

# Sullivan の辞書, Teichmüller spaces, そして中心予想

谷口雅彦 (Masahiko Taniguchi)  
京大・理・数学

## 1 Teichmüller spaces と Sullivan の辞書

$\mathbb{C}$ 上のクライン群の作用と正則函数の反復合成の作用の類似性は古くから知られていたが、Sullivan の no-wandering domain theorem (trans-Ahlfors finiteness theorem) の証明 (1985) 前後から、再び注目をあびることになった。

力学系としてのクライン群  $\Gamma$  はその作用が穏やかな通常集合  $\Omega = \Omega(\Gamma)$  と作用がカオス的な極限集合  $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$  に2分される。その正則函数  $f$  の反復合成の力学系における対応物が、それぞれファトウ集合  $F = F(f)$  とジュリア集合  $J = J(f)$  である。これらの集合の性質をはじめとし、力学系そのものの性質や、その証明における戦略まで、両者の間に見て取れる類似性を意識的に取り出したものが、いわゆるサリヴァンの辞書である。したがってその対照項目には、有理函数が有限生成クライン群に対応しているといった、極めて明確なものから、いまのところ対応関係が非常に漠としてるものまで含まれている。いわば、ダイナミックに変化し続けている「辞書」である。

ここでは、力学系を再び静的な幾何学的対象と捉えることにより得られる Teichmüller 空間論にまつわる項目を話題にする。まずクライン群にたいしては定義より

**Proposition 1** (ねじれなしの) クライン群  $\Gamma$  に対し

$$\text{Teich}(\Gamma) = M_1(\Lambda, \Gamma) + \text{Teich}(\Omega/\Gamma)$$

であり、 $\Gamma$  が有限生成のときは  $Teich(\Gamma)$  の有限次元性などをもちい右辺第2項についての Ahlfors finiteness theorem (AFT) がでる。さらに右辺第1項について Sullivan rigidity theorem (SRT) がなりたつ。一方、Ahlfors area 0 conjecture (AAC) は未解決である。

一方、有理函数  $R$  の場合には

**Theorem 2 McMullen-Sullivan's trans-AFT**

$$Teich(\hat{C}, R) = M_1(J, R) + Teich(F^{dis}, R) + Teich(F^{fol}, R)$$

でありすべての項は有限次元である。

となる。第2項は

$$(\text{吸引鉢、放物鉢} - \text{特異全軌道の閉包}) / R$$

の Teichmüller 空間であり、それ以外ないという「trans-AFT」が Sullivan の no wandering domain theorem である。

第3項は

$$(\text{Siegel, Hermann, 超吸引鉢} - \text{特異全軌道の閉包}) / R$$

であり、クライン群の Teichmüller 空間には出てこない。一方、「trans-SRT」はいまだに分からない。これが NILF 予想 (trans-SRT 予想) であり、我々が中心予想とよぶ問題群の一角である。

**Conjecture 剛性予想 (NILF)** 有理函数は integral torus endomorphism でない限り NILF である (すなわち  $M_1(\hat{C}, R) = \{0\}$ )。

**Remark** 「trans-AAC」については Nowicki-Van Strien の例 (Fibonacci maps) より面積0予想 (trans-AAC) は一般には成り立たないことが分かった。(しかし NILF の反例にはなっていない。ただし Lyubich によれば、その応用として ergodic でない多項式もつくれる。)

## 2 中心予想

Sullivan の有名な 3 部作の第 2 部はクライン群の安定性についての定理であった。その一つの variant は次のように書ける。

**Theorem 3** ねじれなしの有限生成クライン群が擬等角安定ならば幾何学的有限である。

幾何学的有限性は 3 次元双曲多様体での凸核のコンパクト性を介して、有理函数のジュリア集合での分岐軌道の閉包のコンパクト性、すなわち双曲性 (hyperbolicity) に変換される。一方、有理函数の安定性については既に Mañé-Sad-Sullivan により次の基本定理 (ODT) が得られていた。

**Theorem 4** 安定な有理函数は有理函数全体のなかで open dense である。

数々の「orbit relations」の非存在を parabolic elements の非存在と対応させることによりこれら一見無関係な主張は根源的な問を投げ掛けていることに Sullivan は気づいたのであった。すなわち、まずクライン群に対しては

**Conjecture** 擬等角安定な、parabolic elements を含まない、ねじれなしの有限生成クライン群は有限生成クライン群のなかで open dense である。

この予想の一つの variant が Thurston の「geometrically-finites are dense」予想である。一方有理函数の反復合成については次の予想 (trans-ODT 予想) が生じる。

**Conjecture** 安定な有理函数は双曲型である。

ここで安定性の解釈には多様性があり、予想はある意味で恣意的である。そこで ODT と合わせて、次の予想が中心的な予想となる。

**Conjecture** 稠密性予想 (HD) 双曲型有理函数は全体のなかで dense である。

ここで次の定理は特筆に値する。

**Theorem 5** 一般の有理函数について *NILF* 予想 (*trans-SRT* 予想) から *HD* 予想がでる

*Proof.* まず擬等角安定な有理函数の集合  $X$  は有理函数のなかで open dense でこのような集合の元は Siegel, Hermann, parabolic, (pre)preiodic criticals をもたない。すなわち周期成分は attractive のみである。

さらに integral torus endomorphisms 全体も codimension 正より NILF がなりたてば general な  $X$  の元にたいし  $Teich(\hat{C}, R) = Teich(F^{dis}, R)$  で attractive periodic が  $2k-2$  個あることが分かり、とくに hyperbolic である。 ■

さらに2次多項式の場合には NILF 予想、HD 予想はそれぞれ

**Conjecture** 2次多項式の場合の剛性予想 (NILF2) 任意の2次多項式はNILF である。

**Conjecture** 2次多項式の場合の稠密性予想 (HD2) 双曲型2次多項式は2次多項式のなかで dense である。

となるが、複素1次元の特殊性より

**Theorem 6**  $NILF2 = HD2$

*Proof.* HD なら Mandelbrot set の内部が hyperbolic であり、そこではジュリア集合の面積0である。もともとこれらは dense より変形空間がそれ以外存在できない。 ■

### 3 局所連結性予想と繰り込み可能性

2次のときの HD (=NILF) 予想は じつは見掛け上もっと素朴なつぎの予想に含まれる。

**Conjecture** 局所連結予想 (MLC) Mandelbrot set (the connected locus)  $M$  は局所連結である。

これは  $P_c(z) = z^2 + c$  に対するベトヒャー函数からつくられる単位円板の外部から  $M$  の外部へのリーマン写像、具体的には

$$F(z) = z \prod \left( 1 + \frac{z}{P_z^n(z)^2} \right)^{2^{-n-1}}$$

の逆写像が境界まで連続にのびるかという等角写像論の基本的な境界値問題と同値である (Caratheodory の定理)。

**Theorem 7** [Douady-Hubbard]  $MLC$ が成立すれば、 $HD2$ も正しい。

*Proof.*  $MLC$ が成立すれば つぎの定理より中立周期点を持たない  $c$  については組み合わせ的に rigid である。 $HD2$  が成り立たないと Mandelbrot set の内部の成分の点  $c_0$  で  $ILF$  が存在するがその成分の境界は generic に中立周期点を持たない。したがって  $c_0$  と組み合わせ的に同値な境界点  $c_1$  があるが 仮定より rigid で  $c_0$  と  $q c$  同値である。これは  $c_1$  が Mandelbrot set の内点であることを意味し矛盾を得る。 ■

**Theorem 8** [Douady-Hubbard-Yoccoz]  $M$  の点  $c$  に対し

- 1)  $P_c$  が中立周期点を持つとき、 $c$  で  $M$  は局所連結である。
- 2)  $P_c$  が中立周期点を持たないときは、 $c$  で  $M$  が局所連結と  $P_c$  が組み合わせ的に rigid は同値である。

**Corollary 1**  $MLC$ が成り立てば  $P_c$  が中立周期点を持たないようなすべての  $c$  で  $P_c$  は組み合わせ的に rigid である。

また、次のようにも言える。

**Corollary 2** 組み合わせ的に rigid な  $M$  の点が dense ならば、 $HD2$  は正しい。

ここで中立周期点を持たない  $P = P_c$  が組み合わせ的に rigid とは、他の同様の  $Q \in M$  に対して有理的 lamination pattern が一致すれば、ジュリア集合上のみならず  $q c$  写像により共役となることをいう。

**Remark** このような剛性はクライン群のほうでもまだ分からないことがある。いわゆる Thurston's ending lamination conjecture はその文脈の予想である。

さらにジュリア集合の複雑さのひとつのあらわれが無限繰り込み可能性である。

**Theorem 9** [Yoccoz]  $M$  の点  $c$  に対し  $P_c$  が無限繰り込み可能でなければ、 $NILF$  であり、 $c$  で  $M$  は局所連結である。

*Proof.* 簡単のため任意の parabolic cycle は repelling とする。 $P_c$  が無限繰り込み可能でないことから  $J_c$  が局所連結がわかる (いわゆる Yoccoz puzzle)。Mandelbrot set とジュリア集合の間の類似性の議論から  $c$  で Mandelbrot set も局所連結であることがわかる。 $MLC$  なら  $HD$  の証明の局所 version として  $NILF$  も示せるから主張を得る。 ■

**Corollary 3**  $c \in M$  で *NILF* でないなら  $P_c$  は無限繰り込み可能である。

無限繰り込み可能でないことは、力学系のある種の素直性を意味している。一方、 $P_c$  が無限繰り込み可能な  $M$  の点  $c$  に対しても、局所連結性が成り立つ場合も多々ある。たとえば Lyubich はそのような非可算集合を与えている。

**Proposition 10** [Lyubich-宍倉]  $P_c = z^2 + c$  が中立周期点を持たないとき、無限繰り込み可能でなければ、ジュリア集合の面積 0 である。

これは幾何学的素直なクライン群に対する Thurston の面積 0 定理の変換であると思える。

## 4 関連する話題からの付記

まず参考までに Mandelbrot set とジュリア集合の間の類似性で対応する次の定理をあげる。

**Proposition 11** [Yoccoz]  $M$  の点  $c$  に対し  $P_c$  が無限繰り込み可能でなく、Cremer 点も Siegel disks ももたなければ、ジュリア集合は局所連結である。

**Proposition 12** [Levin-vanStrien]  $P(z) = z^n + c$  で  $n$  が偶数  $c$  が実ならジュリア集合は全不連結か局所連結である。

次に実の 2 次多項式の場合には *NILF* 予想、*HD* 予想はそれぞれ

**Conjecture 実 2 次多項式の場合の剛性予想 (*NILF2real*)** 任意の実 2 次多項式は *NILF* である。

**Conjecture 実 2 次多項式の場合の稠密性予想 (*HD2real*)** 双曲型実 2 次多項式は実 2 次多項式のなかで dense である。

となるが、今の場合には明らかに *HD2real* から *NILF2real* がでる。また *HD2real* が正しいことを証明したと Świątek と Lyubich が主張している。*NILF2real* については、次の定理もある。

**Proposition 13** [McMullen]  $M$  の実の点  $c$  に対し  $P_c$  が無限繰り込み可能ならば、NILFである。

とくに実軸とまじわる  $M$  の内部のすべての成分は双曲型のみからなる。

これは上記の Yoccoz の定理と合わせて NILF<sub>2real</sub> 予想の肯定的解答である。ただし HD<sub>2real</sub> を意味しない。

また Mandelbrot vertion の面積 0 予想も未解決のようだが、Hausdorff 次元は 2 である (宍倉の定理)。

最後に 10 年前越しの質問を記しておく。

**問題** いつジュリア集合は面積正になるか? そしていつ ergodic components が複数になるか? その数の評価は?

## 参考文献

- [1] M. Lyubich, Geometry of quadratic polynomials; Moduli, rigidity and local connectivity, preprint.
- [2] G. Levin and S. van Strien, Local connectivity of the Julia set of real polynomials, preprint.
- [3] R. Mañé, P. Sad, and D. Sullivan, On th dynamics of rational maps, Ann. Sci. Eć. Norm. Sup. **16** (1983), 193-217.
- [4] G. Levin and S. van Strien, Local connectivity of the Julia set of real polynomials, preprint.
- [5] C. McMullen, Complex dynamics and renormalization, Ann. Math. Studies **135** 1994.
- [6] C. McMullen, Frontiers in complex dynamics, Bull. A.M.S. **31** 1994, 155-172.
- [7] C. McMullen, Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle, preprint.

- [8] C. McMullen and D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III: The Teichmüller spaces of a holomorphic dynamical system, preprint.
- [9] S. van Strien and T. Nowicki, Polynomial maps with a Julia set of positive Lebesgue measure: Fibonacci maps, preprint.
- [10] J. Milnor, Local connectivity of Julia sets: Expository lectures, preprint.
- [11] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann. of Math.* **122** (1985), 401-418.
- [12] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics II: Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups, *Acta Math.* **150** (1985), 243-260.
- [13] G. Świątek, Hyperbolicity is dense in the real quadratic family, preprint.