数理解析研究所講究録
977 巻 1997 年 85-91

DIMENSION THEORY OF THE C^*-ALGEBRAS OF LIE GROUPS

須藤 隆洋 (TAKAHIRO SUDO)

東京都立大学 理学部

C*- 環の複素次元 (stable rank) は、無理数回転 C*- 環上の有限生成射影加群の安定同値類と同値類の関係を調べる簡約性の問題などの解決のために、Rieffel[R] によって導入された。

定義 1. $\mathfrak{A}$ を単位元をもつ C*- 環とする。$\mathfrak{A}$ の複素次元 (stable rank)sr($\mathfrak{A}$) は次の条件を満たす最小の正整数として定義する:任意の $\varepsilon > 0$ と $\mathfrak{A}^n$ の任意の元 $(a_i)_{i=1}^n$ に対して、$\mathfrak{A}^n$ の元 $(b_i)_{i=1}^n$ が存在して、$\|a_i - b_i\| < \varepsilon (1 \leq i \leq n)$ をみたし、$\sum_{i=1}^n b_i^* b_i$ が可逆になる。

単位元をもたない C*- 環 $\mathfrak{A}$ に対して sr($\mathfrak{A}$) を、その単位元付加 $\mathfrak{A}^\sim$ の sr($\mathfrak{A}^\sim$) で定義する。

Rieffel は実 3 次元ハイゼンベルク群と $ax + b$ 群の C*- 群環の複素次元を計算し、そして、次の興味ある問題を提出した:

問題. G を任意のリー群とし、$C^*(G)$ をその C^*- 群環とする。このとき、sr($C^*(G)$) を G の言葉で記述せよ。

この問題に対して、まず Sheu[Sh] が半直積 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$ の形の単連結巾零リー群の C*- 環の複素次元を計算し、また、この C*- 環上の有限生成射影加群の簡約性の問題に対する評価式を得た。

この講演では、特に、I 型連結従順リー群の C*- 群環の複素次元を群の幾何的量で評価する。

G を連結リー群とし、$\mathfrak{G}$ をそのリー環とする。$\hat{G}$ を G の既約 (ユニタリ) 表現全体のユニタリ同値類の空間とする。$\hat{G}$ には、ハル - カーネル位相を入れる。$\hat{G}_1, \hat{G}_\infty$ でそれぞれ G の 1, 無限次元既約表現からなる $\hat{G}$ の部分空間とする。

$\mathfrak{G}^*$ を $\mathfrak{G}$ の実双対空間とすると、G の余随伴 (coadjoint) 作用 Ad^* が $\mathfrak{G}^*$ 上に定義される。Ad^* による $\mathfrak{G}^*$ の不動点部分空間を $(\mathfrak{G}^*)^G$ とする。

このとき、次が得られる：

定理 **2** **[S.T1]**. G を単連結巾零リー群とすると、次がいえる：

$$\mathrm{sr}(C^*(G)) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{G}^*)^G.$$

注意. この結果は ax+b 群の場合には、成り立たないことがわかる。上の場合には、次がいえる：

$$\mathrm{sr}(C^*(G)) = 1 \Leftrightarrow G \cong \mathbb{R} \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{G}^*)^G = 1.$$

上の結果の拡張として、I 型の単連結可解リー群の場合に、次の結果が得られる：

定理 **3** **[S.T2]**. G を I 型の単連結可解リー群とすると、次がいえる：

$$\mathrm{sr}(C^*(G)) = (2 \vee \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{G}^*)^G) \wedge \dim G.$$

この定理の証明には、次の命題が使われる：

命題 **4** **[S.T2]**. G を単連結可解リー群とすると、$\mathrm{sr}(C^*(G)) = 1$ である必要十分条件は、$G \cong \mathbb{R}$ である。

次に、G を従順な単連結リー群とし、R をその根基とし、$S = G/R$ とおく。このとき、

定理 **5.** G を I 型の従順な単連結リー群とすると、次がいえる：

$$\dim_{\mathbb{C}} \hat{R}_1^S \leq \mathrm{sr}(C^*(G)) \leq 2 \vee \dim_{\mathbb{C}} \hat{R}_1^S$$

ただし、 $\hat{R}_1^S$ は S の随判作用による $\hat{R}_1$ の不動点部分空間である。

証明の概略. まず、リー環の同型から、 $G \cong R \rtimes S$ が示せる。従って、 $C^*(G) \cong C^*(R) \rtimes S$. Pukanszky の連結リー群の既約ユニタリ表現の理論 [Pu] を使い、次の主張が示せる：

G を単連結可解リー群とすると、 G の既約表現は 1 か無限次元である。

$\hat{R}$ の開集合 $\hat{R}_\infty$ に対応する $C^*(R)$ の閉イデアルを $\mathfrak{I}_R$ とする。このとき、次は完全である：

$$0 \to \mathfrak{I}_R \to C^*(R) \to C_0(\hat{R}_1) \to 0.$$

$\hat{R}_1$ は S 作用で不変であるから、次が得られる：

$$0 \to \mathfrak{I}_R \rtimes S \to C^*(R) \rtimes S \to C_0(\hat{R}_1) \rtimes S \to 0.$$

$(\hat{R}_1)^S$ は $\hat{R}_1$ の S 不変閉集合であるから、

$$0 \to C_0(\hat{R}_1 \setminus \hat{R}_1^S) \rtimes S \to C_0(\hat{R}_1) \rtimes S \to C_0(\hat{R}_1^S) \otimes C^*(S) \to 0.$$

接合積の表現と共変表現との関係から、 $\mathfrak{I}_R \rtimes S$ の任意の既約表現は無限次元であることが示せる。また、竹崎の共変表現の理論 [T] を用いて、 $C_0(\hat{R}_1 \setminus \hat{R}_1^S) \rtimes S$ の任意の既約表現は無限次元であることがいえる。

従って、 [S.T2; Lemma 3.2] と同様の方法で、証明は完結する。 □

予稿集で出した次の予想は後で否定的に解決された：

予想. G を I 型の従順な単連結リー群とすると、$\mathrm{sr}(C^*(G)) = 1$ である必要十分条件は、$G \cong \mathbb{R} \times S$ である。ただし、S はコンパクト単連結半単純リー群である。

例として、G を半直積 $\mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathrm{Spin}(n) (n \geq 3)$ とする。ただし、$\mathrm{Spin}(n)$ は $\mathrm{SO}(n)$ の普遍被覆群であり、α は $\mathrm{SO}(n)$ の $\mathbb{R}^n$ 上の行列をかける作用から誘導されるものとする。このとき、$\mathrm{sr}(C^*(G)) = 1$ がいえる。

証明.

$$C^*(G) \cong C^*(\mathbb{R}^n) \rtimes \mathrm{Spin}(n) \cong C_0(\mathbb{R}^n) \rtimes \mathrm{Spin}(n)$$

となり、$\mathrm{Spin}(n)$ の $C_0(\mathbb{R}^n)$ 上の作用は、そのスペクトル $\mathbb{R}^n$ 上では、回転の作用になっていることが確かめられる。

従って、$\mathbb{R}^n$ の原点 $\{0\}$ が $\mathrm{Spin}(n)$ 作用の不動点であるから、次の完全系列が得られる：

$$0 \to C_0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rtimes \mathrm{Spin}(n) \to C_0(\mathbb{R}^n) \rtimes \mathrm{Spin}(n) \to C^*(\mathrm{Spin}(n)) \to 0.$$

$\mathrm{Spin}(n)$ がコンパクトより、$C^*(\mathrm{Spin}(n)) \cong \oplus_{\mathrm{Spin}(n)^\wedge} M_k(\mathbb{C})$. 次に、$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \approx \mathbb{R} \times S^{n-1}$ は $\mathrm{Spin}(n)$ 作用と両立する。また、$S^{n-1} \cong \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$ より、$\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \cong \mathrm{Spin}(n)/\Gamma$ となるように $\mathrm{Spin}(n)$ の閉部分群 Γ を選ぶ。このとき、

$$\begin{aligned} C_0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rtimes \mathrm{Spin}(n) &\cong C_0(\mathbb{R} \times S^{n-1}) \rtimes \mathrm{Spin}(n) \\ &\cong C_0(\mathbb{R}) \otimes C_0(\mathrm{Spin}(n)/\Gamma) \rtimes \mathrm{Spin}(n) \end{aligned}$$

がいえる。ここで、グリーンの非原始的 (imprimitive) な定理 [G; Corollary 2.10] より

$$C_0(\mathrm{Spin}(n)/\Gamma) \rtimes \mathrm{Spin}(n) \cong C^*(\Gamma) \otimes \mathbb{K}(L^2(\mathrm{Spin}(n)/\Gamma)).$$

また、$C^*(\Gamma) \cong \oplus_{\hat{\Gamma}} M_k(\mathbb{C})$. 以上の構造解析より、$\mathrm{sr}(C^*(G)) = 1$ が従う。 □

従って、次の予想定理は間違いであった：

予想定理 A. G を I 型の従順な単連結リー群とすると、次がいえる：

$$\mathrm{sr}(C^*(G)) = (2 \vee \dim_{\mathbb{C}} \hat{R}_1^S) \wedge (\dim R \vee 1)$$

しかしながら、上の等号の成立には、さらに幾つかの条件が必要であることがわかった。

次に従順でない連結リー群の場合を考える。G をコンパクトでない連結実半単純リー群とする。KAN を G の岩沢分解とする。G の実階数 $\mathrm{rr}(G)$ は、$\dim A$ で定義される。このとき、次がいえる：

定理 6 [Su]. G をコンパクトでない連結実半単純リー群とすると、次がいえる：

$$\mathrm{sr}(C_r^*(G)) = \mathrm{rr}(G) \wedge 2.$$

更に、この拡張として、従順でない連結簡約リー群の場合に、次が得られる：

定理 7 [Su]. G を従順でない連結簡約リー群とすると、次がいえる：

$$\mathrm{sr}(C_r^*(G)) = (\mathrm{rr}([G,G]) \vee (\dim(Z_G)^\wedge + 1)) \wedge 2,$$

ただし、$[G,G]$ は G の交換子群で、Z_G は G の中心である。

更に、この部分的拡張として、従順でない連結実リー群の場合に、次が得られる：

定理 8 [Su]. G を I 型の従順でない連結実リー群とし、R をその根基とする。このとき、次が成り立つ：

$$\mathrm{sr}(C_r^*(G)) = \begin{cases} 1 \text{ 又は } 2 & \mathrm{rr}(G/R) = 1 \text{ の場合} \\ 2 & \mathrm{rr}(G/R) \geq 2 \text{ の場合} \end{cases}$$

予想. G を I 型の従順でない連結実リー群とすると、$\mathrm{sr}(C_r^*(G)) = 1$ である必要十分条件は、$\mathrm{rr}(G/R) = 1$ かつ R がコンパクトになることである。

もしこの予想が正しければ、次がいえる：

予想定理 **B.** G を I 型の従順でない連結実リー群とすると、次がいえる：

$$\mathrm{sr}(C_r^*(G)) = (\mathrm{rr}(G/R) \vee (\dim \hat{R} + 1)) \wedge 2.$$

参考文献

[B.D] T. Bröcker and T.t.Dieck, *Representations of Compact Lie Groups, GTM 98*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985.

[D] J. Dixmire, *C^*-Algebras*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1962.

[G] P. Green, *The structure of imprimitivity algebras*, J. Funct. Anal. **36** (1980), 88–104.

[M] G. W.Mackey, *Unitary representations of group extensions. I*, Acta Math. **99** (1958), 265–311.

[Pe] G. K. Pedersen, *C^*-Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, London-New York-San Francisco, 1979.

[Pu] L. Pukanszky, *Characters of connected Lie groups*, Acta Math. **133** (1974), 81–137.

[R] M. A. Rieffel, *Dimension and stable rank in the K-theory of C^*-algebras*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 301–333.

[Sh] A.J-L.Sheu, *A cancellation theorem for projective modules over the group C^*-algebras of certain nilpotent Lie groups*, Canad. J. Math. **39** (1987), 365–427.

[Su] T. Sudo, *Stable rank of the reduced C^*-algebras of non-amenable Lie groups of type I*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[S.T1] T. Sudo and H. Takai, *Stable rank of the C^*-algebras of nilpotent Lie groups*, Internat. J. Math. **6** (1995), 439–446.

[S.T2] ———, *Stable rank of the C^*-algebras of solvable Lie groups of type I*, preprint (1996).

[T] M. Takesaki, *Covariant representations of C^*-algebras and their locally compact automorphism groups*, Acta Math. **119** (1967), 273–303.

192-03 東京都八王子市南大沢 1-1 東京都立大学理学部数学科 院生室
E-mail address: sudoh@math.metro-u.ac.jp