重反復の結果、次のような積分方程式となる。

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{y})u(\mathbf{y}) &= \sum_{j=0}^n (-k^2)^j \int_{\Gamma} \{q(\mathbf{x}) v_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) q_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&\quad + (-1)^n (k^2)^{n+1} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v_n^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{x}) \tag{19}
\end{aligned}$$

ここで、 n を十分大きくしたときの右辺第3項の評価⁸⁾を考慮することにより、上式の第3項は無視することができ最終的には積分方程式(15)は次のような近似された境界積分方程式として与えられる。

$$C(\mathbf{y})u(\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^n (-k^2)^j \int_{\Gamma} \{q(\mathbf{x}) v_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) q_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} d\Gamma(\mathbf{x}) \tag{20}$$

ただし、式(18)を満足する関数の列はラプラシアンの基本解(7)を考慮することによって次のように与えられる。

$$v_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} r^{2j} \frac{1}{4^j (j!)^2} (\ln r - S_j) \tag{21}$$

$$S_j = \begin{cases} 0 & (j=0) \\ \sum_{i=1}^j \frac{1}{i} & (j \geq 1) \end{cases} \tag{22}$$

この結果、積分方程式(20)を境界要素によって離散化すると、 k に関する標準的な固有方程式が得られることになる。

上述した多重相反境界要素法の適用性が次のような例題に対して示されている。長方形領域(0.6×0.4)に対し、左側境界のみが $u=0$ で残りの境界が $q=0$ の場合に得られた固有パラメータをフーリエ級数解との比較を通してTable.2に示す。なお、使用要素は26および44個の1次要素である。Table.2より、かなり低次の少ない要素でも良い結果が得られることがわかる。

Table.2 Analytical and numerical solutions⁸⁾

mode (m,n)	Anal.Sol.	MRBEM (44 elements)	MRBEM (26 elements)
(1,0)	1.74	1.74	1.74
(2,0)	5.23	5.24	5.25
(0,1)	8.04	8.06	8.06
(3,0)	8.72	8.73	8.74
(2,1)	9.43	9.45	9.45
(3,1)	11.74	11.75	11.76
(4,0)	12.21	12.22	12.25

5. 非線形問題への拡張

線形問題の有効な数値計算手法として進展してきた境界要素法において、非線形問題への適用性を計るべく様々な研究が試みられている。微分方程式の非線形問題に対する積分方程式を誘導する際に、線形微分作用素の基本解をテスト関数とする立場をとっているので得られる方程式は非線形積分方程式となる。この非線形積分方程式を解くとき、方程式中の非線形項を含む領域積分項の取扱い方に関して、4節で述べた多重相反技法を適用する外に以下に示す3つの手法が考えられる。

- 1) 境界要素型解法 (Boundary Element Approach)
- 2) 境界-内部要素型解法 (Boundary-Domain Element Approach)
- 3) 一般化境界要素型解法 (部分領域境界要素法) (Generalized Boundary Element Approach)

これらの各非線形解析手法の概念を非線形微分方程式

$$A(u) = Lu + N(u) = f \quad \text{in } \Omega \quad (23)$$

に関して示すと Fig.2 のようになる。ただし、 A は非線形微分作用素とし、 L および N はそれぞれその線形、非線形部分とする。

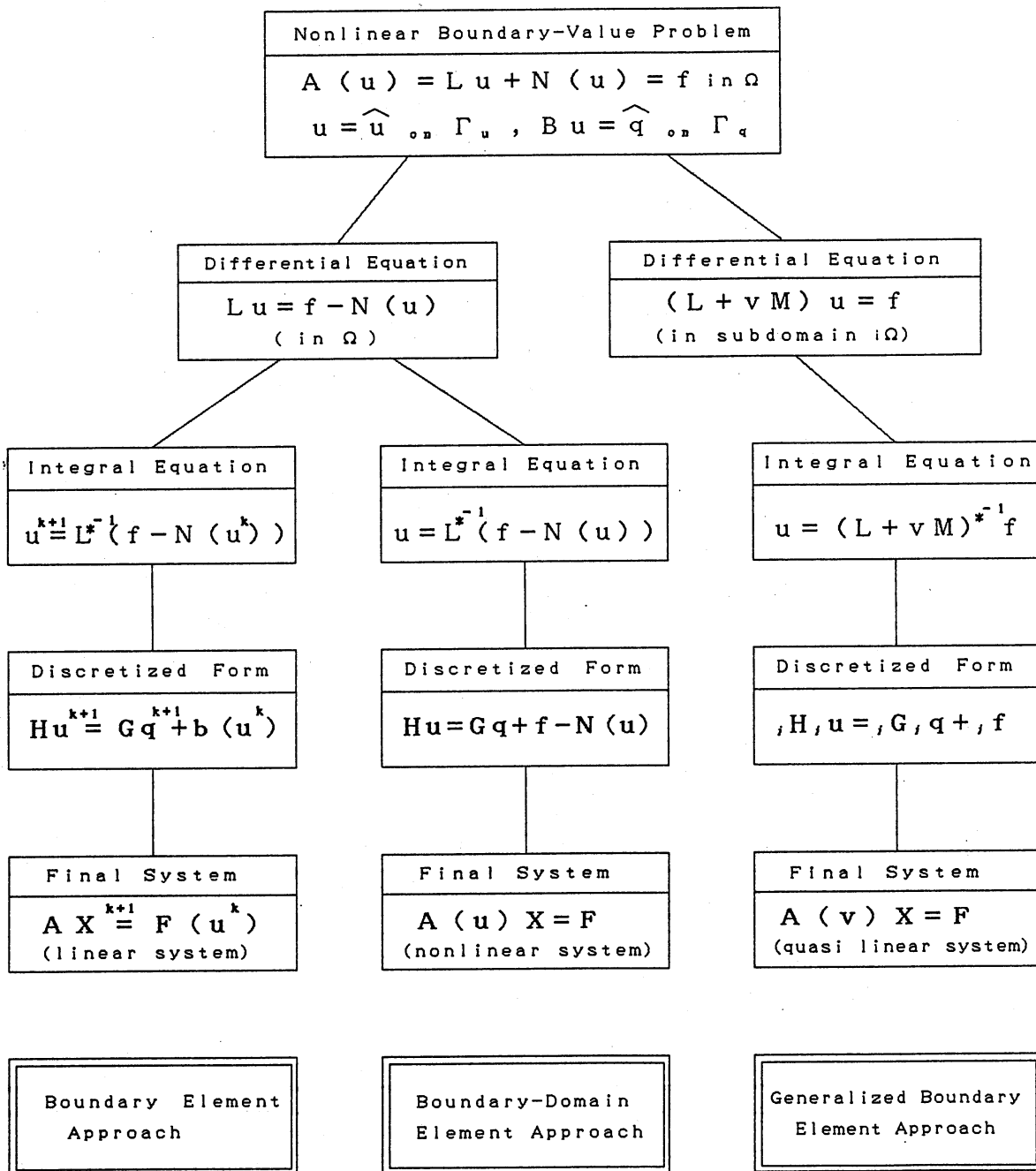


Fig.2 Conceptive flow and solution procedure

6. おわりに

BEMが様々な問題についてその有効性および適用性を発揮するには、まだまだ解決しなければならない問題が存在している。本論ではそれらの中から正則化技法と多重相反法について紹介した。さらに、残された解決すべき大きな問題である非線形問題への拡張については手法に関するコメントにとどめた。また、境界要素法はここで紹介した問題への適用だけではなく、移動境界問題⁹⁾や逆問題¹⁰⁾の有効な手法として多用されていることをつけ加えておく。

参考文献

- [1] 数理科学,「境界要素法の新展開」, 254号, 1984
- [2] 登坂宣好, 中山司: 境界要素法の基礎, 日科技連出版社, 1987
- [3] Tanaka, M, V.Sladek & J.Sladek: Regularization techniques applied to boundary element methods, A.M.R. 47, 457-499, 1994
- [4] 木須博行, 河原哲也: 境界要素法の高精度化に関する研究(第1報, 相対量を用いた積分方程式の導入), 日本機械学会論文集(B編), 55巻514号, 1562-1568, 1989
- [5] 茅野栄一, 登坂宣好: 高精度化された境界要素型解法による2次元非圧縮性粘性流れ問題の近似解析, 境界要素法論文集, 第12巻, 115-120, 1995
- [6] 登坂宣好, 角田和彦: 積分方程式による固有値問題の近似解析, 日本建築学会論文報告集, 328号, 36-43, 1983
- [7] Nowak, A.J: Temperature fields in domains with heat sources using boundary-only formulation, Proc.10th BEM Conference (Ed. Brebbia, C.A.), Springer-Verlag, Vol.2, 233-247, 1988
- [8] 安藤英司, 神谷紀生: 多重相反境界要素法の検討と応用について, 境界要素法論文集, 第8巻, 167-170, 1991
- [9] Tosaka, N: Boundary element approach to nonlinear problems in continuum mechanics, Proceedings of IABEM Symp. on Nonlinear Problems (Ed. Morino, L), Kluwer academic publishers, (in press)
- [10] 登坂宣好: 境界要素法による解析(移動境界流れ解析, 第4章), 147-179, 東京大学出版会, 1995
- [11] 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 培風館, 1991