数理解析研究所講究録
977 巻 1997 年 81-84



# Automorphisms arising from composition of subfactors

九州大学　数理学研究科
幸崎秀樹 (Hideki Kosaki)

## 1. Introduction

因子環 $L$ に二つの有限群 $H,K$ の外部的作用 $\alpha : H \to Aut(L), \beta : K \to Aut(L)$ が与えられた時，接合積と不動点環を考えることにより因子環，部分因子環の対

$$M = L \rtimes_{\alpha} H \supseteq N = L^{(\beta,K)}$$

が得られる．(もちろん Jones 指数は $[M;N] = \#H \times \#K$ である．) この時，二つの作用 $\alpha_H, \beta_K$ が ($Out(L)$ の中で) 無限群を生成する事と $M \supseteq N$ が infinite depth であることが等価であり，このようにして Bisch-Haagerup は様々な増大度をもつグラフを構成した．一方，$\alpha_H, \beta_K$ が ($Out(L)$ の中で) 積群になっている事と $M \supseteq N$ が depth 2 である事は同値であり，この考え方に基ずき (コサイクルで変形された) Majid 型 Hopf 環が泉，幸崎により研究された．

ここでは $M = L \rtimes_{\alpha} H \supseteq N = L^{(\beta,K)}$ から出発して，両側加群または sector の分解を行った時に現れる 1 次元の既約成分 (つまり自己同型, 正確には $Out(L)$ の元) 全体の作る群の構造について説明する．このノートの結果は Jeong Hee Hong 氏との共同研究によるものであり，詳しい文献表は Rome での研究集会の Proceedings 用の記事に付けたのでここでは省略致します．

## 2. $(\rho\bar{\rho})^n$ の既約分解

$\rho_1, \rho_2 \in Sect(L)$ を $\rho_1(L) = L^{(\beta,K)} = N, \rho_2(L) = L^{(\alpha,H)}$ となる sector として，$\rho = \bar{\rho}_1\rho_2 \in Sect(L)$ と置く．この時，$M \supseteq N \cong L \supseteq \rho(L)$ であり，$M \supseteq N$ について調べる事と $\rho \in Sect(L)$ について調べる事は等価である．

$$\begin{aligned}(\rho\bar{\rho})^n &= \bar{\rho}_1(\rho_2\bar{\rho}_2)(\rho_1\bar{\rho}_1)\cdots(\rho_2\bar{\rho}_2)\rho_1 \\ &= \sum^{\oplus}_{k_1,k_2,\cdots,k_n \in K;\ h_1,h_2,\cdots,h_{n-1} \in H} \bar{\rho}_1\beta_{k_1}\alpha_{h_1}\beta_{k2}\cdots\alpha_{h_{n-1}}\beta_{k_n}\rho_1\end{aligned}$$

であるから，$2n-1$ の alternating product $\theta = \beta_{k_1}\alpha_{h_1}\beta_{k_2}\cdots\alpha_{h_{n-1}}\beta_{k_n}$ を考える必要がある．出発点は次の Lemma である．

**Lemma.** $\theta, \theta'$ を上の様な二つの alternating product とする．二つの sector $\bar{\rho}_1\theta\rho_1, \bar{\rho}_1\theta'\rho_1$ が non-disjoint である為の必要十分条件は $\alpha_H\theta\alpha_H = \alpha_H\theta'\alpha_H$ が $Out(L)$ で成り立つ事である．更に, この両側コセットの条件が満たされている時, 実は $\bar{\rho}_1\theta\rho_1 = \bar{\rho}_1\theta'\rho_1$ である．

従って, 長さ $2n-1$ の alternating product 全体を両側コセットの条件で割ったものを考える事が必要になる．$\{\theta_i\}_{i=1,2,\cdots,\ell}$ をこの代表元全体, また $n_i$ を $\theta_i$ を含むクラスの中の元の個数とする．上の Lemma は

$$(\rho\bar{\rho})^n = \sum_{i=1}^{\ell}{}^{\oplus} n_i\bar{\rho}_1\theta_i\rho_1.$$

を意味している．次に，各 $\bar{\rho}_1\theta_i\rho_1 (i=1,2,\cdots,\ell)$ の既約分解を調べなければならない。その為には self-intertwiner 全体の代数 $Hom(\bar{\rho}_1\theta_i\rho_1\bar{\rho}_1\theta_i\rho_1)$ を決めれば良い．がんばってとにかく計算するとこれは捻り群環 $\mathbf{C}_{\xi_{\theta_i}}([\alpha_H \cap \theta_i\alpha_H\theta_i^{-1}])$ である事が分かる．但し，$[\cdot]$ は $Out(L)$ でのクラスを表し，$\xi_{\theta_i}$ は stabilizer 群 $[\alpha_H \cap \theta_i\alpha_H\theta_i^{-1}]$ 上の two-cocycle である．$(\rho\bar{\rho})^n$ の self-intertwiner の代数は $M_{2n} \cap M'$ であるので，次の定理が得られたことになる．

**Theorem.**

$$(\rho\bar{\rho})^n = \sum_{i=1}^{\ell}{}^{\oplus} M_{n_i}(\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}_{\theta_i}([\alpha_H \cap \theta_i\alpha_H\theta_i^{-1}])$$

**3.** $\sqcup_k(\rho\bar{\rho})^k$ **の中の自己同型全体の群**

捻り群環 $\mathbf{C}([\alpha_H \cap \theta_i\alpha_H\theta_i^{-1}])$ の各 minimal projection $p$ が既約分解中の成分を与える訳であるが，$p$ に対応する既約 sector の次元はある種のトレースの値として計算可能である．これが 1 である為の条件を書き下してみると，次の三つの条件であることがわかる．

(i) $[\alpha_H \cap \theta_i\alpha_H\theta_i^{-1}] = [\alpha_H]\ (=H)$，つまり，$[\theta_i\alpha_H\theta_i^{-1}] = [\alpha_H]$，
(ii) $\xi_{\theta_i} \in B^2(H, \mathbf{T})$ (コバウンダリー)，
(iii) $p \in \mathbf{C}_{\theta_{\theta_i}}([\alpha_H \cap \theta_i\alpha_H\theta_{\theta_i}]) = \mathbf{C}(H)$ が $H$ の一次元表現に対応する．

任意の長さの alternating product で (i),(ii) を満たすものを寄せ集めて先の Lemma の同値関係で割る．但し，条件 (i) があるので，今の場合

には $\theta \sim \theta'$ は普通のコセットの条件 $[\theta\alpha_H] = [\theta'\alpha_H]$ を意味する．これらの群を $G_0$ とすれば，求めたい群 $G$ は (群構造は抜きにして) 直積空間 $G_0 \times Hom(H, \mathbf{T})$ となる訳である．

**Example.** $\Gamma = H \cdot K$ が積群，$\gamma$ をその因子環 $L$ への外部的作用とし，これを部分群に制限して $\alpha = \gamma\mid_H, \beta = \gamma\mid_K$ と置く．(勿論この例ではコサイクルは全く現れない．) $G_0 = N_\Gamma(H)/H$ (Weyl 群) であるのは明かである．$(g, \chi) \in N_\Gamma(H) \times Hom(H, \mathbf{T})$ により決まる自己同型 $\Pi_{g,\chi} \in Aut(M = L \rtimes_\alpha H)$ は次の形となる．

$$\Pi_{g,\chi}(\sum_{h\in H} x_h\lambda_h) = \sum_{h\in H} \chi(ghg^{-1})\gamma_g(x_h)\lambda_{ghg^{-1}}$$

クラス $[\Pi_{g,\chi}] \in Out(M)$ は勿論 $g$ のクラス $(\in N_\Gamma(H)/H)$ により決まり，また $\chi(g \cdot g^{-1})$ も $[g]$ で決まっている．この様な二つの自己同型同志の積を計算して群構造が決定できる．この例では

$$G = Hom(H, \mathbf{T}) \rtimes (N_\Gamma(H)/H)$$

と半直積で表されことは明らかであろう．但し，作用は

$$(\chi, g) \in Hom(H, \mathbf{T}) \times (N_\Gamma(H)/H) \to \chi(g \cdot g^{-1}) \in Hom(H, \mathbf{T})$$

で与えられている．

一般の場合には inner perturbation の影響により $\lambda_{ghg^{-1}}$ の係数としてユニタリが現れてこれが積の規則を変えてしまうことが起こりうる．すなわち，次の定理が成立する．

**Theorem.** 群 $G$ は

$$1 \to Hom(H, \mathbf{T}) \to G \to G_0 \to 1$$

で与えられる拡大である．ここで，$G_0$ の $Hom(H, \mathbf{T})$ への作用は上の例と同じであり，拡大を定める $H^2(G_0, Hom(H, \mathbf{T}))$ の元はもちろん書き下すことが可能である．

典型的な応用として河東氏の意味での relative $\chi$-群のを計算をあげておく．実は，以下の例だけならば (ごく少数の ?) 専門家の間では数年前からよく知られていたのだと思うが，ここら辺のことが上の一般的な結果を

そもそも考え始めたきっかけである．$\alpha, \beta$ を hyperfinite $II_1$ factor $\mathcal{R}_0$ の周期 2 の外部的自己同型として積 $\alpha\beta$ の outer period を $2n$ ($n \geq 2$) とする．また，$\omega$ を $\alpha\beta$ の Connes obstruction とする．(したがって $\omega^{2n} = 1$ である.) この時，$\mathcal{R}_0 \rtimes_\alpha \mathbf{Z}_2 \supseteq \mathcal{R}_0^{(\beta,\mathbf{Z}_2)}$ の Jones 指数は 4 であり，グラフは Coxeter Dynkin 図形 $D_{2n}^{(1)}$ である．したがって，depth は $2n$ で り，$\sqcup_k(\rho\bar{\rho})^k = \sqcup_{k=0}^n(\rho\bar{\rho})^k$ の中に 4 個の自己同型が現れる．前定理の cohomology は Connes obstruction により決まっていて，relative $\chi$-群は (normalizer の分 $\mathbf{Z}_2$ がつけ加わって, また Loi invariant は消えていて) 次の通りとなる．

**Theorem.**

$$\chi(\mathcal{R}_0 \rtimes_\alpha \mathbf{Z}_2, \mathcal{R}_0^{(\beta,\mathbf{Z}_2)}) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 & (\omega^n = 1 \text{ の時}), \\ \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2 & (\omega^n = -1 \text{ の時}). \end{cases}$$

Jones 指数が 4 以下の場合には，$\sqcup_k \rho\bar{\rho}^k$ の中に現れる自己同型 $\theta$ は inner perturbation を行い，いつでも $\theta \in Aut(M, N)$ (つまり $\theta(N) = N$) とできる．しかしこのことは一般には保障されない．典型的な反例は Jones 指数 $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ の Haagerup による部分因子環や交代群の不動点環として得られる $L^{A_4} \supseteq L^{A_5}$ などである．このような自己同型は特に重要なのであるが (長田，幸崎の non-strong outer という概念，河東による centrally free という概念，Evans-河東 の orbifold の話等々)，今の場合 $\sqcup_k(\rho\bar{\rho})^k$ の自己同型がいつこの性質を持つかを具体的に書き下すことも可能である．