数理解析研究所講究録
969巻 1996年 69-75

Trimicrolocalization functor について

千葉大学 自然科学研究科
渡辺 悟(Satoru Watanabe)

§0 序

層の超局所解析の理論は[Ks-Sch]に集大成され、線型偏微分方程式系を$\mathcal{D}$-moduleとしてfunctorialに研究するための基本的手法となっている。中でもmicrolocalization functorが重要な役割を果たしており、このfunctorを層(の複体)に施したときの種々の幾何学的性質を知ることによって、超局所解析を代数的に見通し良く展開することができる。一方、余接バンドルの正則包合的部分多様体に沿ったマイクロ函数を研究するための第二超局所解析の理論が進展中である。この理論は、functorialにはmicrolocalization functorを2度繰り返して適用することにより研究されてきたが、この方法ではzero-sectionにおける低次の理論との整合性が崩れてしまい，[Ks-Sch]と並行した議論を行う際の難点となっていた。近年、竹内は[Tk]においてbimicrolocalization functorを導入し，前述

の難点を解決した形で第二超局所解析の理論を再構成することを試みている。以上のような手法が確立されてみると，更に高次の超局所解析が同様の方針に従って可能なのではないか，と考えられる。そこで本稿では，[Tk]の議論を高次化することにより，第3超局所解析のための基本的な言葉となるtrimicrolocalization functorが，低次のものと整合性を持った形で定式化できたことを報告する。

microlocal ………… microlocalization functor $\mu_N(\cdot)$ cf. [Ks-Sch]
2nd microlocal ……… bimicrolocalization functor $\mu_{NM}(\cdot)$ cf. [Tk]
3rd microlocal ……… ?

§ 1 trispecialization functor

$X \supset L \supset M \supset N$ なる関係にある C^∞-多様体の4つ組を (X, L, M, N) と書く。これらの多様体から，[Ks-Sch]による normal deformation の操作を，以下のように3度繰り返す。

		blow-upのパラメータ	左欄でパラメータ=0の部分
1回目	$\widetilde{X}_N \supset \widetilde{L}_N \supset \widetilde{M}_N$	$t_1 \in \mathbb{R}$	$T_N X \supset T_N L \supset T_N M \quad (t_1 = 0)$
2回目	$\widetilde{\widetilde{X}_N}_{\widetilde{M}_N} = \widetilde{X}_{NM} \supset \widetilde{\widetilde{L}_N}_{\widetilde{M}_N} = \widetilde{L}_{NM}$	$t_2 \in \mathbb{R}$	$T_N M \underset{M}{\times} T_M X \supset T_N M \underset{M}{\times} T_M L \quad (t_1 = t_2 = 0)$
3回目	$\widetilde{\widetilde{X}_{NM}}_{\widetilde{L}_{NM}}$	$t_3 \in \mathbb{R}$	$T_N M \underset{M}{\times} (T_M L \underset{L}{\times} T_L X) \quad (t_1 = t_2 = t_3 = 0)$

Def 1.1

$\widetilde{\widetilde{X}_{NM}}_{\widetilde{L}_{NM}}$ を $\widetilde{X}_{NML}$ と書いて，X の (L, M, N) に沿った trinormal deformation という。

$X=\{(x',x'',x''',x'''')\}$ の中で，$L=\{x'=0\}$，$M=\{x'=x''=0\}$，$N=\{x'=x''=x'''=0\}$と局所座標表示されているとする。この時

$$\begin{tikzcd}
\underset{(t_1=t_2=t_3=0)}{T_NM\times_M(T_ML\times_L T_LX)} \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d, "\tau"] & \underset{(x',x'',x''',x''''\ t_1,t_2,t_3)}{\widetilde{X}_{NML}} \arrow[d, "p"] & \Omega=\{t_1>0,t_2>0,t_3>0\} \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "\tilde{p}"] \\
N \arrow[r, hook] & \underset{(t_1t_2t_3x',\ t_1t_2x'',\ t_1x''',\ x'''')}{X} &
\end{tikzcd}$$

なる多様体の間の射の可換図式を用いて，以下のような定義をする。

<u>Def 1.2</u>　$S\subset X$とする。

$C_{NML}(S):=T_NM\times_M(T_ML\times_L T_LX)\cap\overline{\tilde{p}^{-1}(S)}$　として，これをSの($L.M.N$)に沿ったtrinormal coneという。

<u>Def 1.3</u>　$F\in D^b(X)$に対し

$\nu_{NML}(F):=s^{-1}Rj_*\tilde{p}^{-1}F$　と定義し，Fの($L.M.N$)に沿ったtri specializationという。

以下に，このfunctorの性質をいくつか見よう。

<u>Th 1.4</u>　(i) $\nu_{NML}(F)$は$T_NM\times_M(T_ML\times_L T_LX)$上のtriconic objectである。
(ii) $T_NM\times_M(T_ML\times_L T_LX)$ の局所座標系を$(v'\frac{\partial}{\partial x'}, v''\frac{\partial}{\partial x''}, v'''\frac{\partial}{\partial x'''}, x'''')$とする。
この中の直積型 triconic openset $V=V'\times V''\times V'''\times V''''$ s.t. $V'\subset X'_{v'}$, $V''\subset X''_{v''}$, $V'''\subset X'''_{v'''}$: conic open, $V''''\subset X''''_{x''''}$: open の場合に，$\nu_{NML}(F)$のglobal sectionが，以下のように記述できる。

$$H^j(V,\nu_{NML}(F))=\varinjlim_{C_{NML}(X\setminus U)\cap V=\phi} H^j(U,F)\quad \text{for every } j\in\mathbb{Z}$$

また、この functor は以下に見るように zero-section への制限が低次のものと整合的である。

<u>Th. 1.5</u>　以下のような projection をそれぞれ τ_N, p_N とする。

$$T_N M \underset{M}{\times} (T_M L \underset{L}{\times} T_L X) \xrightarrow{\tau_N} N \underset{M}{\times} (T_M L \underset{L}{\times} T_L X)$$

$$T_N L \underset{L}{\times} T_L X \xrightarrow{p_N} N \underset{M}{\times} (T_M L \underset{L}{\times} T_L X)$$

この時

$$\begin{cases} R\tau_{N*} \nu_{NML}(F) = \nu_{ML}(F)|_{N \underset{M}{\times} (T_M L \underset{L}{\times} T_L X)} \\ R\tau_{N!} \nu_{NML}(F) = Rp_{N!} \nu_{NL}(F) \end{cases}$$

なる関係が成り立つ。

他の2つの zero-section $T_N M \underset{M}{\times} T_L X$, $T_N M \underset{M}{\times} T_M L$ への projection に関しても同様の性質が成り立つが、ここでは割愛する。

<u>§2 trimicrolocalization functor</u>

$$\begin{array}{c} D^b(T_N M \underset{M}{\times} (T_M L \underset{L}{\times} T_L X)) \\ \downarrow \mathcal{F}_1 \\ D^b(T_N M \underset{M}{\times} (T_M L \underset{L}{\times} T_L^* X)) \\ \downarrow \mathcal{F}_2 \\ D^b(T_N M \underset{M}{\times} (T_M^* L \underset{L}{\times} T_L^* X)) \\ \downarrow \mathcal{F}_3 \\ D^b(T_N^* M \underset{M}{\times} (T_M^* L \underset{L}{\times} T_L^* X)) \end{array}$$

$\mathcal{F}_1$ を $T_L X$ 上, $\mathcal{F}_2$ を $T_M L$ 上, $\mathcal{F}_3$ を $T_N M$ 上の Fourier - Sato 変換とする。([Ks-Sch] 参照)

以下のようにして trimicrolocalization functor を定義する。

<u>Def 2.1</u>　$F \in D^b(X)$ に対し

$$\mu_{NML}(F) := \mathcal{F}_3 \circ \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1 (\nu_{NML}(F))$$

と定義し、F の (L, M, N) に沿った trimicrolocalization という。

以下にこの functor の基本的性質をいくつか述べる。

<u>Th. 2.2</u>

(i) $\mu_{NML}(F)$ は $T_N^* M \underset{M}{\times} (T_M^* L \underset{L}{\times} T_L^* X)$ 上の triconic object。

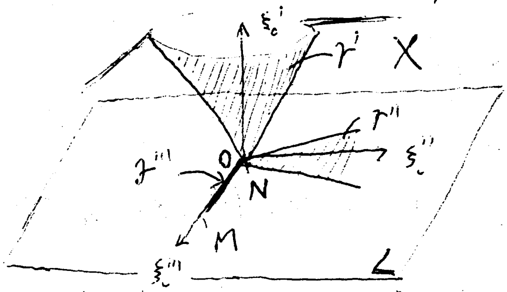
(ii) 点 $q_c = (\xi_c' dx', \xi_c'' dx'', \xi_c''' dx''', 0) \in T_N^* M \underset{M}{\times} (T_M^* L \underset{L}{\times} T_L^* X)$ をとると，全ての $j \in \mathbb{Z}$ に対し，$\mu_{NML}(F)$ の q_c での stalk は以下のように与えられる。 $H^j[\mu_{NML}(F)]_{q_c} = \varinjlim_{Z,U} H^j_{Z \cap U}(U, F)$

ここで Z は，$Z = \{(\{0\} \times \gamma''') + (\{0\} \times \gamma'') + \gamma'\} \times X'''_{x'''}$，ただし各 γ は閉錐で，$\gamma' \subset X'_{x'} \times X''_{x''} \times X'''_{x'''}$，$\gamma'' \subset X''_{x''} \times X'''_{x'''}$，$\gamma''' \subset X'''_{x'''}$，

$(\gamma' \setminus \{0\}) \subset \{(x', x'', x''') \,;\, \langle x', \xi_c' \rangle > 0\}$，$(\gamma'' \setminus \{0\}) \subset \{(x'', x''') \,;\, \langle x'', \xi_c'' \rangle > 0\}$，

$(\gamma''' \setminus \{0\}) \subset \{x''' \,;\, \langle x''', \xi_c''' \rangle > 0\}$ を満たすもの，

U は $0 \in X$ の開近傍として帰納極限をとる。



・Z は左図の3つの cones をたしたもの。

<u>Th 2.3</u> $\pi_N : T_N^* M \underset{M}{\times} (T_M^* L \underset{L}{\times} T_L^* X) \to N \underset{M}{\times} (T_M^* L \underset{L}{\times} T_L^* X)$ とすると

$$\begin{cases} R\pi_{N*}\,\mu_{NML}(F) = \mu_{NL}(F)\,|_{N \underset{M}{\times} (T_M^* L \underset{L}{\times} T_L^* X)} \\ R\pi_{N!}\,\mu_{NML}(F) = \mu_{ML}(F)\,|_{N \underset{M}{\times} (T_M^* L \underset{L}{\times} T_L^* X)} \otimes \omega_{N/M} \end{cases}$$

が成り立つ。

§3 third microfunction

ここで，第3超局所解析の基本的対象となる third microfunction の sheaf が，以上の結果を用いることによって，[Ks-Sch]，[Tk] と並行した議論に従って得られることを見よう。

(X, L, M, N) の4つ組として $X = \mathbb{C}^n_z$，$L = \mathbb{C}^{d_1}_{z'} \times \mathbb{C}^{d_2}_{z''} \times \mathbb{R}^{n-(d_1+d_2)}_{x'''}$，$M = \mathbb{C}^{d_1}_{z'} \times \mathbb{R}^{d_2}_{x''} \times \mathbb{R}^{n-(d_1+d_2)}_{x'''}$，$N = \mathbb{R}^n_x$ の場合を考える。

$\mathcal{O}_X$をX上の正則函数のなすsheafとする。

Def 3.1 $C_{NML} = \mu_{NML}(\mathcal{O}_X)\otimes or_N[n]$ と定義し、これを(L, M)に沿ったthird microfunctionのsheafという。(Th 2.2と柏原のabstract edge of wedge th.により、0次に集中していることがわかる。)

佐藤のtriangle $R\pi_{N!} \to R\pi_{N*} \to R\dot{\pi}_{N*} \xrightarrow{+1}$ をsheaf C_{NML}に適用すると、Th 2.3により、次の定理を得る。

Th 3.2 $\Lambda = N \times_M (T^*_M L \times_L T^*_L X)$上で、以下の完全系列が成り立つ。

$$0 \to C^2\mathcal{O}|_\Lambda \to C_{NL}|_\Lambda \to \dot{\pi}_{N*} C_{NML} \to 0$$

ここで、sheaf C_{NL}は、bimicrolocalization functorを用いて構成される$T^*_N L \times_L T^*_L X$上のsecond microfunctionのsheaf $\mu_{NL}(\mathcal{O}_X)\otimes or_N[n]$である。([$LT_K$]参照。) また、$C^2\mathcal{O}$は、$T^*_M L \times_L T^*_L X$上の、$z'$を正則パラメーターに持つ、second microfunctionのsheafである。この完全系列により、sheaf C_{NML}は、sheaf C_{NL}のΛ上の特異性を$T^*_N M \times_M (T^*_M L \times_L T^*_L X)$上に分解するものであることがわかる。

§4 最後に

偏微分方程式論への応用のためには、上で得られた$\mu_{NML}(F)$のmicro-supportを$T^*_N M \times_M (T^*_M L \times_L T^*_L X)$のtrisymplectic構造との関係で評価することが必要で、これについては現在研究中である。この結果がうまく得られれば、第2超局所解析まででは扱えなかった型のtriple characteristicsを持つ擬微分方程式系の解の

構造の研究に有用であろう，と期待している。なお，本稿の議論の詳細については，[Wt]を参照のこと。

文献表

[Ks-Sch] : M. Kashiwara and P. Schapira : Sheaves on manifolds Grundlehren der math. wiss. 292, Springer-Verlag (1990)

[Tk] : Kiyoshi Takeuchi : Binormal deformation and bimicro-localization. (to appear)

[Wt] : 第三超局所解析について，千葉大修論 (1995)