数理解析研究所講究録
947巻 1996年 67-78

価値が時間に関係する縄張りのゲーム

大阪府大総合科　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
三菱重工業(株)　山田康吉 (Yasuyoshi Yamada)

1. 問題とモデル

ここで扱う問題は，2種の動物がある縄張りをめぐって競う現象の理論的説明づけから示唆されたゲームであり，2企業間のある新製品の市場をめぐる競争や広告の問題に応用できる問題である。

Player I とII がある縄張りをめぐって対立している。その対立は，にらみ合いにはじまり，そのにらみ合いを単位時間区間 $[0,1]$ の中でより長く持続できた方が勝ちとなる。勝者は $V(t)$ の価値をもつ縄張りを手に入れることができるが，時刻 t まで持続するためには，両者とも $k(t)$ の費用を使わなければならない。更に価値 $V(t)$ は，$V(0) \geqq 0$ であり $V(1) = 0$ と変化するものとする。各々は，どの時刻でこのにらみ合いを断念すべきか，互に相手の行動を考えに入れながら決めなければならない。

このような問題にあっては，両プレーヤにとって利用できる情報様式には2つの型がある。両者共相手の行動が常に観測でき，どの時刻においても，相手がまだ頑張っているのか，もう既に断念してしてしまったのかが知らされる場合をNoisy型とよび，反対に，両者は互に相手から自分の行動を観測されない状態にしてあり，そのため何の情報もない中でどの時点まで頑張るかをあらかじめ決定し，自分の計画した時間が実現されてみてはじめて相手がまだ頑張っているのかもう既に断念してしまった後なのかが知らされる場合をSilent型と呼ぶ。この組合せとして Player I は silent player で II が noisy player の時，Silent-noisy 型と呼んでいる。

後の議論の為 以下のように仮定と記号を設定する：

両プレーヤにとって許された行動区間は有限区間とするのが自然であり，上記のように $[0,1]$ としても一般性は失なわれない。

頑張りの価値 $V(t)$ は通常ある時刻までは増加し，その後減少とするのが自然であるが，もっと一般的に扱うため

$V(t)$ は $(0,1)$ 上で連続的微分可能

$V(0) \geqq 0$，$V(1)=0$ かつ $V(t)>0$ $t \in (0,1)$

として 別の条件を費用とからめて加える．

持続に要する費用 $k(t)$ も $k(0)=0$ とするのが自然だが

$h(t)$ は $(0,1)$ 上で連続的微分可能

$h(0) \geqq 0$ かつ $h'(t) > 0 \quad t \in (0,1)$

と仮定する。

上記のように $v(t)$ と $h(t)$ を仮定した上で

$v(t) - h(t)$ は $[0,1]$ 上で unimodal

との条件を加える。そして m を $v(t)-h(t)$ の $[0,1]$ での最大値を与える t の値とし $v(m)-h(m) > 0$ とする。したがって

$$v'(t) - h'(t) \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0, \quad t \in \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} m$$

が成立する。

次に $x \in [0,1]$ と $y \in [0,1]$ をそれぞれ Player I, II の純戦略としたとき，それぞれ混合戦略として $[0,1]$ 上の cdf. $F(x)$ と $G(y)$ を用いた場合，$[0,1] \times [0,1]$ 上の実数値関数（利得関数）$M_i(x,y)$ に対して 次のように期待値の記号を用いることとする：

$$M_i(F,y) = \int_0^1 M_i(x,y)\,dF(x) \;;\; M_i(x,G) = \int_0^1 M_i(x,y)\,dG(y),$$
$$M_i(F,G) = \int_0^1 \int_0^1 M_i(x,y)\,dF(x)\,dG(y).$$

また，次の関数も定義しておく。

$$\theta(z) = \exp\left(-\int_m^z \{h'(t)/v(t)\}\,dt\right), \quad m \leqq z \leqq 1.$$

2. Noisy Game

ここでは，両プレーヤとも相手の行動を常に観測できるから，$x\in[0,1]$ と $y\in[0,1]$ をそれぞれIとIIの純戦略とし $M_i(x,y)$ を Player i にとっての期待利得とすると $(i=1,2)$

$$(1)\qquad M_1(x,y)=\begin{cases}-k(x), & x<y\\ \frac{1}{2}v(x)-k(x), & x=y\\ \max_{x\geqq y}\{v(x)-k(x)\}, & x>y\end{cases};$$

$$(2)\qquad M_2(x,y)=\begin{cases}-k(y), & y<x\\ \frac{1}{2}v(y)-k(y), & y=x\\ \max_{y\geqq x}\{v(y)-k(y)\}, & y>x\end{cases}$$

が得られる。ここで

$$\max_{x\geqq y}\{v(x)-k(x)\}=\begin{cases}v(m)-k(m), & y\leqq m\\ v(y)-k(y), & y>m\end{cases};$$

$$\max_{y\geqq x}\{v(y)-k(y)\}=\begin{cases}v(m)-k(m), & x\leqq m\\ v(x)-k(x), & x>m\end{cases}.$$

さて，非0和ゲーム (1) と (2) では，純戦略の中に平衡点は存在しない。したがって混合戦略の中から平衡戦略をさがすこととし，IとIIの混合戦略を次のように想定する：

$M_1(x,y)$ と $M_2(x,y)$ の対称性より両者の混合戦略は共通な cdf on $[0,1]$ の $F(\cdot)$ で，$(m,1)\subset[0,1]$ 上での density part $f(\cdot)>0$ および点 m での mass part

$\alpha \leqq 0$ より構成される。

そうすると

$$\text{(3)}\quad M_2(F, y) = \begin{cases} -h(y), & 0 \leqq y < m \\ \alpha\{\frac{1}{2}\nabla(m) - h(m)\} - h(m)\{1 - F(m)\}, & y = m \\ \alpha\{\nabla(m) - h(m)\} + \int_m^y \{\nabla(x) - h(x)\} f(x)dx \\ \qquad - h(y)\{1 - F(y)\}, & m < y \leqq 1 \end{cases}$$

が得られる。そこで $M_2(F, y) = \text{const for } y \in (m, 1]$ を満足する $F(\cdot)$ を求めると

$$f(y) / \{1 - F(y)\} = h'(y) / \nabla(y), \quad y \in (m, 1)$$

すなわち

$$F(x) = 1 - k\theta(x), \qquad x \in (m, 1)$$

または

$$f(x) = k\theta(x), \qquad x \in (m, 1)$$

を得る。したがって、次の(4)と(5)を得る。

$$\text{(4)}\quad F^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < m \\ \alpha, & x = m \\ 1 - (1 - \alpha)\theta(x), & m < x < 1 \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

$$\text{(5)}\quad M_2(F^*, y) = \begin{cases} -h(y), & 0 < y < m \\ \frac{1}{2}\alpha\nabla(m) - h(m), & y = m \\ \alpha\nabla(m) - h(m), & m < y \leqq 1. \end{cases}$$

この関係は $M_1(x, G^*)$ についても同様であるから

$$(6)\quad M_1(x, G^*) = \begin{cases} -h(x), & 0 < x < m \\ \frac{1}{2}\alpha V(m) - h(m), & x = m \\ \alpha V(m) - h(m), & m < x \leqq 1 \end{cases}$$

が成立する．ここに $G^*(y) = F^*(y)$．

定理 I．cdf F^* を次式で与えられるものとする：

$$F^*(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < m \\ 1 - \theta(z), & m \leqq z \leqq 1 \end{cases}.$$

そうすると $(F^*(x), F^*(y))$ はゲーム (1), (2) の平衡点であり，この時 $M_1(F^*, F^*) = M_2(F^*, F^*) = -h(m)$ となる．

3. Silent Game

ここでは，両者は共に相手の行動が観測できないから，I と II の期待利得 $M_1(x, y)$ と $M_2(x, y)$ は次式で与えられる：

$$(7)\quad M_1(x, y) = \begin{cases} -h(x), & x < y \\ \frac{1}{2}V(x) - h(x), & x = y \\ V(x) - h(x), & x > y \end{cases};$$

$$(8)\quad M_2(x, y) = \begin{cases} -h(y), & y < x \\ \frac{1}{2}V(y) - h(y), & y = x \\ V(y) - h(y), & y > x \end{cases}.$$

前節と同様に混合戦略の中から平衡戦略を求めることとし，

IとIIの混合戦略 $F(x)$ と $G(y)$ を次のように想定する。

$F(\cdot)$ と $G(\cdot)$ は同一の $[0,1]$ 上の cdf であり，ある区間 $(m, u) \subset [0,1]$ での density part $f(\cdot) > 0$ と点 m での mass part $\alpha > 0$ および点 u での mass part $\beta \geqq 0$ とで構成される。

そうすると

$$
(9)\quad M_2(F, y) = \begin{cases} -h(y), & 0 \leqq y < m \\ \alpha\{\frac{1}{2}v(m) - h(m)\} - h(m)(1-\alpha), & y = m \\ \alpha\{v(m) - h(m)\} + v(y)\{F(y) - \alpha\} \\ \qquad - h(y)(1-\alpha), & m < y < u \\ \alpha\{v(m) - h(m)\} + v(u)(1 - \frac{1}{2}\beta - \alpha) \\ \qquad - h(u)(1-\alpha), & y = u \\ \alpha\{v(m) - h(m)\} + v(y)(1-\alpha) \\ \qquad - h(y)(1-\alpha), & u \leqq y \leqq 1. \end{cases}
$$

そこで，$v'(t) < 0$ for $t \in (m, 1)$ という条件を加え，u^0 を方程式 $v(t) = h(t) - h(m)$ の $(m, 1)$ における唯一根とする。そして $\alpha = \beta = 0$ として cdf

$$
(10)\quad F^0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x < m \\ \{h(x) - h(m)\}/v(x), & m \leqq x < u^0 \\ 1, & u^0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}
$$

を考えると

$$M_2(F^0, y) = \begin{cases} -h(y) < -h(m), & 0 \leqq y < m \\ -h(m), & m \leqq y < u^0 \\ V(u^0) - h(u^0) = -h(m), & y = u^0 \\ V(y) - h(y) < -h(m), & u^0 < y \leqq 1. \end{cases}$$

まったく同様にして

$$M_1(x, F^0) = \begin{cases} -h(x) < -h(m), & 0 \leqq x < m \\ -h(m), & m \leqq x < u^0 \\ V(u^0) - h(u^0) = -h(m), & x = u^0 \\ V(x) - h(x) < -h(m), & u^0 < x \leqq 1. \end{cases}$$

以上より次の定理を得る。

定理2. $V'(t) < 0$ for $t \in (m, 1)$ を仮定し，u^0を方程式 $V(t) = h(t) - h(m)$ の $(m, 1)$ における唯一根とする。そうすると cdf

$$F^0(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x < m \\ \{h(x) - h(m)\}/V(x), & m \leqq x < u^0 \\ 1, & u^0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

の対 $(F^0(x), F^0(y))$ は非0和ゲーム (7) と (8) の1つの平衡点となり，$M_1(F^0, F^0) = M_2(F^0, F^0) = -h(m)$ となる。

4. Silent-Noisy Game

ここでは，Player Ⅰは相手の停止時刻を観測できるが，逆にⅡはできない。すなわち，Ⅰはsilent playerで Ⅱはsilent playerであるゲームを扱う。Player iへの期待利得を $M_i(x,y)$ とすると $(i=1,2)$

$$(11)\qquad M_1(x,y)=\begin{cases} -h(x), & x<y \\ \frac{1}{2}V(x)-h(x), & x=y\,; \\ \max\limits_{x\geqq y}\{V(x)-h(x)\}, & x>y \end{cases}$$

$$(12)\qquad M_2(x,y)=\begin{cases} -h(y), & y<x \\ \frac{1}{2}V(y)-h(y), & y=x \\ V(y)-h(y), & y>x\,. \end{cases}$$

前2節と同様に，$V(t)-h(t)$ を $[0,1]$ で最大にする t を m とし，$[m,1]$ においては $V(t)$ は t につき減少であると仮定する。このゲームでも純戦略の中に平衡戦略は存在しない。そこで前2節での考察を参照しながら $[0,1]$ 上の cdf's $F(x)$ と $G(y)$ を次のように想定する。

Player Ⅰの混合戦略 $F(x)$ は区間 (m,u) 上の density part $f(x)>0$ および $x=m$ での mass part $\alpha\geqq 0$ と $x=u$ での mass part $\beta\geqq 0$ とで構成される。

Player Ⅱの混合戦略 $G(y)$ は同じ区間 (m,u) 上の density part $g(y)>0$ および $y=m$ での mass part

$\alpha' \geqq 0$ と $y=u$ での mass part $\beta' \geqq 0$ とで構成される。
そうすると

$$
(13)\quad M_2(F,y)=\begin{cases}
-h(y), & 0\leqq y<m\\
\alpha\left\{\frac{1}{2}V(m)-h(m)\right\}-(1-\alpha)h(m), & y=m\\
\alpha\{V(m)-h(m)\}+\{F(y)-\alpha\}V(y) \\ \qquad -(1-\alpha)h(y), & m<y<u\\
\alpha\{V(m)-h(m)\}+(1-\alpha-\frac{1}{2}\beta)V(u) \\ \qquad -(1-\alpha)h(u), & y=u\\
\alpha\{V(m)-h(m)\}+(1-\alpha)\{V(y)-h(m)\}, & u<y\leqq 1
\end{cases}
$$

$$
(14)\quad M_1(x,G)=\begin{cases}
-h(x), & 0\leqq x<m\\
\alpha'\left\{\frac{1}{2}V(m)-h(m)\right\}-h(m)\{1-G(m)\}, & x=m\\
\alpha'\{V(m)-h(m)\}+\int_m^x\{V(y)-h(y)\}g(y)dy \\ \qquad -h(x)\{1-G(x)\}, & m<x<u\\
\alpha'\{V(m)-h(m)\}+\int_m^u\{V(y)-h(y)\}g(y)dy \\ \qquad +\beta'\left\{\frac{1}{2}V(u)-h(u)\right\}, & x=u\\
\alpha'\{V(m)-h(m)\}+\int_m^u\{V(y)-h(y)\}g(y)dy \\ \qquad +\beta'\{V(u)-h(u)\}, & u<x\leqq 1
\end{cases}
$$

を得る。前2節と同様にして

$$M_2(F,y)=\text{const} \quad \text{for } y\in(m,u)\ ;$$
$$M_1(x,G)=\text{const} \quad \text{for } x\in(m,u)$$

を考える。今 $\alpha=\beta=0$ と置いて，u^0を方程式

$$\nabla(t) = h(t) - h(m), \quad t \in [m, 1]$$

の唯一根とし，$[0,1]$ 上の cdf $F^\circ(x)$ を

$$(15) \quad F^\circ(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x < m \\ \{h(x) - h(m)\} / \nabla(x), & m \leqq x < u^\circ \\ 1, & u^\circ \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

と選ぶと

$$(16) \quad M_2(F^\circ, y) = \begin{cases} -h(y) < -h(m), & 0 \leqq y < m \\ -h(m), & m < y < u^\circ \\ \nabla(u^\circ) - h(u^\circ) = -h(m), & y = u^\circ \\ \nabla(y) - h(y) < -h(m), & u^\circ < y \leqq 1 \end{cases}$$

が成立し，$[0,1]$ 上の cdf $G^\circ(y)$ を

$$(17) \quad G^\circ(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq y < m \\ \alpha' & y = m \\ 1 - (1-\alpha')\theta(y) & m < y < u^\circ \\ 1 & y = 1 \end{cases}$$

とすると

$$(18) \quad M_1(x, G) = \begin{cases} -h(x), & 0 \leqq x < m \\ \frac{1}{2}\alpha' \nabla(m) - h(m), & x = m \\ \alpha' \nabla(m) - h(m), & m \leqq x < u^\circ \\ \alpha' \nabla(m) - h(m) + \frac{1}{2}\beta' \nabla(u^\circ), & x = u^\circ \\ \alpha' \nabla(m) - h(m) + \beta' \nabla(u^\circ), & u^\circ < x \leqq 1 \end{cases}$$

が得られる。ここに $\beta' = (1-\alpha)\theta(u^0)$ である。

以上より次の定理を得る。

定理3. $V(t) - k(t)$ は $m \in [0,1]$ で最大値をとり，$V(t)$ は $[m,1]$ で t につき減少とする。また u^0 を区間 $[m,1]$ における方程式 $V(t) = k(t) - k(m)$ の唯一根とする。いま $[0,1]$ 上の cdf's $F^0(x)$ と $G^0(y)$ を次式のように定義する。

$$F^0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq x < m \\ \{k(x) - k(m)\}/V(x), & m \leqq x \leqq u^0 \\ 1, & u^0 < x \leqq 1 \end{cases}$$

$$G^0(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq y < m \\ 1 - \theta(y) + \theta(u^0) I_{u^0}(y) & m \leqq y \leqq u^0 \\ 1 & u^0 < y \leqq 1 \end{cases}$$

そうすると非0和ゲーム(7)と(8)に対して

$$M_1(F^0, G^0) = -k(m) \quad ; \quad M_2(F^0, G) \leqq -k(m) = M_2(F^0, G^0)$$

が成立する。

参考文献

J. Smith, Evolution and the Theory of Games, Cambridge University Press, 1982.

Y. Teraoka, A silent-noisy game for a duopolistic territory, The Proceedings of APOR'S 94, 258-265, 1995.