

THE NUMERICAL RADIUS OF AN INFINITE DIRECTED REGULAR GRAPH

東北大学 情報科学研究科 高村正樹
宮城教育大学 武元英夫

$G = (V, E)$ を, 無限有向グラフとする。ここで, V は点集合, E は弧集合を表す。弧 $e = (u, v) \in E$ に対し, u を e の始点, v を e の終点と呼ぶ。さらに, v を終点としてもつ弧の個数を入次数と呼び $d^-(v)$ で表し, v を始点としてもつ弧の個数を出次数と呼び $d^+(v)$ で表す。すべての点に対して, 入次数も出次数も有界であるとき, G は bounded valency を持つという。

有限グラフの研究において, 隣接行列の性質を調べることは有効な手段であるが, 無限グラフにおいては, 無向グラフの隣接作用素が Mohar [4] によって導入された。さらに, 藤井等 [3] によって有向グラフの場合に拡張された。

$e_v(u) = \delta_{v,u}$ によって定義された $\{e_v; v \in V\}$ を標準基とするヒルベルト空間 $H = \ell^2(V)$ において, $G = (V, E)$ に関連した閉作用素 $A = A(G)$ を次のように定義する;

$$\text{Dom}(A) = \left\{ x = \sum_{v \in V} x_v e_v \in H; \sum_{u \in V} \left| \sum_{v \in D^-(u)} x_v \right|^2 < +\infty \right\}$$

として,

$$Ax = \sum_{u \in V} \sum_{v \in D^-(u)} x_v e_u.$$

ここで $D^-(u)$ は, u を終点とする弧の, 始点全体の集合である。この作用素 $A = A(G)$ を G の隣接作用素と呼ぶ。隣接作用素 $A(G)$ は, G が bounded valency を持つならば有界である。

以下, 無限有向グラフ G は bounded valency を持ち, 多重弧は持たないものとする。グラフ G のスペクトルを 隣接作用素 $A(G)$ のスペクトルによって定義し, $\sigma(G)$ で表す。更にスペクトル半径 $r(G)$ 及び, 数域半径 $w(G)$ をそれぞれ

$$r(G) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(G)\}, \quad w(G) = \sup\{|\langle A(G)x, x \rangle|; \|x\| = 1, x \in H\}$$

によって定義する。このとき, 次の関係が成り立つ。

$$r(G) \leq w(G) \leq \|A(G)\| \leq \sqrt{d^+ \cdot d^-}$$

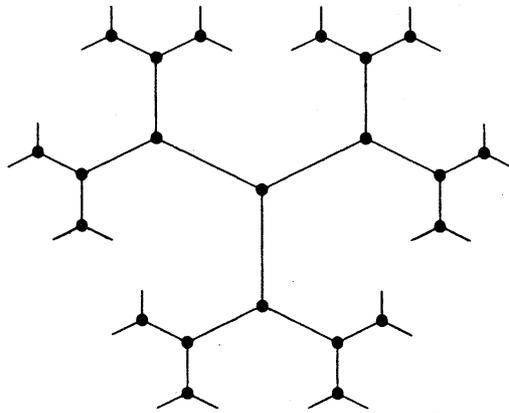
ここで, $d^+ = \max_{v \in V} d^+(v)$, $d^- = \max_{v \in V} d^-(v)$ である。特に G が無向グラフの場合は, 隣接作用素 $A(G)$ は自己共役作用素であるから, d をグラフ G の最大次数とすると,

$$r(G) = w(G) = \|A(G)\| \leq d$$

が成り立つ。

グラフのすべての入次数と出次数が等しく, その数が k であるとき, k -正則グラフと呼ぶ。グラフ G が有限グラフである場合, k -正則ならば $r(G) = k$ が成り立つ。しかし, 無限グラフにおいては, 一般には成り立たない。

例 1 ([5]). 無限グラフ $G = T_3$ (homogeneous tree);



この場合, グラフ G は 3-正則グラフであるが, $r(G) = 2\sqrt{2}$ となる。

これに対して, Biggs 等 [1] は無向グラフの等周数を導入し, k -正則な無限無向グラフ G に対して, 等周数が 0 であることと, $r(G) = k$ であることが同値であることを示した。さらに有向グラフにおいて, 藤井等 [2] は等周数を導入し, k -正則な有向グラフ G の等周数が 0 ならば 隣接作用素 $A(G)$ は normaloid であり, $r(G) = k$ が成り立つことを示した。

以下, $G = (V, E)$ は無限有向グラフとする。

定義 2([2]). グラフ $G = (V, E)$ の点集合 V の有限部分集合 X に対し, X から $V \setminus X$ への弧集合を $\partial^+ X$ で表し, また $V \setminus X$ から X への弧集合を $\partial^- X$ で表す。さらに,

$$i^\pm(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial^\pm X|}{|X|} ; X \text{ は } V \text{ の有限部分集合} \right\}$$

として,

$$i(G) = \max\{i^+(G), i^-(G)\}$$

なる正数 $i(G)$ を G の等周数と呼ぶ。ここで, $|\cdot|$ は, 集合の濃度を表す。

定理 3 ([2]). k -正則グラフ $G = (V, E)$ に対し, $i(G) = 0$ ならば, 隣接作用素 $A(G)$ は normaloid であり, $r(G) = k$ となる。

ここでは, 藤井等によるものとは異なる形で等周数 $i_0(G)$ を定義し, $i_0(G) = 0$ であることと, $r(G) = w(G) = \|A(G)\| = k$ であることが同値であることを述べる。

定義 4. グラフ $G = (V, E)$ に対し,

$$i_0(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial^+ X| + |\partial^- X|}{2|X|}; X \text{ は } V \text{ の有限部分集合} \right\}$$

なる正数 $i_0(G)$ を G の等周数と呼ぶ。

注意 5. 無向グラフ $G = (V, E)$ に対しては, 任意の $uv \in E$ に対し, $(u, v) \in E$ かつ $(v, u) \in E$ と向きづけることにより, $i(G)$ も $i_0(G)$ も, とともに [1] において導入された無向グラフにおける等周数と一致する。

グラフ $G = (V, E)$ と, $x \in \ell^2(V)$ に対し, 次のように $\Delta(x)$ を定義する。

$$\Delta(x) = \sum_{(u,v) \in E} |x_u^2 - x_v^2|.$$

更に, 点集合 V の有限部分集合 X と, $x = \{x_v\} \in \ell^2(X)$ に対し, $v \in X$ ならば $\tilde{x}_v = x_v$, $v \in V \setminus X$ ならば $\tilde{x}_v = 0$ として, $\tilde{x} = \{\tilde{x}_v\} \in \ell^2(V)$ を表す。

補題 6. グラフ $G = (V, E)$ の点集合 V の任意の有限部分集合 X と, 成分がすべて実数である $x \in \ell^2(X)$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$\Delta(\tilde{x}) \geq 2i_0(G)\|\tilde{x}\|^2.$$

この補題を用いることにより, 次の不等式が示せる。

定理 7. k -正則グラフ G に対し, 次の不等式が成り立つ。

$$\frac{(i_0(G))^2}{2k} \leq k - w(G) \leq i_0(G)$$

このことより、直ちに次の結果を得る。

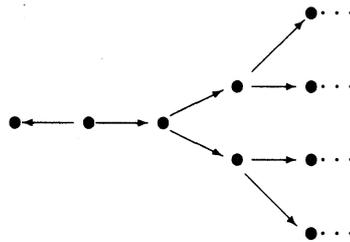
定理 8.

k -正則グラフ $G = (V, E)$ に対し, $i_0(G) = 0$ ならば, 隣接作用素 $A(G)$ は normaloid であり, $r(G) = k$ となる。つまり, $k = r(G) = w(G) = \|A(G)\|$ が成り立つ。逆に, $w(G) = k$ ならば $i_0(G) = 0$ である。この場合, $r(G) = w(G) = \|A(G)\| = k$ も成り立つ。

これで, 次数 k の正則グラフ G に対しては, $i_0(G) = 0$ であることと $r(G) = w(G) = \|A(G)\| = k$ であることが同値であることがわかった。次に, 2つの等周数 $i(G)$ と $i_0(G)$ との関係について述べる。

それぞれの定義から, 明らかに $i(G) \leq 2i_0(G)$ が成り立つので, 一般に $i_0(G) = 0$ ならば $i(G) = 0$ が成り立つが, 逆は成り立たない。

例 9. 以下のグラフを G とする。



この場合, $i(G) = 0$ であるが, $i_0(G) = \frac{1}{2}$ となる。

しかし, グラフ $G = (V, E)$ が k -正則グラフの場合は, 定理 3 より, $i(G) = 0$ ならば $r(G) = w(G) = \|A(G)\| = k$ が成り立つので, 定理 8 より $i_0(G) = 0$ となる。つまり, 正則グラフ G に対しては, $i(G) = 0$ であることと $i_0(G) = 0$ であることは同値となる。さらに, 瀬尾 [6] によって導入された elementary ratio も, 深く関連する。

定義 10.([6]) グラフ $G = (V, E)$ に対して,

$$\epsilon(G) = \sup \left\{ \frac{|E(X)|}{|X|} ; G' = (X, E(X)) \text{ は } G \text{ の有限誘導部分グラフ} \right\}$$

を G の elementary ratio と呼ぶ。

定理 11.([6]) k -正則グラフ G に対して, 次のことが成り立つ。

- (1) $i(G) = 0$ ならば $\epsilon(G) = k$ である。
- (2) $\epsilon(G) = k$ ならば, 隣接作用素 $A(G)$ は normaloid であり $r(G) = k$ が成り立つ。

以上のことから，定理 8 と定理 11 をまとめて，次の結果を得る。

定理 12. k -正則な無限有向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次の 4 つの命題は同値である。

- (1) $r(G) = w(G) = \|A(G)\| = k$ である。
- (2) $i(G) = 0$ である。
- (3) $i_0(G) = 0$ である。
- (4) $\epsilon(G) = k$ である。

参考文献

- [1] N. L. Biggs, B. Mohar and J. Shawe-Taylor, *The spectral radius of infinite graphs*, Bull. London Math. Soc., **20** (1988), 116-120.
- [2] J.I. Fujii, M. Fujii, H. Sasaoka and Y. Watatani, *The Spectrum of an infinite directed graph*, Math. Japonica, **36** (1991), 607-625.
- [3] M. Fujii, H. Sasaoka and Y. Watatani, *Adjacency operators of infinite directed graphs*, Math. Japonica, **34** (1989), 727-735.
- [4] B. Mohar, *The spectrum of an infinite graph*, Linear Algebra Appl. **48** (1982), 245-256.
- [5] B. Mohar and W. Woess, *A survey on spectra of infinite graphs*, Bull. London Math. Soc., **21** (1989), 209-234.
- [6] Y. Seo, *The spectral radius of an infinite directed graph*, Math. Japonica, **39** (1994), 373-379.