

# 離散時間モデルによる 経路依存型オプションの価格の上・下界評価

大阪大学 経済学部 大西 匡光 (Masamitsu OHNISHI)

## 1 はじめに

本論文で扱う経路依存型オプションとは、オプションの満期時において、その発行時からの原資産の価格過程の経路に依存した利得を得る権利のことである。例えば、原資産の価格過程の経路に依存した行使価格で原資産を買う(コール)、あるいは売る(プット)オプションの代表的なものとして、その行使価格が原資産の価格過程の経路の最安値(コール)、あるいは最高値(プット)で定められるルックバック・オプション、行使価格が原資産の価格過程の経路の算術平均、あるいは幾何平均で定められる平均オプション(アジア・オプション)などがある。また、原資産の価格過程の経路に依存した価値過程で定められる対象資産を規定の行使価格で買う(コール)、あるいは売る(プット)オプションの代表的なものとして、その対象資産の価値過程が、原資産の価格過程の経路の最高値(コール)、あるいは最安値(プット)で定められるルックバック・オプション(ロシア・オプション)、原資産の価格過程の経路の算術平均、あるいは幾何平均で定められる平均オプション(アジア・オプション)などがある。

これらのオプションについては、主に連続時間のモデルを用いて、価格付けの問題、アメリカ型の場合の最適行使問題等について、近年活発な研究がなされてきている。さらには、行使価格や対象資産の価値過程が、原資産の価格過程の経路の他の統計量で定めたオプションについても、最近諸種提案され、それらの価格付けについての研究もなされてきている。

本論文ではそうした経路依存型オプションのある広いクラスに属するものに対し、離散時間モデルを用いて、それらの価格の上・下界の評価をするための統一的なアプローチを試みる。

まず残り1期間問題に対して、オプションの価格の上・下界を評価する問題を、状態価格の考え方を用いて、同一の制約条件のもとで共通の目的関数を最大化・最小化する2つの線形計画問題として定式化し、それらの最適解を特徴づける。つぎに残り多期間問題に対して、残り1期間問題の結果を繰り返し利用することにより、オプションの価格の上・下界の評価式の再帰式を導出する。さらに市場の投資家の危険回避性を考慮することによって、同様の手法を用い、よりタイトな上・下界の評価を試みる。

## 2 モデルと仮定

本論文ではオプションの発行時から満期時までを、ある正整数の  $T$  期間 ( $T \in \mathcal{N}_{++} := \{1, 2, \dots\}$ ) に分割した離散時間モデルを考える。原資産の価格過程としては、第  $t$  期 ( $t \in \mathcal{N}_+ := \{0, 1, \dots\}$ ) のときの価格を  $s_t (> 0)$  としたとき、それまで過去の経路(あるいは履歴)

$$h_t := (s_0, s_1, \dots, s_t) \tag{2.1}$$

に依存した確率  $p_j(h_t, t) (> 0)$  で次期、第  $t+1$  期には  $s_{t+1} = s_t u_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) となる(一般的には、時間非齊次、非 Markov 的な)確率過程を考える。第  $t$  期における原資産の収益率(+1)を  $v_t$ , すなわち

$$v_t := \frac{s_t}{s_{t-1}}, \quad t \in \mathcal{N}_{++} \tag{2.2}$$

と定義すれば,

$$h_t = (h_{t-1}, s_t) = (h_{t-1}, s_{t-1}v_t), \quad t \in \mathcal{N}_{++} \quad (2.3)$$

と表すこともできる. また第  $t$  期までの可能な経路  $h_t$  のすべてからなる集合を  $H_t$  ( $\subset \mathcal{R}_{++}^{t+1}$ ) で表す.

一般性を失うことなく,

$$u_1 < u_2 < \cdots < u_n \quad (2.4)$$

と仮定する.

本論文で扱う経路依存型オプションとは, オプションの満期時  $T \in \mathcal{N}_{++}$  において, その発行時からの原資産の価格過程の経路

$$h_T = (s_0, s_1, \dots, s_T) = (h_{T-1}, s_T) = (h_{T-1}, s_{T-1}v_T) \quad (2.5)$$

に依存した行使価格  $K(h_T, T)$  で原資産を買う (コール), あるいは売る (プット) 権利のことである. ここで関数  $K$  は, すべての正整数 (の満期)  $T \in \mathcal{N}_{++}$  に対して定義されるものとする, すなわち

$$K : \bigcup_{T \in \mathcal{N}_{++}} \{(h_T, T) : h_T \in H_T\} \rightarrow \mathcal{R}_+. \quad (2.6)$$

本論文では, 紙面の都合上, ヨーロッパ型のコール・オプションとプット・オプションの価格の評価のみを行うことにする.

以下の仮定を設ける.

#### 仮定 2.1

- A1 市場に裁定機会は存在しない.
- A2 オプションの発行時から満期時までの間に原資産の配当はなく, その売買の取引に手数料あるいは税金はかからない.
- A3 無危険資産が存在し, その利子率は既知で, オプションの発行時から満期時まで一定である (便宜上

$$R := [\text{無危険資産の利子率}] + 1$$

と定義する). □

仮定 A1 より, 原資産の収益率と無危険資産の利子率の間には

$$u_1 < R < u_n \quad (2.7)$$

なる関係式が成立しなければならない.

### 3 市場の投資家の危険回避性を考慮しない場合

#### 3.1 経路依存型コール・オプション

本論文で扱う経路依存型コール・オプションとは, オプションの満期時  $T \in \mathcal{N}_{++}$  において, その発行時からの原資産の価格過程の経路

$$h_T = (s_0, s_1, \dots, s_T) = (h_{T-1}, s_T) = (h_{T-1}, s_{T-1}v_T) \quad (3.1)$$

に依存した行使価格  $K(h_T, T)$  で原資産を買う権利のことである. 満期時の行使価格を規定する関数  $K$  の形により, 様々な経路依存型コール・オプションを定義することができるが, それらのうちで代表的なものとしては以下のものが挙げられる:

例 3.1 (経路依存型コール・オプション)

ルックバック・オプション:

$$K^{\text{LBC}}(h_T, T) := \min \{s_t : t = 0, 1, \dots, T\}, \quad (3.2)$$

平均オプション:

算術平均オプション:

$$K^{\text{AA}}(h_T, T) := \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T s_t, \quad (3.3)$$

幾何平均オプション:

$$K^{\text{GA}}(h_T, T) := \left\{ \prod_{t=0}^T s_t \right\}^{\frac{1}{T+1}}. \quad (3.4)$$

□

いま

$C(h_t, t)$ : 満期時を  $T \in \mathcal{N}_{++}$  とし, 第  $t$  期 ( $t = 0, 1, \dots, T$ ) において, 原資産の価格過程の経路を  $h_t$  としたときのコール・オプションの価格

と定義する.

$t = T$ , すなわちオプションの満期時においては次式が成り立つ:

$$C(h_T, T) = [s_T - K(h_T, T)]_+, \quad (3.5)$$

ただし, 実数  $a$  に対し,  $[a]_+ = \max\{0, a\}$  と定義する.

次の条件を仮定する.

仮定 3.1

C4  $K(h_T, T) = K((h_{T-1}, s_T), T)$  は  $s_T$  に関して凹である.

C5 すべての正整数 (の満期)  $T \in \mathcal{N}_{++}$  に対し, ある関数  $A: \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_{++} \times \mathcal{N}_{++} \rightarrow \mathcal{R}_+$  を含む再帰的な関係式

$$\frac{K(h_T, T)}{s_T} = A \left( \frac{K(h_{T-1}, T-1)}{s_{T-1}}, v_T, T \right) \quad (3.6)$$

を満足する.

C6 仮定 C5 の関数  $A(k_{T-1}, v_T, T)$  は  $k_{T-1}$  に関して単調非減少かつ凹である. □

例 3.1 で挙げたコール・オプションはいずれも仮定 C4, C5, C6 を満たしている:

例 3.2 (経路依存型コール・オプション)

ルックバック・オプション:

$$K^{\text{LBC}}(h_T, T) = \min \{K^{\text{LBC}}(h_{T-1}, T-1), s_T\}, \quad (3.7)$$

$$\frac{K^{\text{LBC}}(h_T, T)}{s_T} = \min \left\{ \frac{K^{\text{LBC}}(h_{T-1}, T-1)}{s_{T-1}} \cdot \frac{1}{v_T}, 1 \right\}, \quad (3.8)$$

平均オプション:

算術平均オプション:

$$K^{AA}(h_T, T) = \frac{TK^{AA}(h_{T-1}, T-1) + s_T}{T+1}, \quad (3.9)$$

$$\frac{K^{AA}(h_T, T)}{s_T} = \frac{T \frac{K^{AA}(h_{T-1}, T-1)}{s_{T-1}} \cdot \frac{1}{v_T} + 1}{T+1}, \quad (3.10)$$

幾何平均オプション:

$$K^{GA}(h_T, T) = \left\{ K^{GA}(h_{T-1}, T-1) \right\}^{\frac{T}{T+1}} s_T^{\frac{1}{T+1}} \quad (3.11)$$

$$\frac{K^{GA}(h_T, T)}{s_T} = \left\{ \frac{K^{GA}(h_{T-1}, T-1)}{s_{T-1}} \right\}^{\frac{T}{T+1}} v_T^{-\frac{T}{T+1}} \quad (3.12)$$

となり, すべて仮定 C4, C5, C6 を満足する.  $\square$

### 3.1.1 残り 1 期間問題

満期時  $T$  まで残り 1 期間, すなわち  $t = T - 1$  の場合を考え, それまでの原資産の価格過程の経路を

$$h_{T-1} = (s_0, s_1, \dots, s_{T-1}) \quad (3.13)$$

とする. この条件のもとで, 原資産の価格が次期 (オプションの満期時  $T$ ) に  $s_T = s_{T-1}u_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  になることを“状態  $j$  が起こる”と言い, 状態  $j$  が起こったとき, そしてそのときに限り, 1 単位の配当を受ける Arrow-Debreu 証券の現在 ( $t = T - 1$ ) の価格 (状態価格) を  $e_j(h_{T-1}, T - 1)$  とする. もし各状態  $j = 1, 2, \dots, n$  に対する Arrow-Debreu 証券をすべて 1 単位ずつ所有していれば, 次期にはどのような状態が起こっても確実に 1 単位の配当を受け取ることができる. したがって, 仮定 A1, A3 より, 次の関係式が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^n e_j(h_{T-1}, T-1) = R^{-1} \left( \sum_{j=1}^n Re_j(h_{T-1}, T-1) = 1 \right). \quad (3.14)$$

また原資産の価格に関しては, やはり仮定 A1 より,

$$s_{T-1} = \sum_{j=1}^n (s_{T-1}u_j) e_j(h_{T-1}, T-1) \left( s_{T-1} = R^{-1} \sum_{j=1}^n (s_{T-1}u_j) (Re_j(h_{T-1}, T-1)) \right), \quad (3.15)$$

あるいは, 両辺の  $s_{T-1}$  を消去して,

$$\sum_{j=1}^n u_j e_j(h_{T-1}, T-1) = 1 \quad (3.16)$$

が成立する. 同様にコール・オプションの価格  $C(h_{T-1}, T-1)$  についても次式が成立する:

$$\begin{aligned} C(h_{T-1}, T-1) &= \sum_{j=1}^n C((h_{T-1}, s_{T-1}u_j), T) e_j(h_{T-1}, T-1) \\ &= R^{-1} \sum_{j=1}^n C((h_{T-1}, s_{T-1}u_j), T) (Re_j(h_{T-1}, T-1)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここで

$$q_j(h_{T-1}, T-1) := Re_j(h_{T-1}, T-1), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.18)$$

はリスク中立確率とも解釈される。

以下では簡単のため、状態価格  $e_j(h_{T-1}, T-1)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  を略して  $e_j$ , リスク中立確率  $q_j(h_{T-1}, T-1)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  を略して  $q_j (= Re_j)$  と表すことにする。

$e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  のすべての値, あるいは  $q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  のすべての値が定めれば, 上式 (3.17) より  $C(h_{T-1}, T-1)$  の値は定まるが, 情報としては, 無危険資産の利子率  $R (-1)$  および原資産の価格過程の経路  $h_{T-1}$  のみが与えられているものとする。

したがってコール・オプションの価格の上・下界は,  $e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  を決定変数とし, 式 (3.14), (3.16) を同一の制約条件, 共通の目的関数式 (3.17) を最大化・最小化する, 以下のような 2 つの線形計画問題の最大値・最小値として得ることができる。

$$\text{LPC1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximize} \\ \text{or} \\ \text{minimize} \end{array} \right\} \quad \sum_{j=1}^n C((h_{T-1}, s_{T-1}u_j), T)e_j, \quad (3.19)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^n u_j e_j = 1, \quad (3.20)$$

$$\sum_{j=1}^n e_j = R^{-1}, \quad (3.21)$$

$$e_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.22)$$

あるいは,  $q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  を決定変数とすれば,

$$\text{LPC2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximize} \\ \text{or} \\ \text{minimize} \end{array} \right\} \quad R^{-1} \sum_{j=1}^n C((h_{T-1}, s_{T-1}u_j), T)q_j, \quad (3.23)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^n u_j q_j = R, \quad (3.24)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, \quad (3.25)$$

$$q_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.26)$$

と等価に書き換えることができる。

次の定理を得る。

**定理 3.1** コール・オプションの満期時を  $T \in \mathcal{N}_{++}$  とする。満期時まで残り 1 期間とする第  $T-1$  期において, 現資産の価格過程の経路を  $h_{T-1}$  とするとき, コール・オプションの価格  $C(h_{T-1}, T-1)$  に対する線形計画問題 LPC1 (LPC2) の最大値・最小値によって定まる上・下界をそれぞれ  $\bar{C}(h_{T-1}, T-1)$ ,  $\underline{C}(h_{T-1}, T-1)$  と表すと,

$$\bar{C}(h_{T-1}, T-1) = R^{-1} \{ \alpha C((h_{T-1}, s_{T-1}u_1), T) + (1-\alpha)C((h_{T-1}, s_{T-1}u_n), T) \}, \quad (3.27)$$

$$\underline{C}(h_{T-1}, T-1) = R^{-1} \{ \beta C((h_{T-1}, s_{T-1}u_h), T) + (1-\beta)C((h_{T-1}, s_{T-1}u_{h+1}), T) \} \quad (3.28)$$

が成立する, ただし

$$\alpha := \frac{u_n - R}{u_n - u_1} \quad (3.29)$$

とし,  $u_h \leq R < u_{h+1}$  である  $h \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  を用いて

$$\beta := \frac{u_{h+1} - R}{u_{h+1} - u_h} \quad (3.30)$$

とする.

証明: 線形計画問題 LPC2 を  $(v_T, C((h_{T-1}, s_{T-1}v_T), T))$  座標の上で考える (図 1). 図 1 で  $q_1 = 1, q_2 = 0, \dots, q_n = 0$  としたときに相当する点を  $A_1, q_1 = 0, q_2 = 1, \dots, q_n = 0$  としたときに相当する点を  $A_2, \dots, q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_n = 1$  としたときに相当する点を  $A_n$  とすると, それらの点列は  $v_T$  の関数

$$B(v_T) := C((h_{T-1}, s_{T-1}v_T), T) \quad (3.31)$$

のグラフ上に並ぶ点列となり, それらの凸包である陰の部分が制約条件 (3.25), (3.26) を満たす領域となる. ここで制約条件 (3.24) を考慮すると, すべての制約条件を満たす領域は線分  $JK$  になる. このことより, 最大化問題 LPC2 の最適解は点  $J$  に相当し, 最小化問題 LPC2 の最適解は点  $K$  に相当する. 仮定 C4 より, 関数  $B(v_T)$  は  $v_T$  に関して凸だから, これらの点はそれぞれ  $A_1$  と  $A_n$  を  $R - u_1 : u_n - R$  に内分する内分点,  $A_h$  と  $A_{h+1}$  を  $R - u_h : u_{h+1} - R$  に内分する内分点となる, ただし,  $h$  は  $u_h \leq R < u_{h+1}$  を満たす状態番号である. よって, 題意が証明できた.  $\square$

### 3.1.2 残り多期間問題

残り 1 期間問題と同様の考え方により, ある  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in E$  に対して,

$$C(h_t, t) = \sum_{j=1}^n C((h_t, s_t u_j), t+1) e_j \quad (3.32)$$

が成立する. ただし,  $E$  は制約条件式 (3.20), (3.21), (3.22) を満たす  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  全体の集合, すなわち,

$$E := \left\{ e = (e_1, e_2, \dots, e_n) : \sum_{j=1}^n u_j e_j = 1, \sum_{j=1}^n e_j = R^{-1}, e_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (3.33)$$

と定義される.

しかしながら,  $C((h_t, s_t u_j), t+1)$  は求められておらず, かわりに上界  $\bar{C}((h_t, s_t u_j), t+1)$  と下界  $\underline{C}((h_t, s_t u_j), t+1)$  のみが与えられており,

$$\begin{aligned} \min_{e \in E} \sum_{j=1}^n \underline{C}((h_t, s_t u_j), t+1) e_j &\leq \min_{e \in E} \sum_{j=1}^n C((h_t, s_t u_j), t+1) \\ &\leq C(h_t, t) e_j \\ &\leq \max_{e \in E} \sum_{j=1}^n C((h_t, s_t u_j), t+1) e_j \leq \max_{e \in E} \sum_{j=1}^n \bar{C}((h_t, s_t u_j), t+1) e_j \end{aligned} \quad (3.34)$$

が成立する. したがって

$$\bar{C}(h_T, T) := C(h_T, T), \quad (3.35)$$

$$\bar{C}(h_t, t) := \max_{e \in E} \sum_{j=1}^n \bar{C}((h_t, s_t u_j), t+1) e_j, \quad t = T-1, T-2, \dots, 0, \quad (3.36)$$

および

$$\underline{C}(h_T, T) := C(h_T, T), \quad (3.37)$$

$$\underline{C}(h_t, t) := \min_{e \in E} \sum_{j=1}^n \underline{C}((h_t, s_t u_j), t+1) e_j, \quad t = T-1, T-2, \dots, 0 \quad (3.38)$$

と再帰的に定義すれば,

$$\underline{C}(h_t, t) \leq C(h_t, t) \leq \overline{C}(h_t, t), \quad t = 0, 1, \dots, T \quad (3.39)$$

を満たすから, これらは  $C(h_t, t)$  の上・下界を与える.

次の定理を得る.

**定理 3.2** コール・オプションの満期時を  $T \in \mathcal{N}_{++}$  とする. 第  $t$  期 ( $t = 0, 1, \dots, T-1$ ) において現資産の価格過程の経路を  $h_t$  とするとき, 式 (3.35), (3.36) および式 (3.37), (3.38) で定義されるコール・オプションの価格の上・下界  $\overline{C}(h_t, t)$ ,  $\underline{C}(h_t, t)$  はそれぞれ

$$\overline{C}(h_t, t) = R^{-1} \{ \alpha \overline{C}((h_t, s_t u_1), t+1) + (1-\alpha) \overline{C}((h_t, s_t u_n), t+1) \}, \quad (3.40)$$

$$\underline{C}(h_t, t) = R^{-1} \{ \beta \underline{C}((h_t, s_t u_h), t+1) + (1-\beta) \underline{C}((h_t, s_t u_{h+1}), t+1) \} \quad (3.41)$$

を満たす. さらに  $k_t$  に関して単調非増加で凸なある関数  $\bar{c}(k_t, t)$ ,  $\underline{c}(k_t, t)$  を用いて,

$$\frac{\overline{C}(h_t, t)}{s_t} = \bar{c} \left( \frac{K(h_t, t)}{s_t}, t \right), \quad (3.42)$$

$$\frac{\underline{C}(h_t, t)}{s_t} = \underline{c} \left( \frac{K(h_t, t)}{s_t}, t \right) \quad (3.43)$$

と書き表すことができる.

**証明:** 上界に関する題意のみを示す.

式 (3.36) の右辺の最大化問題を考える.  $h_t$  を固定し,  $v_{t+1}$  の関数  $\overline{C}((h_t, s_t v_{t+1}), t+1)$  を定義すると, これが  $v_{t+1}$  に関して凸であれば, 残り 1 期間問題のときと同様の方法を用いることができる. そこで

(a)  $\overline{C}(h_t, t) = \overline{C}((h_t, s_{t-1} v_t), t)$  が  $v_t$  に関して凸であること;

(b)  $k_t$  に関して単調非増加で凸なある関数  $\bar{c}(k_t, t)$  が存在して,

$$\frac{\overline{C}(h_t, t)}{s_t} = \bar{c} \left( \frac{K(h_t, t)}{s_t}, t \right)$$

が成立すること

を  $t$  に関する帰納法で確かめよう.

(1)  $t = T$  のとき:

仮定 C4 より,

$$\overline{C}(h_T, T) = C(h_T, T) = [s_{T-1} v_T - K((h_{T-1}, s_{T-1} v_T), T)]_+ \quad (3.44)$$

は  $v_T$  に関して凸である. さらに

$$\frac{\overline{C}(h_T, T)}{s_T} = \frac{C(h_T, T)}{s_T} = \left[ 1 - \frac{K(h_T, T)}{s_T} \right]_+ = \bar{c} \left( \frac{K(h_T, T)}{s_T}, T \right), \quad (3.45)$$

ただし,

$$\bar{c}(k_T, T) := [1 - k_T]_+$$

であり, これは  $k_T$  に関して単調非増加な凸関数である. よって (a), (b) は成り立つ.

(2) 第  $t+1$  期 ( $t+1 \leq T$ ) のとき (a), (b) が成り立つとして, 第  $t$  期のときを示す:

まず,

$$\begin{aligned}\bar{C}(h_t, t) &= \max_{e \in E} \sum_{j=1}^n e_j \bar{C}((h_t, s_t u_j), t+1) \\ &= \max_{e \in E} \sum_{j=1}^n e_j(s_t u_j) \cdot \bar{c} \left( \frac{K((h_t, s_t u_j), t+1)}{s_t u_j}, t+1 \right)\end{aligned}\quad (3.46)$$

が成立する. ここで  $t, h_t$  (したがって  $s_t$ ) を固定し,  $u$  の関数を

$$W(u) := \frac{K((h_t, s_t u), t+1)}{s_t}, \quad (3.47)$$

$$V(u) := s_t u \cdot \bar{c} \left( \frac{K((h_t, s_t u), t+1)}{s_t u}, t+1 \right) = s_t u \cdot \bar{c} \left( \frac{W(u)}{u}, t+1 \right) \quad (3.48)$$

と定義すると, 式 (3.46) は

$$\bar{C}(h_t, t) = \max_{e \in E} \sum_{j=1}^n e_j V(u_j) \quad (3.49)$$

と書き直すことができる. さて, 仮定 C4 から  $W(u)$  は  $u$  に関する凹関数であることを用いると, 非負の実数  $u', u''$  と  $\lambda \in [0, 1]$  に対し,

$$\begin{aligned}& V((1-\lambda)u' + \lambda u'') \\ &= s_t \{(1-\lambda)u' + \lambda u''\} \cdot \bar{c} \left( \frac{W((1-\lambda)u' + \lambda u'')}{(1-\lambda)u' + \lambda u''}, t+1 \right) \\ &\leq s_t \{(1-\lambda)u' + \lambda u''\} \cdot \bar{c} \left( \frac{(1-\lambda)W(u') + \lambda W(u'')}{(1-\lambda)u' + \lambda u''}, t+1 \right) \\ &= s_t \{(1-\lambda)u' + \lambda u''\} \cdot \bar{c} \left( \frac{(1-\lambda)u'}{(1-\lambda)u' + \lambda u''} \cdot \frac{W(u')}{u'} + \frac{\lambda u''}{(1-\lambda)u' + \lambda u''} \cdot \frac{W(u'')}{u''}, t+1 \right) \\ &\leq s_t \{(1-\lambda)u' + \lambda u''\} \cdot \left\{ \frac{(1-\lambda)u'}{(1-\lambda)u' + \lambda u''} \bar{c} \left( \frac{W(u')}{u'}, t+1 \right) + \frac{\lambda u''}{(1-\lambda)u' + \lambda u''} \bar{c} \left( \frac{W(u'')}{u''}, t+1 \right) \right\} \\ &= (1-\lambda)s_t u' \cdot \bar{c} \left( \frac{W(u')}{u'}, t+1 \right) + s_t \lambda u'' \cdot \bar{c} \left( \frac{W(u'')}{u''}, t+1 \right) \\ &= (1-\lambda)V(u') + \lambda V(u'')\end{aligned}\quad (3.50)$$

が成立することから,  $V(u)$  は  $u$  に関して凸である. したがって, 式 (3.49) の形に注意すれば, 残り 1 期間問題と同様の方法より,

$$\begin{aligned}& \bar{C}(h_t, t) \\ &= R^{-1} \{ \alpha V(u_1) + (1-\alpha)V(u_n) \} \\ &= R^{-1} \left\{ \alpha s_t u_1 \cdot \bar{c} \left( \frac{K((h_t, s_t u_1), t+1)}{s_t u_1}, t+1 \right) + (1-\alpha) s_t u_n \cdot \bar{c} \left( \frac{K((h_t, s_t u_n), t+1)}{s_t u_n}, t+1 \right) \right\} \\ &= s_t \cdot R^{-1} \left\{ \alpha u_1 \cdot \bar{c} \left( A \left( \frac{K(h_t, t)}{s_t}, u_1, t+1 \right), t+1 \right) + (1-\alpha) u_n \cdot \bar{c} \left( A \left( \frac{K(h_t, t)}{s_t}, u_n, t+1 \right), t+1 \right) \right\} \\ &= s_t \cdot \bar{c} \left( \frac{K(h_t, t)}{s_t}, t \right)\end{aligned}\quad (3.51)$$

を得る, ただし

$$\bar{c}(k_t, t) := R^{-1} \{ \alpha u_1 \bar{c}(A(k_t, u_1, t+1), t+1) + (1-\alpha) u_n \bar{c}(A(k_t, u_n, t+1), t+1) \} \quad (3.52)$$

である。帰納法の仮定から  $\bar{c}(k_{t+1}, t+1)$  は  $k_{t+1}$  に関して単調非増加な凸関数であり、仮定 C6 より  $A(k_t, v_{t+1}, t+1)$  は  $k_t$  に関して単調非減少な凹関数であるから、 $\bar{c}(A(k_t, u_1, t+1), t+1)$ ,  $\bar{c}(A(k_t, u_n, t+1), t+1)$  のいずれも  $k_t$  に関して単調非増加な凸関数である。式 (3.52) より、 $\bar{c}(k_t, t)$  は  $k_t$  に関して単調非増加な凸関数の非負結合であるから、やはり  $k_t$  に関して単調非増加な凸関数である。

以上 (1), (2) により、帰納的に (a), (b) が証明された。□

この定理によれば:

1. 原資産の価格過程として、第  $t$  期 ( $t \in \mathcal{N}_+$ ) のときの価格を  $s_t (> 0)$  としたとき、それまでの過去の経路  $h_{t-1}$  に依存せず、それぞれ確率  $\alpha, 1-\alpha$  で次期、第  $t+1$  期には価格  $s_{t+1} = s_t u_1, s_t u_n$  となる (時間斉次, Markov 的) 2 項過程を考えて、その価格過程のもとでのコール・オプションの価格をを評価すれば、元の価格過程での価格の上界を与える;
2. 一方、原資産の価格過程として、第  $t$  期 ( $t \in \mathcal{N}_+$ ) のときの価格を  $s_t (> 0)$  としたとき、それまでの過去の経路  $h_{t-1}$  に依存せず、それぞれ確率  $\beta, 1-\beta$  で次期、第  $t+1$  期には価格  $s_{t+1} = s_t u_h, s_t u_{h+1}$  となる (時間斉次, Markov 的) 2 項過程を考えて、その価格過程のもとでのコール・オプションの価格をを評価すれば、元の価格過程での価格の下界を与える。

したがって、いま  $\bar{Q}(h_T|h_t)$ ,  $Q(h_T|h_t)$  により、それぞれ上記 1, 2 の 2 項過程のもとで、第  $t$  期における過去の価格過程の経路が  $h_t$  であったという条件のもとで、満期時  $T$  までの経路  $h_T$  がとなる確率を表すことにすれば、次の定理が成り立つ。

### 定理 3.3

$$\bar{C}(h_t, t) = R^{-(T-t)} \sum_{h_T \in H_T} \bar{Q}(h_T|h_t) C(h_T, T), \quad (3.53)$$

$$\underline{C}(h_t, t) = R^{-(T-t)} \sum_{h_T \in H_T} Q(h_T|h_t) C(h_T, T). \quad (3.54)$$

□

## 3.2 経路依存型プット・オプション

本論文で扱う経路依存型プット・オプションとは、オプションの満期時  $T \in \mathcal{N}_{++}$  において、その発行時からの原資産の価格過程の経路  $h_T$  に依存した行使価格  $K(h_T, T)$  で原資産を売る権利のことである。満期時の行使価格を規定する関数  $K$  の形により、様々な経路依存型プット・オプションを定義することができるが、それらのうちで代表的なものとしては以下のものが挙げられる:

### 例 3.3 (経路依存型プット・オプション)

ルックバック・オプション:

$$K^{\text{LBP}}(h_T, T) := \max \{s_t : t = 0, 1, \dots, T\}, \quad (3.55)$$

平均オプション:

算術平均オプション:

$$K^{\text{AA}}(h_T, T) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T s_t, \quad (3.56)$$

幾何平均オプション:

$$K^{\text{GA}}(h_T, T) = \left\{ \prod_{t=0}^T s_t \right\}^{\frac{1}{T+1}}. \quad (3.57)$$

□

いま

$P(h_t, t)$ : 満期時を  $T \in \mathcal{N}_{++}$  とし, 第  $t$  期 ( $t = 0, 1, \dots, T$ ) において, 原資産の価格過程の経路を  $h_t$  としたときのプット・オプションの価格

と定義する.

$t = T$ , すなわちオプションの満期時には次式が成り立つ:

$$P(h_T, T) = [K(h_T, T) - s_T]_+. \quad (3.58)$$

次の条件を仮定する.

仮定 3.2

P4  $K(h_T, T) = K((h_{T-1}, s_T), T)$  は  $s_T$  に関して凸である.

P5 すべての正整数 (の満期)  $T \in \mathcal{N}_{++}$  に対し, ある関数  $A: \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_{++} \times \mathcal{N}_{++} \rightarrow \mathcal{R}_+$  を含む再帰的な関係式

$$\frac{K(h_T, T)}{s_T} = A\left(\frac{K(h_{T-1}, T-1)}{s_{T-1}}, v_T, T\right) \quad (3.59)$$

を満足する.

P6 仮定 P5 の関数  $A(k_{T-1}, v_T, T)$  は  $k_{T-1}$  に関して単調非減少かつ凸である. □

例 3.3 で挙げたプット・オプションのうち, 幾何平均オプション以外は仮定 P4, P5, P6 を満たしている:

例 3.4 (経路依存型プット・オプション)

ルックバック・オプション:

$$K^{\text{LBP}}(h_T, T) = \max\{K^{\text{LBP}}(h_{T-1}, T-1), s_T\}, \quad (3.60)$$

$$\frac{K^{\text{LBP}}(h_T, T)}{s_T} = \max\left\{\frac{K^{\text{LBP}}(h_{T-1}, T-1)}{s_{T-1}} \cdot \frac{1}{v_T}, 1\right\}, \quad (3.61)$$

平均オプション:

算術平均オプション:

$$K^{\text{AA}}(h_T, T) = \frac{TK^{\text{AA}}(h_{T-1}, T-1) + s_T}{T+1}, \quad (3.62)$$

$$\frac{K^{\text{AA}}(h_T, T)}{s_T} = \frac{T \frac{K^{\text{AA}}(h_{T-1}, T-1)}{s_{T-1}} \cdot \frac{1}{v_T} + 1}{T+1} \quad (3.63)$$

となり, すべて仮定 P4, P5, P6 を満足する. □

### 3.2.1 残り1期間問題

コール・オプションの場合と同様, プット・オプションの価格の上・下界は,  $e_j, j = 1, 2, \dots, n$  を決定変数とする以下のような2つの線形計画問題の最大値・最小値として得ることができる.

$$\text{LPP1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximize} \\ \text{or} \\ \text{minimize} \end{array} \right\} \sum_{j=1}^n P((h_{T-1}, s_{T-1}u_j), T)e_j, \quad (3.64)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^n u_j e_j = 1, \quad (3.65)$$

$$\sum_{j=1}^n e_j = R^{-1}, \quad (3.66)$$

$$e_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.67)$$

あるいは,  $q_j, j = 1, 2, \dots, n$  を決定変数とすれば,

$$\text{LPP1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{maximize} \\ \text{or} \\ \text{minimize} \end{array} \right\} R^{-1} \sum_{j=1}^n P((h_{T-1}, s_{T-1}u_j), T)q_j, \quad (3.68)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^n u_j q_j = R, \quad (3.69)$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, \quad (3.70)$$

$$q_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.71)$$

と等価に書き換えることができる.

次の定理を得る.

**定理 3.4** プット・オプションの満期時を  $T \in \mathcal{N}_{++}$  とする. 満期時まで残り1期間とする第  $T-1$  期において, 現資産の価格過程の経路を  $h_{T-1}$  とするとき, プット・オプションの価格  $P(h_{T-1}, T-1)$  に対する線形計画問題 LPP1 (LPP2) の最大値・最小値によって定まる上・下界をそれぞれ  $\bar{P}(h_{T-1}, T-1)$ ,  $\underline{P}(h_{T-1}, T-1)$  と表すと,

$$\bar{P}(h_{T-1}, T-1) = R^{-1} \{ \alpha P((h_{T-1}, s_{T-1}u_1), T) + (1-\alpha)P((h_{T-1}, s_{T-1}u_n), T) \}, \quad (3.72)$$

$$\underline{P}(h_{T-1}, T-1) = R^{-1} \{ \beta P((h_{T-1}, s_{T-1}u_h), T) + (1-\beta)P((h_{T-1}, s_{T-1}u_{h+1}), T) \} \quad (3.73)$$

が成立する. □

### 3.2.2 残り多期間問題

コール・オプションの場合と同様,

$$\bar{P}(h_T, T) := P(h_T, T), \quad (3.74)$$

$$\bar{P}(h_t, t) := \max_{e \in E} \sum_{j=1}^n \bar{P}((h_t, s_t u_j), t+1) e_j, \quad t = T-1, T-2, \dots, 0, \quad (3.75)$$

および

$$\underline{P}(h_T, T) := P(h_T, T), \quad (3.76)$$

$$\underline{P}(h_t, t) := \min_{e \in E} \sum_{j=1}^n \underline{P}((h_t, s_t u_j), t+1) e_j, \quad t = T-1, T-2, \dots, 0 \quad (3.77)$$

と再帰的に定義すれば,

$$\underline{P}(h_t, t) \leq P(h_t, t) \leq \bar{P}(h_t, t), \quad t = 0, 1, \dots, T \quad (3.78)$$

を満たすから, これらは  $P(h_t, t)$  の上・下界を与える.

次の定理を得る.

**定理 3.5** プット・オプションの満期時を  $T \in \mathcal{N}_{++}$  とする. 第  $t$  期 ( $t = 0, 1, \dots, T-1$ ) において現資産の価格過程の経路を  $h_t$  とするとき, 式 (3.74), (3.75) および式 (3.76), (3.77) で定義されるプット・オプションの価格の上・下界  $\bar{P}(h_t, t)$ ,  $\underline{P}(h_t, t)$  はそれぞれ

$$\bar{P}(h_t, t) = R^{-1} \{ \alpha \bar{P}((h_t, s_t u_1), t+1) + (1-\alpha) \bar{P}((h_t, s_t u_n), t+1) \}, \quad (3.79)$$

$$\underline{P}(h_t, t) = R^{-1} \{ \beta \underline{P}((h_t, s_t u_h), t+1) + (1-\beta) \underline{P}((h_t, s_t u_{h+1}), t+1) \} \quad (3.80)$$

を満たす. さらに  $k_t$  に関して単調非減少で凸なある関数  $\bar{p}(k_t, t)$ ,  $\underline{p}(k_t, t)$  を用いて,

$$\frac{\bar{P}(h_t, t)}{s_t} = \bar{p}\left(\frac{K(h_t, t)}{s_t}, t\right), \quad (3.81)$$

$$\frac{\underline{P}(h_t, t)}{s_t} = \underline{p}\left(\frac{K(h_t, t)}{s_t}, t\right) \quad (3.82)$$

と書き表すことができる. □

**定理 3.6**

$$\bar{P}(h_t, t) = R^{-(T-t)} \sum_{h_T \in H_T} \bar{Q}(h_T | h_t) P(h_T, T), \quad (3.83)$$

$$\underline{P}(h_t, t) = R^{-(T-t)} \sum_{h_T \in H_T} \underline{Q}(h_T | h_t) P(h_T, T). \quad (3.84)$$

□

## 4 市場の投資家の危険回避性を考慮する場合

紙面の都合上省略する.

## 5 おわりに

原資産の価格過程の経路に依存した価値過程で定められる対象資産を規定の行使価格で買う (コール), あるいは売る (プット) オプション, 例えば, その対象資産の価値過程が, 原資産の価格過程の経路の最高値 (コール), あるいは最安値 (プット) で定められるルックバック・オプション (ロシア・オプション), 原資産の価格過程の経路の算術平均, あるいは幾何平均で定められる平均オプション (アジア・オプション) などの価格の評価については紙面の都合上触れることができなかった. 次の機会に譲りたい.

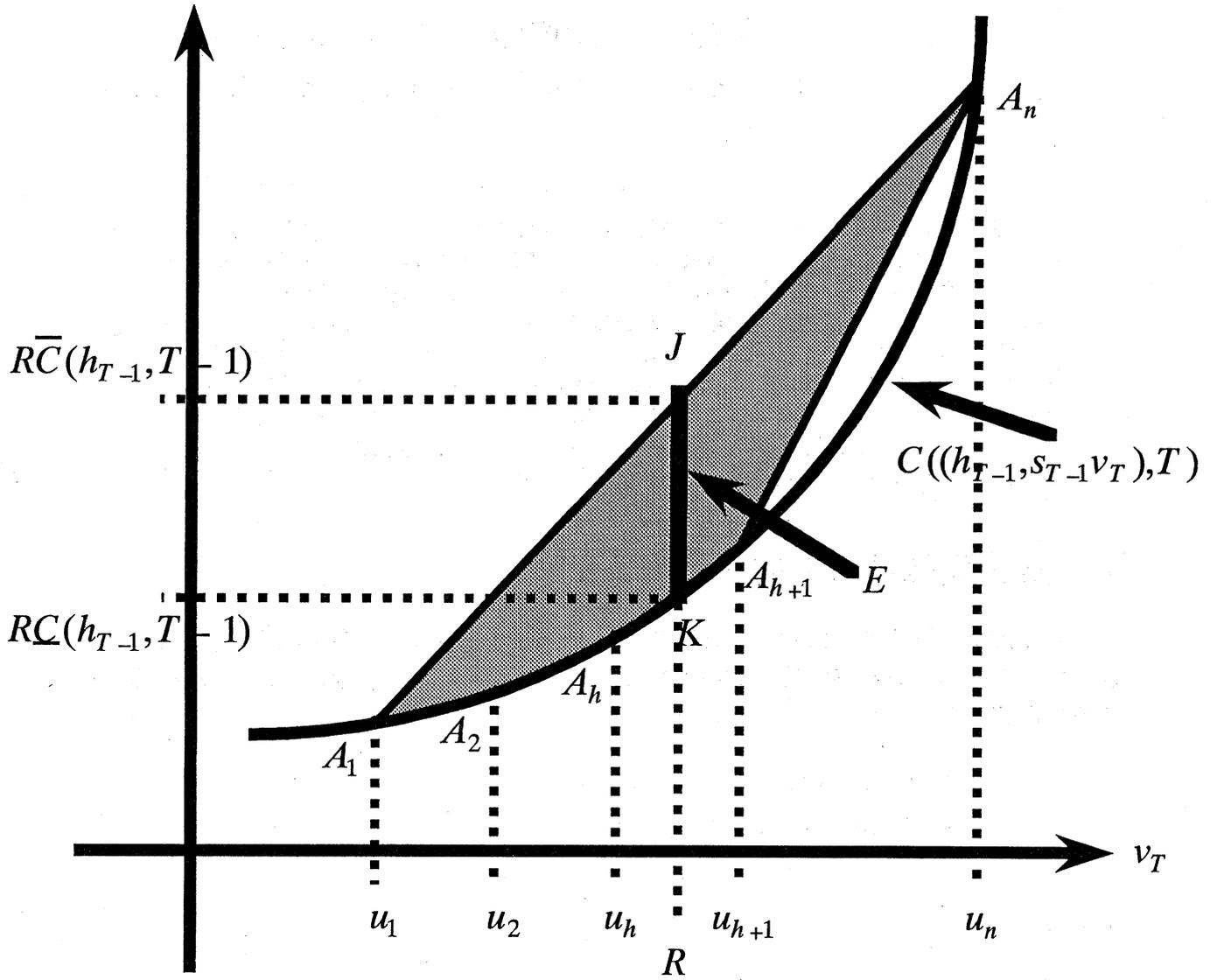


图 1