数理解析研究所講究録
962巻 1996年 19-31

$\mathrm{M}_{24}\sim\mathbb{M}$ (II, III)

北詰正顕（千葉大理），宮本雅彦（愛媛大理）

1 序文

3回講演の2回目と3回目として、モンスター単純群の話をします。実際にはモンスター単純群を易しく説明したいと思いますが、これが出来ないので現在研究しているわけです。

26個の散在型単純群を一応書いて置きましょう。

$+M_{11}$	1	11次のマシュー群
$+M_{12}$	2	12次のマシュー群
$-J_1$	3	$Janko(175560)$
$+M_{22}$	4	22次のマシュー群
$+J_2$	5	$Hall\ Janko$
$+M_{23}$	6	23次のマシュー群
$+HS$	7	$Higman-Sims$
$-J_3$	8	$Janko$群
$+M_{24}$	9	24次のマシュー群
$+McL$	10	$McLaughlin$
$+He$	11	$Held$
$-Ru$	12	$Rudvalis$
$+Suz$	13	鈴木群
$-ON$	14	$O'Nan$
$+.3$	15	.1の別の点の $stablizer$
$+.2$	16	.1の1点の $stablizer$
$+M(22)=Fi_{22}$	17	22次のフィッシャー群
$+F_5=HN$	18	原田ノートン群
$-Ly$	19	$Lyons$
$+F_3=Th$	20	トンプソン群
$+M(23)=Fi_{23}$	21	23次のフィッシャー群
$+.1$	22	リーチラティスの自己同形群/2
$-J_4$	23	$Janko$
$+M(24)'=Fi_{24}$	24	24次のフィッシャー群
$+F_2=B$	25	ベビーモンスター群
$+F_1=\mathbb{M}$	26	モンスター群

最初の記号の $+,-$ は $+$ が モンスター単純群 F_1 の内部で見つかるもの、$-$ はモンスター群の中に含まれていないものです。内部に見つかる単純群の多くは次のリストが示す

ように ローカル部分群の中に出てきます。

$$\begin{aligned}
&N(2A) = 2\cdot B\\
&N(2B) = 2_+^{1+24}Co1\\
&N(3A) = 3Fi_{24}\\
&N(3B) = 3_+^{1+12}\cdot 2Suz : 2\\
&N(3C) = S_3\times Th\\
&N(5A) = (D_{10}\times HN)\cdot 2\\
&N(5B) = 5_+^{1+6} : 4J_2\cdot 2N(7A) = (7:3\times He):2\\
&N(7B) = 7_+^{1+4} : (3\times sS_7)
\end{aligned}$$

これらの構造はモンスター単純群の構造を知る上でも、逆にこれらの単純群を知る上でも重要な関係となっています。これらの構造を使って頂点作用素代数とこれらの単純群の関係が少しはわかります。これらの単純群のうち、今回の講演で使うものは コンウエイ群と呼ばれるものです。Λ をリーチラティスとします。即ち、24 次元の even unimodular positive definite lattice のうち、長さ (squred length) 2 のもの (ルート) を含まないものです。 このリーチラティスの自己同型群 $Aut(\Lambda)$ は有限群であり、コンウエイ群 .0 と呼ばれています。この群はリーチラティスの全ての元を -1 倍する作用 t が中心に入っており、これによる剰余群 $.0/<t>$ が単純群 .1 です。リーチラティス Λ は通常ゴーレイコード C_{24} と長さ (squared length) 2 の直交基底 $\{\alpha_i : i=1,...,24\}$ を使って

$$\sum_{C\in C_{24}}\mathbb{Z}\frac{\alpha_C}{2}+\mathbb{Z}(\frac{\alpha_\Omega}{4}-\alpha_1)+\sum_{i\neq j}\mathbb{Z}(\alpha_i+\alpha_j)$$

として表示されます。ここで、 $\alpha_C=\sum_{i\in C}\alpha_i$, $\Omega=\{1,...,24\}$ とします。

モンスター単純群は大きな位数

$$2^{46}3^{2}05^{9}7^{6}11^{2}13^{3}17.19.23.29.31.41.47.59.71$$

$$808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000$$

を持っているわりに共役類の数が少なく 194 個

$$1A,2A,2B,3A,3B,3C,4A,4B,4C,4D,5A,5B,6A,6B,6C,6D,6E,6F,7A,7B,...$$

しかありません。共役類には全て上の様に名前をつけてあります。ここで nX の最初の n は 位数が n の元の共役類であることを意味し、X はその中心化群を大きい方から順にならべ、$A,B,C,...$ という名前を付けていきます。ですから、 $2A$ は位数 2 の元の共役類の中で中心化群がもっとも大きいものを意味します。

[6-transposition]

モンスター単純群の共役類のうち、$2A$ (involution) は色々不思議な性質を持っています。例えば、$2A$-involution は 6-transposition です。これは、
a,b を $2A$-involutions とすると、積 ab の位数は 6 以下 となると言うことです。しかも、

ab の共役類には実際 $1A, 2A, 2B, 3A, 3C, 4A, 4B, 5A, 6A$ の 9 通りの共役類しか出てきません。しかも、これらの数字は丁度アフィン E_8 の図

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
1A \arrow[r] & 2A \arrow[r] & 3A \arrow[r] & 4A \arrow[r] & 5A \arrow[r] & 6A \arrow[r] \arrow[d] & 4B \arrow[r] & 2B \\
 & & & & & 3C & &
\end{tikzcd}$$

に出てくる数字と一致していますが、偶然の一致なのか理由があるのか分かっていません。しかし、E_8 はモンスター単純群と関係が深いので何か理由があるのではと思います。

モンスター単純群を説明しようとすると、現在のところ、
(1) $Y_{5,5,5}$ダイアグラムからの説明、
(2) 2-local (位数 2 ベキの群の正規化部分群) からの説明、
(3) グライス代数の自己同型群としての説明、

の 3 つしか無いのではと思えるほど、ほとんど良いものがありません。ここでは、3 番目のグライス代数からの解説を行いたいと思います。理由は、頂点作用素代数と関係しているので発展性があると思うからです。

G を有限群とします。V を G の表現とします。このとき、表現のテンソル積 $V \otimes V$ が定義できますが、この中に V が入っている場合、

$$\begin{array}{cccc} \phi: & V \otimes V & \to & V \\ & v \times u & \to & \phi(v \otimes u) \end{array}$$

によって V の中に代数構造 $\times$ が入ります。この時、定義から

$$\forall g \in G, \quad g(u) \times g(v) = g(u \times v)$$

となり、G は代数 $(V, \times)$ の自己同型群となることがわかります。

このような代数を Simon Norton が散在型単純群の構成に使うことを思い付いたので、"ノートン代数" と呼ばれています。といっても、この事実は昔から知られていたと思いますので、論文になっているわけではありません。

モンスター単純群の場合に V を 196883 次元の既約表現とすると、実際、$V \otimes V$ の中に V があり、これを使ってグライスが定義し、基底などを決定したのがグライス代数です。

ノートン代数は色々な分野に役に立ちそうなので、Math Review の CD 版で検索したのですが、ノートン代数に関する論文は 1978 年の Cameron Goethals, Seidel の論文と Griess 代数の論文と 北詰さんの論文 以外ほとんど見つかりませんでした。Cameron, Goethals, Seidel の論文は Association scheme に関する論文です。

他には、3 番目のヤンコ群 J_3 の 85 次元の既約表現の場合、$(V \otimes V \otimes V, 1) \neq 0$ なので、trilinear な形式を持ち、$M = V \oplus Hom(V, C)$ は可換代数の構造を持ちます。この代数もグライス代数と類似したところがあり、興味ある代数なのですが、当時は有限単純群

を構成したり、一意性を証明したりという問題を中心に考えていたので、この代数の構造を調べたりとか、他の既約表現に対するグライス代数などの問題を考えていなかった為、これらの代数に関する論文はありません。これからは頂点作用素代数やその拡張を考える上で、これらの代数の研究が必要になると思います。付け加えると、J_3 はモンスター単純群に含まれていません。

V が既約加群の場合には V の指標 χ が分かればこれは簡単に

$$\sum_{g \in G} \chi(g)^2 \chi(g^{-1}) \neq 0$$

であることと上のノートン代数となるものがあることと同値になることが分かります。計算の得意な方がおられましたら、アトラスの指標表を使って計算してみてください。散在型有限単純群のノートン代数を計算し、その構造を調べることは有限群と頂点作用素代数にとって重要だと思います。

2 グライス代数

ここでは、グライス代数 B を最初にグライスの構成した方法で説明を始めましょう。ここでのグライス代数 B は上の 196883 次元の空間に単位元の存在する 1 次元空間を加えた 196884 次元の空間を考えます。

モンスター単純群の 2B-involution θ の中心化群 $C(\theta)$ は $2^{1+24}.1$ という構造を持っています。この記号は $C(\theta)$ は正規部分群 Q で 位数 2^{25} の extraspecial 2-群となるものを持ち、剰余群 $C(\theta)/Q$ が散在単純群の一つコンウエイ群 .1 であることを意味しています。.1 はリーチラティスの全自己同型群 .0 をその中心 $< \pm 1 >$ で割ったものです。目的の 196884 次元の グライス代数 B はモンスター単純群の作用があるので、特に $C(\theta)$ の作用があります。まず、最初に $C(\theta)$ の表現空間として グライス代数 B を構成したいわけです。その為に extraspecial 2-群の表現を説明しておきましょう。

Q を位数 2^{1+2n} の extraspecial 2-群とします。即ち、中心 $Z(Q) =< c >$の位数は 2 で 剰余群 $\bar{Q} = Q/Z(Q)$ が elementary abelian 2-group です。$\bar{a}, \bar{b} \in \bar{Q}$ に対して、$[a,b] = c^{<\bar{a},\bar{b}>}$ によって Z_2-値の非退化な内積を $\bar{Q}$ は持ちます。Q の複素表現は簡単に 2^{2n}-個の一次表現と 1 個の忠実な次数 2^n の表現だけであることが分かります。一般に p-群の既約表現は部分群の線形表現を誘導して構成できますので、この場合も Q の 極大アーベル部分群の一次表現で $Z(Q)$ を Kernel に含まないものを誘導して構成します。$\bar{Q}$ 上の内積は $< \bar{a}, \bar{a} >= 0$ なので$\bar{Q} = \bar{E} \otimes \bar{F}$ と 極大な isotropic 部分空間 $\bar{E}$ と$\bar{F}$ の直和にかけます。 E^* と F^* をその逆像とすると、これらはアーベル群ですが、もし F^* が elementary abelian なら忠実な加群はうまい基底が取れます。以後の為に T で Q の忠実な 2^{12}次元の既約表現を表わすことにします。

$F^* = Z(Q) \times F$ とすると、基底として $\{e(x) : x \in F\}$ がとれ、$y \in F$ なら $e(x)y = e(xy)$ $u \in E^*$ なら $e(x)u = \phi_x(u)e(x)$

で定義します。ここで $\{\phi_x | x \in F\}$ は $Z(Q)$ の忠実な指標を E^* に拡張したものを一つ ϕ_1 と置き、$\phi_x(u) = \phi_1(x^{-1}ux)$ と定義したものです。

一方 リーチラティス Λ は even unimodular lattice なので、$\Lambda/2\Lambda$ の中の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-値内積を使って位数 2 の中心拡大 $\widetilde{\Lambda/2\Lambda}$を構成することができます。

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \widetilde{\Lambda/2\Lambda} \to \Lambda/2\Lambda \to 0$$

この $\widetilde{\Lambda/2\Lambda}$ と上の extra special 2-群とを同一視する写像を

$$q : \Lambda \to Q$$

で表わします。

$C(\theta)$ の既約表現のうち、$Z(Q)$ 上で忠実な表現を考えると、これはテンソル積 $\rho_S \otimes R$ の形を持つことが分かります。ここで R は .0 のある忠実な既約表現です。

2.1 $C(\theta)$-module B

$C(\theta)$ は extraspecial group 2^{1+24} を .1 で拡張したものです。パート I で北詰さんが説明したように、B は $C(\theta)$-加群として 3 種類の加群の直和

$$B := U \oplus V \oplus W$$

という構造を持っています。 この 3 種類の加群の基底を与えましょう。

H をリーチラティス Λ によって張られた有理数体上のベクトル空間とします。 まず、最初の U は 2 次の対称テンソル空間 $U = S^2(H)$、 3 つ目の W は $W = H \otimes T$ で定義します。ここで T は上で説明した Q の 2^{12}次元の既約表現、2 番目の V はある誘導加群で、 $Z(Q)$ が自明に作用するものです。正確には C_2 で Q を含む $.1 = C(\theta)/Q$ の部分群 .2 の逆像を表わし、 V は C_2 の一意的な自明でない線形表現を誘導したものとなっています。それ故、 $dimV = |\Lambda_2|/2 = 98,280$ となります。$\{x_i | i \in \Omega\}$ を H の正規直交基底とし、$a \in H$ に対して $\tilde{a}$ で $\{a, -a\}$ を表すと、

U は 基底 $x_i x_j$ をもち、	次元は	300
V は基底 $v(\tilde{a}), \tilde{a} \in \tilde{\Lambda}_2$ を持つ	次元は	$98,280$
W は基底 $x_i \otimes e(x)$ を持ち、	次元は	$98,300$
合計	次元は	$196,884$

ここまでは、 モンスター単純群の 196883 次元の表現を $C(\theta)$ に制限することによって求まるものです。

次に モンスター単純群の作用で不変な積を定義するわけですが、グライスがこの代数を定義する事が出来た最大の理由はモンスター単純群の作用が大きいので、グライス代数の積がある意味で一意的に決まってくれたということです。ただ、実際には、決して簡単なことではありません。

2.2 B の積

まず、B の中の積は可換です。すべての積を表示すると、複雑になってしまいますので、一部だけを載せておきます。ただ、B はそれ程複雑ではない不変内積を持っていますので、それを使うと下の表から全体の積が分かります。

U は積で閉じています。	
$U \times U_{\|U}$	Jordan 積 $ab.cd = (a,b)(c,d)d^*$
$U \oplus V$ は積で閉じています。	
$U \times V_{\|U}$	$ab \times v(\tilde{c}) = \langle a,c\rangle\langle b,c\rangle v(\tilde{c})$
$V \times V_{\|U+V}$ と $(U+V) \times W$ は	下の表を見てください。
$W \times W_{\|U}$	$e(x) \otimes x_i \times e(y) \otimes x_j = \begin{cases} \delta_{x,y} d^* \\ \delta_{i,j} u(x_i x_j) \end{cases}$
$W \times W_{\|V}$	$e(x) \otimes x_i \times e(y) \otimes x_j = \sum_{x_a = xy}[c_1 \delta_{ij} + c_2 (a,x_i)(a,x_j)]\phi_a(x) v(\tilde{a})$
$W \times W_{\|W}$	0

上の $W \times W_{|V}$ の中の $x_a = xy$ は $xy = q(\widetilde{a + 2\Lambda} + \Lambda_4)Z(Q)$ となるすべての$\tilde{a} \in \Lambda_2$ の和をとります。ここで、$q : \Lambda/2\Lambda \to Q$ は $\widetilde{\Lambda/2\Lambda}$ と extraspecial 2-群とを同一視する為に定義した写像です。また、d^* で（H の我々の定義した正規直交基底の）平方の和を表わします。

$$d^* = \sum_{e_i} e_i^2$$

H の直交変換はすべて d^* を不変にするので、d^* の U における直交補空間 U_0 も不変になっています。

定義から $U = S^2(H)$ であり、U は自然な積

$$ab \cdot cd = (a,c)bd + (a,d)bc + (b,c)ad + (b,d)ac$$

を持ちます。U を次数 24 の対称行列全体と同一視すると、これはスカラー倍を除いて U の自然なジョルダン積です。

上の積を利用しやすいように頂点作用素代数の立場から見て、少し見易く書いておきましょう。$U \oplus V$ 内の積と W への作用は

$$\begin{aligned}
&a^2 \times b^2 = 4 < a,b > ab \\
&a^2 \times v(\tilde{b}) =< a,\bar{b} >^2 v(\tilde{b}) \\
&v(\tilde{a}) \times v(\tilde{b}) = \begin{cases} 0 & if \quad < \bar{a},\bar{b} >= 0, \pm 1 \\ v(\widetilde{a+b}) & if \quad < \bar{a},\bar{b} >= -2 \\ \bar{a}^2 & if \quad ab = 1 \end{cases} \\
&v(\tilde{a}) \times (h \otimes t) = \tfrac{1}{8}(h - 2 < \bar{a},h > \bar{a}) \otimes at \\
&a^2 \times (h \otimes t) = (< g,h > g + \tfrac{1}{8} < g,g > h) \otimes t
\end{aligned}$$

と置き換えられます。

3 ノートンの不等式

上で定義したグライス代数の構造に関する研究は最初、 W.Meyer と W.Neutsch の論文の中にでています。彼らはこの論文の中でグライス代数の結合部分代数の構造を色々調べました。グライス代数は可換代数なので、当然可換結合代数となり、複素数体の直和となっています。ですから、 ベキ等元を調べることが可換結合部分代数の構造を調べることと同値になります。

これを頂点作用素代数のグライス代数の立場からみると、ベキ等元の 2 倍がコンフォーマル元 e であり、この元に対応する頂点作用

$$e(z) = \sum e_i z^{-i-1}$$

の係数 $\{e_i\}$ 全体はヴィラソロ代数を構成し、色々な条件を満足していることが分かります。

モンスターグライス代数の中では不等式

$$(aa, bb) \geq (ab, ab)$$

が成り立ちます。これをノートンの不等式と呼ぶのですが、証明は、内積がモンスターの作用で不変であり、 V_2 がモンスターの加群として既約$\oplus 1$ なので、それを使って確認することができます。しかし、このノートンの不等式はモンスターグライス代数だけの性質ではありませんでした。実際には 頂点作用素代数の V_3 での内積が正定値であることがノートン不等式を意味していることが頂点作用素代数からの性質で分かります。

定理 1 $V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$ を頂点作用素代数で、$\dim V_0 = 1$, $V_1 = 0$ とする。もし、 V_3 の内積 $(v, u)\mathbf{1} = v_5 u$ が正定値ならノートン不等式が成り立つ。

実際、ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ ではすべての V_n において不変内積は正定値です。

4 有限性

グライス代数の自己同型群の有限性を示してみましょう。重要なのは 固有値が特別な ベキ等元 が存在することです。$\alpha_1, ..., \alpha_{24}$ をリーチラティスをゴーレイコードを使って定義するときに使った長さ 2 の直交基底とします。この時、α_1, α_2 に対して、

$$e^1 = \frac{1}{32}(\alpha_1 + \alpha_2)(-1)^2\mathbf{1} + \frac{1}{8}v(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{1}{8}v(-\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$e^2 = \frac{1}{32}(\alpha_1 + \alpha_2)(-1)^2\mathbf{1} - \frac{1}{8}v(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{1}{8}v(-\alpha_1 - \alpha_2)$$

と置くと、これらは 直交したベキ等元 e^1, e^2 で $\langle e^i, e^i \rangle = \frac{1}{16}$ です。ムーンシャイン頂点作用素代数の中には上のようなベキ等元が沢山あり、特に、グライス代数の単位元は直交した 48 個のベキ等元 $\{e^1, ..., e^{48}\}$ の和となっています。各々のベキ等元 e^i は中心電荷 $\frac{1}{2}$ の

単純なヴィラソロ代数を与えるので、$2e^i{}_1$ の V 上での固有値は $\mathbb{Z}$, $1/2+\mathbb{Z}$, $1/16+\mathbb{Z}$ だけとなります。特に、グライス代数の内部では固有値は $1, 0, 1/4, 1/32$ だけとなります。しかも、固有値 1 の固有空間は一次元 $<e>$ だけであることが証明できます 。([M1])。

まず、上の様な ベキ等元 が 2 つ e, f あったとしましょう。

定理 2 e, f を異なる *idempotents* で

$$\langle e,e\rangle = \langle f,f\rangle = \frac{1}{16}$$

とする。この時、

$$\langle e,f\rangle \leq \frac{1}{48}$$

且つ

$$\langle e-f, e-f\rangle \geq \frac{1}{12}$$

が成り立つ。特に、この様な *idempotents* は有限個しか存在しない。

[証明] この時、グライス代数 B を $<e> \oplus <e>^\perp$ に分解すると、f に対して $r \in \mathbb{C}$ と $w \in <e>^\perp$ が存在して

$$f = re + w$$

と書けます。この時、$ew \in e^\perp$ なので、

$$re + e = f = f^2 = \{r^2 e + {w^2}_e\} + \{(w^2 - {w^2}_e) + 2rew\}$$

となる。ここで ${w^2}_e$ は w^2 の $<e> \oplus <e>^\perp$ における第一成分を表わします。この時、

$$\frac{1}{16} = \langle f,f\rangle = r^2\frac{1}{16} + \langle w,w\rangle$$

なので、 $\langle w,w\rangle = \frac{1}{16}(1-r^2)$ です。さらに、$<e>^\perp$ 上で e の固有値は $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}$ なので、

$$\langle e,(r-r^2)w\rangle = \langle e,{w^2}_e\rangle = \langle e,w^2\rangle = \langle we,w\rangle \leq \frac{1}{4}\langle w,w\rangle = \frac{1}{64}(1-r^2)$$

となり $3r^2-4r+1 \geq 0$ 、即ち、$r \geq 1$ 又は $r \leq \frac{1}{3}$ を得ます。$r > 1$ は $\langle w,w\rangle \geq 0$ なのでありえないから、$r \leq \frac{1}{3}$ となり、$\langle e,f\rangle \leq \frac{1}{48}$ が常に成り立ちます。故に、$\langle e-f, e-f\rangle \geq \frac{1}{12}$ が成り立ち、この様なベキ等元は B の中に有限個しか存在しないことが証明できます。
∎

自己同型群が有限である証明を続けましょう。上で述べたように、グライス代数の単位元はこのようなベキ等元の直交した 48 個の和で書けているので、それぞれのベキ等元が生成した部分頂点作用素代数 $L(\frac{1}{2},0)$ のテンソル積 $T = \otimes_{i=1}^{48} L(\frac{1}{2},0)$ が V の部分代数として

存在しています。既約な T 加群は 既約な $L(\frac{1}{2},0)$-加群 48 個のテンソル積であり、T-加群として V を見たとき、$L(\frac{1}{2},0)$ の既約加群は高々 3 個しかないので、既約 T-加群の最高次ウエイトは高々 24 であり、$V^\natural$ は有限個の T-既約加群となることが分かります。T-既約加群の自己同型は簡単に有限だと分かりますので、合わせて、上の 48 個のベキ等元を固定する自己同型群は有限となり、全体として、$V^\natural$ の自己同型群は有限であることが分かります。

さらに、$V^\natural$ の中にはこの様なベキ等元が多数入っており、$V^\natural$ の全自己同型群が単純群であることなども群論の簡単な手法で証明できることが分かります。

このベキ等元は非常に重要であり、各上のベキ等元 e に対してモンスター単純群における 2A-involution τ_e が対応しています。2 つの 2A-involutions の積の位数は（多分）内積によって制限されるはずです。例えば、e と f が直交しているなら、$\tau_e\tau_f$ は 2B-involution となることが証明できます。最初に述べたように、モンスター単純群は 6-transposition の性質を持っており、これは 2 つのベキ等元の内積に依存しているはずです。それゆえ、次の問題を提案しておきます。

問題
V_2 を正定値を持つ頂点作用素代数のグライス代数とする。この時、e,f を squared length $\frac{1}{16}$ のベキ等元とする。この時、$\langle e,f\rangle$ を決定せよ。

すぐに Norton inequlity から、

$$\langle e,f\rangle = \langle e^2,f^2\rangle \geq \langle ef,ef\rangle \geq 0$$

であることは分かります。
不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ代数に於いて　有力な方法は

$$F(x) = \frac{\langle x^2,x^2\rangle}{\langle x,x\rangle^2}$$

や

$$\phi(x) = \frac{\langle x,x^2\rangle^2}{\langle x,x\rangle^3}$$

などのコンパクト空間 $B-\{0\}/\mathbb{R}^*$ 上の関数を定義することです。
これらが有界であることを証明すると、
例えば、

$$\langle 1,x^2\rangle^2 \leq \langle 1,1\rangle\langle x^2,x^2\rangle$$

から

$$\langle x,x\rangle^2 \leq 3\langle x^2,x^2\rangle$$

なので、 $F(x)\geq 1/3$ を得ます。

補題 1 *a* が *F* の *stationary(極値)* であれば、

$$a^3 \in \mathbb{R}a$$

が成り立ち、*a* が ϕ の *stationary*（極値）ならば、

$$a^2 \in \mathbb{R}a$$

が成り立ちます。

特に、 最小値 $F(a) = \frac{1}{3}$ の場合には

$$a^2 \in \mathbb{R}1$$

となることも分かります。 この事を使うと次の定理が証明出来ます。

定理 3 直既約 ベキ等元 の固有値 1 のグライス代数内の固有空間の次元は 1 次元である。

系 1 V を正定値の不変内積を持つ頂点作用素代数とし、$\dim V_0 = 1, V_1 = 0$ とする。もし、 $dimV_2 > 1$ なら、ヴィラソロ元は異なるコンフォーマル元の直交直和となる。

また、長さが 1/16 のベキ等元以外にもモンスター単純群の元と対応しているものがありますが、現在の所、ベキ等元から自己同型を定義する方法はありません。一応、分解の構造を簡単に書いておきましょう。

$$C(2A) = N(2A) = 2 \wedge F_2 : 1 + 1 + 4371 + 96255 + 96256$$

$$N(3A) = 3 \wedge F_{24} : 1 + 1 + 8671 + 57477 + 1566 + 129168$$

$$C(5b) = 72+(3\times 8064)+(2\times 7560)+(125\times 315)+(125'\times 315)+(125''\times 315')+(125'''\times 315')$$

5_+^{1+6} は 72 部分に自明に作用します。
7560 と 8064 は忠実な $5^6 \cdot 2HJ$-加群であり、125 とそれの共役 125′,125″,125‴ は忠実な $C(5B)$-加群で、
315 と 315′ は 5_+^{1+6} が自明に作用しています。

$3 \times 8064 + 2 \times 7560 = 39312 = 196560/5$ となっています。ここで、196560 はリーチラティスのノルム 4 の元 (short element) の数。

これは $2B$ の場合にも、 196560/2 の数が出てくるし、$3B$ の場合にも 196560/3, $7B$ の場合にも 196560/7 が出てきます。

5 頂点作用素代数と Association Scheme

グライス代数のうち、最初の 300 次元の部分に相当する頂点作用素代数を構成しましょう。このシンポジウムは代数的組合せ論ですので、commutative Association Scheme との関係で頂点作用素代数を構成してみます。

M を n 次元のベクトル空間とし、 $v_1, ..., v_n$ を正規直交基底とします。M を可換なリー代数、即ち、

$$[a, b] = 0$$

と考え、M のアフィン化 $M[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ を

$$\widetilde{M} = [a \otimes t^m, b \otimes t^n] = \delta_{m+n,0} m < a, b > c$$

で定義します。$\widetilde{M}$ の基底として、$\{v_i \otimes t^m, c : m \in Z, i = 1, ..., n\}$ が取れます。記号を簡単にするために、 $a \in M$ に対して、 $a \otimes t^m \in \widetilde{M}$ の元を $a(m)$ と書くことにします。実際には $a(m)$ はある線形変換を表わすことになるのですが、混乱が起きないので同一視します。次にこのアフィンリー代数の最高次ウエイトベクトル空間と呼ばれるものを構成します。これは、まず、最高次ウエイトベクトルと呼ばれるベクトル v を一つ決め、

$$\begin{array}{ll} a(n)v = 0 & n > 0 \\ a(0)v = r(a)v & \end{array}$$

を満たすものとします。$n < 0$ に対しては $a(n)$ は自由に新しい元を生成させるとして構成したものを最高次ウエイト r を持つヴァーマ加群 $M(r)$ と呼びます。$n \geq 0$ となる n に対する $a(n)$ の作用は交換関係式をくり返し使って右に移動させ、v に対しては $a(n)$ の作用が決まるので、最終的に非負の成分 n を持つ $a(n)$ を消すことができるので

$$a(n_1)....a(n_s)v \quad n_1 \leq ... \leq n_s < 0$$

という元のみ残ることが分かります。この様な性質から、 $a(n) : n < 0$ は生成作用素、$a(n) : n > 0$ は消滅作用素と呼ばれています。容易に $M(r)$ は $M[t]$ の対称テンソル積空間

$$V = \mathrm{C} \oplus M[t] \oplus S^2(M[t]) \oplus S^3(M[t]) \oplus ...$$

とベクトル空間として同型となることが分かります。

V を最高次ウエイト 0 であるようなヴァーマ加群 $M(0)$ とします。V の全ての元 u に頂点作用素と呼ばれる形式的べき級数

$$Y(u, z) = \sum u_n z^{-n-1}$$

を次の様に定義します。ここで、 $u_n \in End(V)$ です。

まず、真空 $1 = v$ に対しては $Y(1, z) = 1$ とします。即ち、$1_{-1} = 1_V$ であり、その他の 1_n は全て 0 です。

$a(-1)1$ に対する頂点作用素を

$$Y(a,z)=\sum_{i\in Z}a(i)z^{-i-1}$$

と置き、帰納的に $a(-n)u$ に対する頂点作用素を

$$Y(a(-n)u,z)=(\frac{1}{(n-1)!})\{((\frac{d}{dz})^{n-1}Y(a,z))^{+}Y(u,z)+Y(u,z)((\frac{d}{dz})^{n-1}Y(a,z))^{-}\}$$

と定義することで頂点作用素代数となります。

この時、菅原構成法で

$$\mathbf{w}=\sum_{i=1}^{n}v_i(-1)v_i(-1)1$$

と定義すると、$\mathbf{w}$ はヴィラソロ元の条件をすべて満たしています。

インデックスに注目して下さい。菅原構成法のインデックスは $\{(i,i):i=1,...,n\}$ です。これを単位行列に対応しているものと考えます。即ち、単位行列は $I=\sum_{i=1}^{n}e(i,i)$ に対応する元が上の菅原構成なのです。ですから、行列 $A=(a_{ij})$ に対して、

$$w_A=\sum a_{ij}v_i(-1)v_j$$

を定義することが出来ます。この定義だと、$v_i(-1)v_j=v_j(-1)v_i$ なので対称行列 A の0みを考えることにします。ただし、設定を変えると非対称な A に対しても同じ様なことが定義できます。

特に、$a_{ij}=0,1$ の場合、即ち、$\{(i,j):i,j=1,...,n\}$ の部分集合 R に対して、

$$w_R=\sum_{(i,j)\in R}v_i(-1)v_j$$

が定義できます。

これらは次数が2なので、V_2 の元なのですが、$\{R_i\}$ が association scheme の Bose-Mesner 代数の場合の様に、$\sum\mathbb{C}R_i$ が積で閉じている場合には、上の $<w_{R_i}>$ も積 $\cdot_1$ で閉じているのです。即ち、association scheme の Bose-Mesner 代数は ある頂点作用素代数（上の頂点作用素代数の部分代数）のグライス代数となっているのです。

群 G 軌道による Asscociation scheme の場合には、G を M に正規直交基底の変換と考え、M の -1 倍の自己同型を合わせた群 $\pm G$ を考えると、これは頂点作用素代数 $S(M)$ の自己同型群であり、$S(M)^{\pm G}$ の中で $S(M)_2^{\pm G}$ で生成された頂点作用素代数が丁度上で述べた頂点作用素代数となります。

グライス代数が可換なので、これらは単純環の直積となり、既約なベキ等元 e^j がでてきます。以前に話したように、$2e^j$ は conformal vector であり、このグライス代数は積 $\cdot_3$ による正定値な内積があり、上のベキ等元達は互いに直交していることが分かります。当然最初の w_{R_i} 達も直交しています。

これにより、 association scheme の係数 $w_{R_i} = \sum p_i^j e_j$ の直交関係などが頂点作用素代数に関する関係式として出てきます。

最後に、頂点作用素代数の中には無限個の積があるわけですが、これらの演算が Association Scheme としてどのような意味を持つのか分かっていません。また、 Association Scheme の Bose Mesner 代数におけるアダマール積が頂点作用素代数の言葉で表現出来るのかどうかなども重要な問題だと思います。

References

[CGS] P.J.Cameron, J.M.Goethals and J.J.Seidel, The Krein condition, spherical design, Norton algebras and permutation groups, *Nederl. Akad. Welensch. Indeg. Math.* 40 (1978), No. 2 196-206.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math. Vol. 134, Academic Press, Boston, 1988.

[MN] W. Meyer and W. Neutsch, Associative subalgebras of the griess algebra, *J. of algebra* 158 (1993)

[Mi] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras *J. Algebra*, (1995)

[R] T. M. Richardson, Elementary abelian 5-subgroups of the Monster, *J. algebra* 165 (1994)