数理解析研究所講究録
946 巻 1996 年 10-17

Korovkin type approximation theorems II

新潟大・理 泉池 敬司 (Keiji Izuchi)

これは，高橋氏によるIの続きであり，真次，高木，渡辺氏との共同研究により得られた結果である。最近 Altomare と Campiti によりこの関連の本が出版され，最近 (1993年まで) の結果がもれなく紹介されている[2]。

X を compact Hausdorff 空間とし，$S \subset C(X)$ とする。$L(C(X))$ で $C(X)$ 上の有界線形作用素全体とする。S を test functions とする $C(X)$ 上の BKW-作用素の概念は高橋氏[7]により導入された。$T \in L(C(X))$ に対して $T \in BKW(C(X);S)$ であるとは，

BKW: $\forall \{T_\lambda\}_\lambda \subset L(C(X))$ <u>net</u> s.t. $\|T_\lambda\| \to \|T\|$,
$\|T_\lambda f - Tf\|_\infty \to 0$ $\forall f \in S$ に対して $\|T_\lambda g - Tg\|_\infty \to 0$ $\forall g \in C(X)$

が成立する時にいう。つまり T が BKW-作用素であるとは，ノルムが $\|T\|$ に収束する作用素の net で S 上各点収束してい

れば，いつでもTに強収束している時にいう。高橋氏[8]はBKW-作用素を特徴づけるためにuniqueness setを導入した。$M_1(X) \equiv \{X$上の$\|\mu\| \le 1$なるBorel measures$\}$とし，

$$U_S(M_1(X)) \equiv \{\mu \in M_1(X);\ \nu \in M_1(X),\ \int_X f\,d\nu = \int_X f\,d\mu\ \forall f \in S$$
$$\text{ならば}\ \int_X h\,d\nu = \int_X h\,d\mu\ \forall h \in C(X)\}$$

とする。次が高橋氏の定理である。

高橋定理．$T \in L(C(X))$, $\|T\| = 1$とする。次は同値である。

i) $T \in BKW(C(X); S)$,

ii) $T^* \delta_z \in U_S(M_1(X))\ \forall z \in X$，ここで$\delta_z$は$z$のunit point mass。

ここでは，これらの結果を次の点に対して考察したい。

1) BKWの定義におけるnetをsequenceに変えたら？

2) $C(X)$をfunction algebraに変えたら？

3) disk, polydisk, ball algebrasの時は？

§1．s-BKW-作用素

$T \in s\text{-}BKW(C(X); S)$であるとは(sequential BKW-作用素)，

s-BKW：$\forall \{T_n\}_n \subset L(C(X))$ sequence s.t. $\|T_n\| \to \|T\|$,

$\|T_n f - Tf\|_\infty \to 0\ \forall f \in S$に対して，$\|T_n g - Tg\|_\infty \to 0\ \forall g \in C(X)$。

sequence近似の方が量が少ないから，一般に

$$BKW(C(X);\mathcal{S}) \subset s\text{-}BKW(C(X);\mathcal{S})$$

である。上で等号が成立するための十分条件としては次がある。

定理1[4]. $\mathcal{S}$が separable の時,

$$BKW(C(X);\mathcal{S}) = s\text{-}BKW(C(X);\mathcal{S})。$$

よって等号が成立しない時を考察するためには，test functions $\mathcal{S}$が separable でないものを対象にする必要がある。初めて等号が成立しない例を示したのは，Scheffold[6] であった。

Scheffoldの例. βN を $N=\{1,2,\cdots\}$ の Stone-Čech のコンパクト化として，$x_0 \in \beta N \setminus N$ とする。$\mathcal{S} \equiv \{f \in C(\beta N); f(x_0)=0\}$ とする。$I \in s\text{-}BKW(C(\beta N);\mathcal{S})$, $I \notin BKW(C(\beta N);\mathcal{S})$ である，ここで I は恒等作用素である。

次に上の例の様に$\mathcal{S}$として，$C(X)$ の closed ideal とし，特別な作用素に対して，BKW と s-BKW の作用素のちがいを調べてみる。

$$\mathcal{S} \equiv \{f \in C(X);\ f=0 \text{ on } T\}$$

とする，P は X の non-empty closed subset である。$h \in C(X)$ に対して乗法作用素を

$$M_h : C(X) \ni f \to hf \in C(X)$$

とする。$\|M_h\| = \|h\|_\infty$ である。連続な $\varphi : X \to X$ に対して合成作用素を

$$C_\varphi : C(X) \ni f \to f \circ \varphi \in C(X)$$

とする。$\|C_\varphi\| = 1$ である。対象にするのは荷重合成作用素

$$T = M_h C_\varphi \ , \quad \|h\|_\infty = 1$$

である。この時，$\|T\| = 1$ である。

定理 2 [5]．上の荷重合成作用素 T に対して
$T \in BKW(C(X); S) \iff \varphi^{-1}(P) = \phi$ かつ $|h| = 1$ on X。

sequential type を特徴づけるためには，位相的な新しい概念を導入する必要がある。空でない閉集合 $E \subset X$ が quasi G_δ であるとは

$$\exists U_n \text{ open の列 s.t. } E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} ,$$

ここで $\overline{U_n}$ は closure を表す。

定理 3 [5]．$T \in s\text{-}BKW(C(X); S)$ である必十条件は
i) $\varphi^{-1}(P)$ は X の quasi G_δ-subset を含まない，

ii) $|t_i| = 1$ on X。

Scheffold は $I \in$ s-BKW$(C(X); S)$ となる十分条件を与えているが，それらは必十条件になり，アが quasi G_δ を含まないことと同値になる。

問題1．S が ideal の時，s-BKW$(C(I); S)$ を決定せよ。

問題2．S が C^*-subalgebra の時，いつ荷重合成作用素が s-BKW$(C(I); S)$ に入るか？

§2. Function algebras

A を function algebra とし，$M(A)$, ∂A で maximal ideal space, Shilov boundary を表す。$S \subset A$ に対して，BKW$(A; S)$, s-BKW$(A; S)$ が同様に定義できる。この時 S に対する A の uniqueness set も次のように定義できる。A^* で dual space を表し，A_1^* でその closed unit ball とする。

$U_S(A_1^*) = \{F \in A_1^*;\ G \in A_1^*,\ G(f) = F(f)\ \forall f \in S \Rightarrow F = G \text{ on } A\}$

とする。すると高橋定理と同様のことが証明できる。そして Altomare[1] の問題を肯定的に答えている。

定理4[4]．$T \in L(A)$, $\|T\| = 1$ とする。このとき

$T \in$ BKW$(A; S) \Longleftrightarrow T^*\delta_z \in U_S(A_1^*)\ \ \forall z \in \partial A$。

この定理により，本来のKorovkinの定理の様に，具体的な function algebra A と S に対して $BKW(A;S)$ を決定することができる。

定理5 [4]. $\mathcal{A}$ を disk algebra とする。

i) $BKW(\mathcal{A};\{1,z\}) = \{aM_\psi C_\varphi ;\ \psi, \varphi$ は有限 Blaschke, $a \in \mathbb{C}\}$,

ii) $n \geq 2$ に対して，$BKW(\mathcal{A};\{1,z^n\}) = \{0\}$。

$T \in BKW(\mathcal{A};\{1,z,z^2\})$ の時

$T = aM_{\psi_1}C_{\varphi_1} + bM_{\psi_2}C_{\varphi_2}$， $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ は有限 Blaschke

となりそうであるが，そうではない。

問題3. $BKW(\mathcal{A};\{1,z,z^2\})$ を決定せよ。

例1. $\lambda(e^{i\theta}) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 2)/4$ とし，

$$(Tf)(e^{i\theta}) = (\lambda C_z + (1-\lambda)C_{z^2})(f)(e^{i\theta}) \quad \forall f \in \mathcal{A}$$

とする。$T \in BKW(\mathcal{A};\{1,z,z^2\})$ であるが，$\lambda \notin \mathcal{A}$ である。

例2. $\lambda(e^{i\theta}) = (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2} + 2)/4$ とし，

$$(Tf)(e^{i\theta}) = (\lambda C_{\sqrt{z}} + (1-\lambda)C_{-\sqrt{z}})(f)(e^{i\theta}) \quad \forall f \in \mathcal{A}$$

とする。$T \in BKW(\mathcal{A};\{1,z,z^2\})$ であるが，$\sqrt{z} \notin \mathcal{A}$ である。

$n \geq 2$ に対して，$A(T^n)$, $A(B_n)$ を polydisk, ball algebras とし，$z_1, \cdots, z_n$ を座標関数とする。

定理 6 [3]． $T \in BKW(A(T^n); \{1, z_1, \cdots, z_n\})$

$\iff$ $T = a M_u C_\Phi$， u は連続な inner, $\Phi : \overline{D}^n \to \overline{D}^n$ は holomorphic map on D^n で $\Phi(T^n) \subset T^n$ とかける。

定理 7 [3]． $T \in BKW(A(B_n); \{1, z_1, \cdots, z_n\})$

$$\iff \begin{cases} T = a C_\Phi, \ \Phi \in Aut(B_n) \\ \text{又は} \\ \exists \zeta_0 \in \partial B_n \text{ s.t. } Tf = a f(\zeta_0) \quad \forall f \in A(B_n) \end{cases}$$

§ 3．最後に

単位開円周上 ∂D の H^∞ に対して，Korovkin 型の定理があり得るかが問題になる。C を ∂D 上の連続関数の空間とすると，$H^\infty + C$ は L^∞ の closed subalgebra になることが知られている (Sarason)。

$$QA \equiv H^\infty \cap \overline{(H^\infty + C)}$$

とする。

定理 8． $I \in s\text{-}BKW(H^\infty; QA)$, $I \notin BKW(H^\infty; QA)$ である。

問題4. $\{T_n\}_n$ を L^p 上の作用素の列で $\|T_n\| \to 1$ かつ $T_n \to I$ strongly とする。この時, $T_n \to I$ uniformly か？

参考文献

1. F. Altomare, Korovkin closures in Banach algebras, Operator Theory Adv. Appl. 17 (1986), 35-42.
2. F. Altomare and M. Campiti, Korovkin-type approximation Theory and its applications,
3. K. Izuchi, Y. Matsugu, and H. Takagi, BKW-operators on the polydisc and ball algebras, Far East J. Math. Sci., to appear.
4. K. Izuchi, H. Takagi, and S. Watanabe, Sequential BKW-operators and function algebras, J. Approx. Theory 84 (1996), to appear.
5. ———, Sequential Korovkin type theorems and weighted composition operators, preprint.
6. E. Scheffold, Über die punktwise Konvergenz von Operatoren in C(X), Rev. Acad. Ci. Zaragoza (2) 28 (1973), 5-12.
7. S.-E. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators on normed spaces, J. Approx. Theory 72 (1993), 174-184.
8. ———, (T, E)-Korovkin closures in normed spaces and BKW-operators, J. Approx. Theory 82 (1995), 340-351.