数理解析研究所講究録
980巻 1997年 1-11

Scaling limit of a model of quantum electrodynamics

北大·理 広島文生 (Fumio Hiroshima)

1948年, T.A.Welton は [1] で電磁場と, Potential V をもった1個の電子との相互作用系に対してその相互作用の影響による「Effective potential V_{eff}」を定義した. A.Arai は [2] においてその Effective potential が, その系の相互作用ハミルトニアン (Pauli-Fiertz モデル) のレゾルベントの, ある漸近極限として現れることを示した.

今回の報告は, [2] で扱われた Pauli-Fiertz モデルよりも, もっと物理的に厳密なモデルに対して Effective potential を求め, [2] のそれと比較するというものである. ([3]) .

1 自己共役作用素の漸近極限

$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ をそれぞれ $\mathbb{C}$ 上の可分なヒルベルト空間とし

$$\mathcal{X}=\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$$

とおく. **A** と **B** をそれぞれ $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ 上の非負自己共役作用素とする. $\{C_\kappa\}_{\kappa>0}$ を $\mathcal{X}$ 上の対称作用素の族, F_j, $j=1,2$ を $\mathbb{R}_+$ 上の実数値関数として, 次の **条件A** を仮定する.

条件A

(1) 全ての $\kappa>0$ に対して, $D(A\otimes I)\subset D(C_\kappa)$ かつ 全ての $\lambda>$ に対して $C_\kappa(A\otimes I+\lambda)^{-1}$ は $\mathcal{X}$ 上の有界線形作用素で

$$\lim_{\lambda\to\infty}||C_\kappa(A\otimes I+\lambda)^{-1}||=0$$

を満たす. ただし, この収束は, ある $\kappa_0>0$ が存在して $\kappa>\kappa_0$ に関して一様である.

(2) $\mathcal{X}$ 上のある対称作用素 C が存在して $D(A\otimes I)\subset D(C)$, かつ

$$s-\lim_{\kappa\to\infty}C_\kappa(A\otimes I+\lambda)^{-1}=C(A\otimes I+\lambda)^{-1}.$$

(3) 全ての $\kappa>0$ に対して, $F_1(\kappa)\geq 0$. また $j=1,2$ に対して $\lim_{\kappa\to\infty}F_j(\kappa)=F_j<\infty$. □

ヒルベルト空間 $\mathcal{X}$ 上に 線形作用素 $H_{0,\kappa}$ と H_κ をを次のように定義する.

$$\begin{aligned} H_{0,\kappa} &= F_1(\kappa)A\otimes I+\kappa I\otimes B+F_2(\kappa), \\ H_\kappa &= H_{0,\kappa}+C_\kappa. \end{aligned}$$

定理 1.1 ([2]) 作用素 H_κ は $D(\mathbf{A}\otimes I)\cap D(I\otimes\mathbf{B})$ 上で自己共役かつ下から有界である. さらに 自己共役作用素 $H_{0,\kappa}$ の任意のコア上で本質的に自己共役である.

□

ヒルベルト空間 $\mathcal{X}$ 上稠密に定義された線形作用素 S が「 $S\in\mathbb{E}(\mathcal{X})$ 」とは $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ でそれぞれ稠密な 2 つの部分集合 $D_{\mathcal{H}}(S)$ と $D_{\mathcal{K}}(S)$ が存在して

$$D_{\mathcal{H}}(S)\hat{\otimes}D_{\mathcal{K}}(S)\subset D(S)$$

を満たすことである. ここで $\hat{\otimes}$ は代数的テンソル積を表す. $S\in\mathbb{E}(\mathcal{X})$, $f\in\mathcal{K}$, $g\in\mathcal{D}_{\mathcal{K}}(S)$ に対して $\mathcal{H}$ 上稠密に定義された線形作用素 $E_{f,g}(S)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}&D(E_{f,g}(S))=D_{\mathcal{H}}(S),\\&(u,E_{f,g}(S)v)_{\mathcal{H}}=(u\otimes f,S(v\otimes g))_{\mathcal{X}},\ u\in\mathcal{H},\ v\in D_{\mathcal{H}}(S).\end{aligned}$$

定理 1.2 ([2]) $Ker\mathbf{B}=\{\alpha f|\alpha\in\mathbb{C}\}$ とし, P_0 を $\mathcal{K}$ から $Ker\mathbf{B}$ への射影作用素とする. さらに, 対称作用素 C は $C\in\mathbb{E}(\mathcal{X})$ で $D_{\mathcal{K}}(C)\supset KerB$ と仮定する. このとき, $z\in\mathbb{C}$ で, $\Im z\neq 0$ または $z<0$ で $|z|$ が十分大きいものに対して

$$s-\lim_{\kappa\to\infty}(H_\kappa-z)^{-1}=(H_{eff}-z)^{-1}\otimes P_0.$$

ただし, $\mathbf{A}$ 上の作用素 H_{eff} は $E_{f,f}(C)=E_{eff}(C)$ とおいて

$$H_{eff}=F_1A+E_{eff}(C)+F_2.$$

□

ここで, 自己共役作用素 H_{eff} は H_κ の $\kappa\approx\infty$ での Effective 作用素とよばれている ([2]).

2 Boson Fock 空間と Bogoliubov 変換

$\mathcal{F}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の Boson-Fock 空間とする. $f\in\mathcal{H}$ に対して生成・消滅演算子をそれぞれ $a^\dagger(f)$, $a(f)$ とおく. $\Omega\in\mathcal{F}(\mathcal{H})$ を Fock 真空として

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{H})=\mathcal{L}\{a^\dagger(f_1)....a^\dagger(f_n)\Omega,\Omega|f_j\in\mathcal{H},j=1,...n,n\geq 1\}$$

とおく. よく知られているように $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ は $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ で稠密であり, $a^\sharp(f)$ は $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ 上で

$$\begin{aligned}&[\ a^\sharp(f),a^\sharp(g)\ ]=0\\&[\ a(f),a^\dagger(g)\ ]=(\bar{f},g)\end{aligned}$$

を満たす (CCR). ここで, $[A,B]=AB-BA$. さらに. $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上の個数演算子を $\mathbf{N}$ とおくと

$$||a^\sharp(f)\Phi||\leq||f||\ ||(\mathbf{N}+1)^{\frac{1}{2}}\Phi||,\Phi\in D(\mathbf{N}^{\frac{1}{2}}),\tag{2.1}$$

$$[a^\sharp(f),\mathbf{N}]\Psi=\pm a^\sharp(f)\Psi,\Psi\in D(\mathbf{N}^{\frac{3}{2}}),\tag{2.2}$$

を満たす ([4],[5]). 次に我々は, $a^\sharp$ の 1 次結合でCCRを満たすものを考えたい. そのために, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の Sympletic 群 $\Sigma(\mathcal{H})$ を定義する.

定義 2.1 ([6],[7]) $\mathcal{H}$ 上の 2 つの有界線形作用素の族 $\{T_\kappa\}$ と $\{S_\kappa\}$ に対して $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ 上の作用素の族

$$\Xi_\kappa = \begin{pmatrix} S_\kappa & T_\kappa \\ \overline{T_\kappa} & \overline{S_\kappa} \end{pmatrix}$$

が「*Sympletic* 群 $\Sigma(\mathcal{H})$ に含まれる」とは次の関係を満たすことである.

$$\Xi_\kappa^* \mathbf{J} \Xi_\kappa = \Xi_\kappa \mathbf{J} \Xi_\kappa^* = \mathbf{J}, \quad \kappa > 0.$$

ここで,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \Xi_\kappa^* = \begin{pmatrix} S_\kappa^* & \overline{T_\kappa^*} \\ T_\kappa^* & \overline{S_\kappa^*} \end{pmatrix}.$$

□

2 つの有界線形作用素の族 $\{T_\kappa\}$ と $\{S_\kappa\}$, さらに, ベクトルの族 $\{L_\kappa\} \subset \mathcal{H}$ によって $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上の作用素の族 $B_\kappa(f)$ と $B_\kappa^\dagger(f)$ を

$$B_\kappa^\dagger(f) = a^\dagger(\overline{S_\kappa} f) + a(\overline{T_\kappa} f) + (\overline{L_\kappa}, f),$$
$$B_\kappa(f) = a^\dagger(T_\kappa f) + a(S_\kappa f) + (L_\kappa, f)$$

と定義する. このとき, この対応

$$a^\sharp(f) \longrightarrow B_\kappa^\sharp(f)$$

を Bogoliubov 変換とよぶ. 次の事実はよく知られている.

定理 2.2 ([7],[8]) 全ての $\kappa > 0$ に対して $\Xi_\kappa \in \Sigma(\mathcal{H})$ と仮定する. このとき, 各 $\kappa > 0$ に対して T_κ が *Hilbert-Schmidt* 作用素であることは, 各 $\kappa > 0$ ごとに $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上のユニタリー作用素 $\mathcal{U}_\kappa$ で次を満たすものが存在するための必要十分条件である.

$$\mathcal{U}_\kappa^{-1} B_\kappa^\sharp(f) \mathcal{U}_\kappa = a^\sharp(f), \quad f \in \mathcal{H}.$$

さらに, このとき, $\mathcal{U}_\kappa \Omega \in \mathcal{D}_\infty$ である. ここで, $\mathcal{D}_\infty = \cap_{n=1}^\infty D(\mathbf{N}^n)$.

注意 2.3 具体的に $\mathcal{U}_\kappa$ は $a^\sharp(f)$, S_κ, T_κ, L_κ によって構成することができる. ([3],[7],[8]).

我々は, ここで ユニタリー作用素 $\mathcal{U}_\kappa$ の $\kappa \longrightarrow \infty$ での強収束性を問題にする. そのために, 次の**条件 B** を導入する.

条件 B

$\mathcal{H}$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素 T と有界線形作用素 S, そしてベクトル $L \in \mathcal{H}$ が存在して,

$$(1)\ s-\lim_{\kappa\to\infty} T_\kappa = T, \quad (2)\ u-\lim_{\kappa\to\infty} S_\kappa = S, \quad (3)\ s-\lim_{\kappa\longrightarrow\infty} L_\kappa = L \quad (4)\ \lim_{\kappa\to\infty} T_\kappa^* T_\kappa = T^* T.$$

を満たす. ここで (4) はトレースノルムの位相による収束である. □

このとき明らかに,

$$\Xi = \begin{pmatrix} S & T \\ \overline{T} & \overline{S} \end{pmatrix}$$

とおくと $\Xi \in \Sigma(\mathcal{H})$ であり, 定理 2.2 より Bogoliubov 変換を引き起こすユニタリー作用素 $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U}^{-1}B^{\sharp}(f)\mathcal{U} = a^{\sharp}(f), \quad f \in \mathcal{H}$$

が存在することが分かる.

定理 2.4 ([3]) **条件 B** を仮定する. このとき, 任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, 次が成り立つ.

$$s - \lim_{\kappa \longrightarrow \infty} \mathbf{N}^m \mathcal{U}_\kappa \Omega = \mathbf{N}^m \mathcal{U}\Omega. \tag{2.3}$$

証明: $m = 0$ のときだけを示す. このとき, 次の評価式が成立する ([3], [10])

$$\|\mathcal{U}_\kappa \Omega - \mathcal{U}\Omega\| \leq \left\| T_\kappa S_\kappa^{-1} - TS^{-1} \right\|_1 \times \exp\left(\|(T_\kappa S_\kappa^{-1})^* T_\kappa S_\kappa^{-1}\|_1 + \|(TS^{-1})^* TS^{-1}\|_1 + 1 \right).$$

ここで $\|\cdot\|_1$ はトレースノルムを表す. 故に **条件 B** (2)(4) より結果をえる. □

定理 2.5 ([3]) **条件 B** を仮定する. このときユニタリー作用素 $\mathcal{U}_\kappa$ は κ について強連続でかつ

$$s - \lim_{\kappa \longrightarrow \infty} \mathcal{U}_\kappa = \mathcal{U}.$$

証明: $\mathcal{U}_\kappa$ の強連続性及び強収束性は $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ の稠密性により, $\Phi = a^{\dagger}(f_1)....a^{\dagger}(f_n)\Omega$ なるベクトルの上で示せば十分である. これはを示すためには, $\mathcal{U}_\kappa \Omega \in \mathcal{D}_\infty$ 及び (2.1), (2.2), **条件 B** (1)(2) より (2.3) を示せば十分であることが分かる. これは, 定理 2.4 より従う. □

3 QED の双極子近似モデル

これから d 次元空間 $\mathbb{R}^d (d \geq 3)$ の中で, 電磁場と 1 個の電子が相互作用しているという状況を考える. モデルの定義から始める.

$$\underbrace{L^2(\mathbb{R}^d) \oplus ... \oplus L^2(\mathbb{R}^d)}_{d-1} \equiv \mathcal{W}$$

とおく. $\mathcal{W}$ 上の Boson Fock 空間を $\mathcal{F}^{EM}(\mathcal{W})$ とおいて, それ上の生成・消滅演算子を $a^{\dagger}(f)$, $a(f)$ とそれぞれおく. 簡単のために

$$a^{\sharp}(0 \oplus ... \underbrace{f}_{r\text{番目}} ... \oplus 0) \equiv a^{\sharp(r)}(f), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad 1 \leq r \leq d-1$$

とかく. 偏極ベクトル $e^{(r)}$ $(1 \leq r \leq d-1)$ とは可測関数 $e^{(r)} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ で次ぎをみたすものである.

$$(1)\ k \cdot e^{(r)}(k) = 0, \quad (2)\ e^{(r)}(k) \cdot e^{(s)}(k) = \delta_{rs} \quad (a.e. k \in \mathbb{R}^d).$$

偏極ベクトル $e^{(r)}$ の第 μ 成分を $e_\mu^{(r)}$ とかくことにする. このとき, Colomb ゲージにより量子化された「時刻 0 の場の演算子 $A_\mu(x,f)$」とは

$$A_\mu(x,f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{d-1}\left\{a^{\dagger(r)}\left(\frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{c\omega}}e_\mu^{(r)}e^{-ix\cdot}\hat{f}\right)+a^{(r)}\left(\frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{c\omega}}e_\mu^{(r)}e^{ix\cdot}\tilde{\hat{f}}\right)\right\}$$

で定義される. ここで $\hat{}$ はフーリエ変換, $\tilde{f}(k)=f(-k)$, c は光速, $\hbar$ はプランク定数／2π, $\omega(k)=|k|$ である. もちろん, 生成・消滅演算子の定義より $\hat{f}/\sqrt{\omega}\in L^2(\mathbb{R}^d)$ である.

無限個の光子（電磁場）と 1 つの電子が相互作用している状態ベクトルの空間を

$$\mathcal{F}\equiv L^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{F}^{EM}(\mathcal{W})$$

で定義する. $\mathcal{F}$ 上に<u>双極子近似</u>を施した「光子と電子の相互作用ハミルトニアン $\mathbf{H}(V)$」を

$$\mathbf{H}(V)=\frac{1}{2m}\sum_\mu(-i\hbar\partial_\mu\otimes I+eI\otimes A_\mu(\rho))^2+I\otimes\hbar c d\Gamma(\hat{\omega})+V\otimes I$$

と定義する. ここで, $A_\mu(\rho)=A_\mu(0,\rho)$, V は電子のポテンシャル, e は電子の電荷, $m>0$ は電子の質量, ∂_μ は一般化された μ 方向の微分作用素, $\hat{\omega}=\underbrace{\omega\oplus\ldots\oplus\omega}_{d-1}$, $d\Gamma(\hat{\omega})$ は $\hat{\omega}$ の第 2 量子化演算子, さらに $\hat{\rho}$ は回転不変な正値無限階微分可能急減少関数で

$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\hat{\rho}^2(k)}{\omega^3(k)}dk<\infty$$

と仮定する. この ρ は紫外線切断とよばれている. <u>双極子近似</u> とは相互作用ハミルトニアン $\mathbf{H}(V)$ を定義するときに, 時刻 0 の場の演算子を $A_\mu(x,\rho)\longrightarrow A_\mu(0,\rho)$ とおきかえた操作のことである.

$V=0$ とした相互作用ハミルトニアン $\mathbf{H}(0)$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}\mathcal{F}_0^{EM}(\mathcal{W})$ 上で $\Delta=\hbar^2\sum_\mu\partial_\mu^2$ とおいて

$$\mathbf{H}(0)=\underbrace{\frac{1}{2m}\Delta\otimes I}_{\text{電子の部分}}+\underbrace{\sum_\mu\frac{e}{m}(-i\hbar\partial_\mu)\otimes A_\mu(\rho)}_{\text{相互作用の部分}}+\underbrace{\sum_\mu\frac{e^2}{2m}I\otimes A_\mu(\rho)^2+I\otimes\hbar c d\Gamma(\hat{\omega})}_{\text{場の部分}}$$

と展開される. ここで, $\sum_\mu I\otimes A_\mu(\rho)^2$ の項を省いたものが Pauli-Fiertz モデルである.

定理 3.1 ([9]) 相互作用ハミルトニアン $\mathbf{H}(0)$ は $D(-\Delta\otimes I)\cap D(I\otimes\hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$ 上の自己共役作用素であり, さらに自己共役作用素 $-\Delta\otimes I+I\otimes\hbar c d\Gamma(\hat{\omega})$ の任意のコア上で本質的に自己共役である.

□

双極子近似を施しているために $\mathbf{H}(0)$ の中の「相互作用の部分」に微分演算子とかけ算演算子のカップリングが現れない. 故に, $\mathbf{H}(0)$ を Constant Fiber Direct Integral 表示 ([9],[10]) することできる. 即ち

$$\mathbf{H}(0)\cong\int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus}\mathbf{H}_{boson}(p)dp.$$

ここで $\cong$ はユニタリー同値を表し, $\mathbf{H}(p)$ は

$$\mathbf{H}_{boson}(p)=\frac{1}{2m}\sum_{\mu}p_{\mu}^{2}+\sum_{\mu}\frac{e}{m}p_{\mu}A_{\mu}(\rho)+\sum_{\mu}\frac{e^{2}}{2m}A_{\mu}(\rho)^{2}+\hbar c d\Gamma(\hat{\omega})$$

となる $\mathcal{F}^{EM}(\mathcal{W})$ 上の作用素である.

定理 3.2 ([9]) 各点 $p\in\mathbb{R}^{d}$ ごとに $\mathbf{H}_{boson}(p)$ $(p\in\mathbb{R}^{d})$ は $D(d\Gamma(\hat{\omega}))$ 上の自己共役作用素であり, さらに自己共役作用素 $d\Gamma(\hat{\omega})$ の任意のコア上で本質的に自己共役である.

□

4 相互作用ハミルトニアン $\mathbf{H}(0)$ の対角化

この章の目的は, $\mathbf{H}(0)$ をユニタリー変換することにより

$$\underbrace{\mathbf{A}\otimes I}_{\text{電子の部分}}+\underbrace{I\otimes\mathbf{B}}_{\text{場の部分}}$$

という形に移すことである（我々はこれを「対角化」とよんでいる）. 即ち, 相互作用の部分をユニタリー作用素の中に押し込めてしまい, ハミルトニアン自身を, 見かけ上全く自由なもの（相互作用していない）にしてしまおうというわけである. そのための準備をする ([9],[11],[12]).

$$D(s)=m-\frac{e^{2}}{c^{2}}\frac{d-1}{d}\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_{\mathbb{R}^{d}}\frac{\hat{\rho}(k)^{2}}{s+i\epsilon-k}dk,\qquad s\in[0,\infty)$$

と定義する. ここで, 上の収束は意味をもち, 任意の $s\in[0,\infty)$ に対して $|D(s)|>\delta>0$ となる, 正数 δ が存在することが知られている. このことより, 我々は,

$$Q(k)=\frac{\hat{\rho}(k)}{D(k^{2})},\ k\in\mathbb{R}^{d}$$

を各点ごとに定義することができる. さらに G を

$$(Gf)(k)=\lim_{h\longrightarrow 0}\int_{\mathbb{R}^{d}}\frac{f(k')}{(k^{2}-k'^{2}+ih)(kk')^{\frac{d}{2}-1}}dk'.$$

で定義する. G は $L^{2}(\mathbb{R}^{d})$ および $L^{2}(\mathbb{R}^{d},\omega^{1-\frac{d}{2}}dk)$ 上の有界線形作用素になることが知られている.

$$T_{\mu\nu}f=\delta_{\mu\nu}f+\frac{e^{2}}{c^{2}}Q\omega^{\frac{d}{2}-1}G\omega^{\frac{d}{2}-1}d_{\mu\nu}\hat{\rho}f,\quad(1\le\mu,\nu\le d)$$

とおいて, $W_{\pm}^{(r,s)}(1\le r,s\le d-1)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}W_{+}^{(r,s)}f&=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}e_{\mu}^{r}T_{\mu\nu}^{*}e_{\nu}^{s}\sqrt{\omega}+\sqrt{\omega}e_{\mu}^{r}T_{\mu\nu}^{*}e_{\nu}^{s}\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)f,\\ W_{-}^{(r,s)}f&=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}e_{\mu}^{r}T_{\mu\nu}^{*}\tilde{e}_{\nu}^{s}\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega}e_{\mu}^{r}T_{\mu\nu}^{*}\tilde{e}_{\nu}^{s}\frac{1}{\sqrt{\omega}}\right)\tilde{f}.\end{aligned}$$

ここで $d_{\mu\nu} = \sum_r e_\mu^{(r)} e_\nu^{(r)}$. 簡単のために

$$\mathbf{W}_\pm = (W_\pm^{(r,s)})_{1\le r,s\le d-1}, \quad \mathbf{L} = (L_\mu^{(r)})_{1\le\mu\le d,\ 1\le r\le d-1} = \begin{pmatrix} L_1^{(1)} & \cdots & L_d^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ L_1^{(d-1)} & \cdots & L_d^{(d-1)} \end{pmatrix}$$

とおく. ここで後のために m, c, e に対するスケーリングを次のように定義する.

$$m(\kappa) = m\kappa^{-2}, \quad e(\kappa) = e\kappa^{-\frac{1}{2}}, \quad c(\kappa) = c\kappa. \tag{4.1}$$

以後, m, c, e をパラメターとして含むような対象 A に対して, (4.1) によってスケーリングされたものを断りなしに A_κ とかくことにする.

補題 4.1 ([3],[9]) 有界線形作用素の族 $\mathbf{W}_{\kappa\pm} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ とベクトルの族 $L_\kappa \in \mathcal{W}$ は次を満たす.

(1) 全ての$\kappa > 0$ に対して, $\mathbf{W}_{\kappa-}$ は $Hilbert - Schmidt$ 作用素である.

(2) $\Xi(\mathbf{W}_{\kappa\pm}) \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{\kappa+} & \mathbf{W}_{\kappa-} \\ \overline{\mathbf{W}_{\kappa-}} & \overline{\mathbf{W}_{\kappa+}} \end{pmatrix}$ とおく.

このとき, 全ての$\kappa > 0$ に対して

$$\Xi(\mathbf{W}_{\kappa\pm}) \in \Sigma(\mathcal{W}).$$

(3) 全ての $\mathbf{f} \in \mathcal{W}$, 全ての $\kappa > 0$ に対して

$$B_\kappa(\mathbf{f}, p) \equiv a^\dagger(\mathbf{W}_{\kappa-}\mathbf{f}) + a(\mathbf{W}_{\kappa+}\mathbf{f}) + (\mathbf{L}_\kappa \cdot p, \mathbf{f})$$
$$B_\kappa^\dagger(\mathbf{f}, p) \equiv a^\dagger(\overline{\mathbf{W}_{\kappa+}}\mathbf{f}) + a(\overline{\mathbf{W}_{\kappa-}}\mathbf{f}) + (\overline{\mathbf{L}_\kappa} \cdot p, \mathbf{f})$$

とおく. このとき,

$$\exp(it\mathbf{H}_{boson,\kappa}(p))\, B_\kappa^\sharp(\mathbf{f}, p) \exp(-it\mathbf{H}_{boson,\kappa}(p)) = B_\kappa^\sharp(e^{-it\hbar c\widehat{\omega}}\mathbf{f}, p).$$

□

補題 4.1 (1)(2) より, 全ての $p \in \mathbb{R}^d$ に対してユニタリー作用素 $\mathcal{U}_\kappa(p)$ で

$$\mathcal{U}_\kappa^{-1}(p) B_\kappa^\sharp(\mathbf{f}, p) \mathcal{U}_\kappa(p) = a^\sharp(\mathbf{f}) \tag{4.2}$$

となるものが存在することが分かる. また (4.2) と定理 4.1 (3) より $E_\kappa(p) \in \mathbb{R}^d$ で

$$\exp(-it\mathbf{H}_{boson,\kappa}(p))\, \mathcal{U}_\kappa(p)\Omega = \exp(-itE_\kappa(p))\, \mathcal{U}_\kappa(p)\Omega$$

となるものが存在することが分かる. 具体的に, この $E_\kappa(p)$ は

$$E(p) = \frac{1}{2m}\hbar^2 p^2 (1 - 2\Lambda + \Lambda^2) - \eta,$$

で与えられることが分かっている ([3],[9]). ここで, 実数 Λ, η は次で与えられる.

$$\Lambda = \frac{e^2}{2c^2}\left(\frac{Qe_\mu^r}{\sqrt{\omega^3}}, (\mathbf{W}_+^{-1})^{(r,s)}\frac{\hat{\rho}e_\mu^s}{\sqrt{\omega}}\right), \eta = \frac{e^2}{8mc}\left(\frac{\hat{\rho}e_\mu^r}{\sqrt{\omega}}, (\mathbf{W}_-\mathbf{W}_+^{-1})^{(r,s)}\frac{\hat{\rho}e_\mu^s}{\sqrt{\omega}}\right).$$

さらに, m', m_0, m_{00} を次で定義する.

$$\frac{1}{2m'} = \frac{1}{2m} - \frac{2\Lambda}{2m} + \frac{\Lambda^2}{2m}, \quad \frac{1}{m_0} = \frac{2\Lambda}{m}, \quad \frac{1}{m_{00}} = \frac{\Lambda^2}{m}.$$

補題 4.2 全ての $\kappa > 0$, 全ての $p \in \mathbb{R}^d$ に対して, ユニタリー 作用素 $\mathcal{U}_\kappa(p)$ は $D(d\Gamma(\hat{\omega}))$ をそれ自身の上に移して

$$\mathcal{U}_\kappa^{-1}(p)\mathbf{H}_{boson,\kappa}(p)\mathcal{U}_\kappa(p) = \frac{1}{2m'_\kappa}\hbar^2\sum_\mu p_\mu^2 + \kappa\hbar c d\Gamma(\hat{\omega}) - \eta_\kappa. \tag{4.3}$$

証明: 補題 4.1(3) によって $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$ 上で

$$\exp\left(i\frac{t}{\hbar}\mathbf{H}_{boson,\kappa}(p)\right) = \mathcal{U}_\kappa(p)\exp\left\{ictd\Gamma(\hat{\omega}) + i\frac{t}{\hbar}E_\kappa(p)\right\}\mathcal{U}_\kappa^{-1}(p) \tag{4.4}$$

となることが分かる. (4.4) の両辺はともに t に関する 1 パラメターユニタリー群なので, Stone の定理によって (4.3) をえる. □

$\mathcal{F}^{EM}(\mathcal{W})$ 上のユニタリー作用素 $\mathcal{U}(p)$ から Constant Fiber Direct Integral をによって $\mathcal{F}$ 上のユニタリー作用素 $\mathcal{U}_\kappa$ を次で定義する.

$$\mathcal{U}_\kappa = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus}\mathcal{U}_\kappa(p)dp.$$

定理 4.3 ([3]) 全ての $\kappa > 0$ に対して, ユニタリー作用素$\mathcal{U}_\kappa$ は $D(-\Delta \otimes I) \cap D(I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$ をそれ自身の上に移して $\mathbf{H}_\kappa(0)$ を次のように対角化する.

$$\mathcal{U}_\kappa^{-1}\mathbf{H}_\kappa(0)\mathcal{U}_\kappa = -\frac{1}{2m'_\kappa}\Delta \otimes I + \kappa I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}) - \eta_\kappa.$$

証明: (4.3) 及び Constant Fiber Direct Integral の定義より容易に分かる. □

5 相互作用ハミルトニアン$\mathbf{H}_\kappa(V)$の漸近挙動

この章では, スケーリングされた相互作用ハミルトニアン $\mathbf{H}_\kappa(V)$ の $\kappa \longrightarrow \infty$ での, そのレゾルベントの挙動およびその Effective potential を調べる. そのために, Potential V に対して次の**条件 C** を仮定する.

条件 C

(1) $D(-\Delta) \subset D(V)$ かつ, 全ての $\lambda > 0$ に対して $V(-\Delta + \lambda)^{-1}$ は有界線形作用素で

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty}||V(-\Delta + \lambda)^{-1}|| = 0.$$

(2) 全ての $t > 0$, 全ての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|x-y|^2}|V(y)|dy < \infty.$$

□

注意 5.1 *Colomb Potential* は **条件 C** を満たしている *([2])*.

次に $\mathbf{H}_\kappa(V)$ に対して,「質量のくりこまれたハミルトニアン $\mathbf{H}_\kappa^{REN}(V)$」を

$$\mathbf{H}_\kappa^{REN}(V) = \left(-\frac{1}{2m_{0\kappa}}\Delta + V\right)\otimes I \ + \ \kappa\sum_\mu \frac{e}{m}(-i\hbar\partial_\mu)\otimes A_\mu(\rho) + \sum_\mu \frac{e^2}{2m} I\otimes A_\mu(\rho)^2 + \kappa I\otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega})$$

で定義する. このとき定理 4.3 より $D(-\Delta\otimes I)\cap D(I\otimes\hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$ 上で, <u>有用な関係式</u>

$$\mathcal{U}_\kappa^{-1}\mathbf{H}_\kappa(V)\mathcal{U}_\kappa = -\frac{1}{2m'_\kappa}\Delta\otimes I + \kappa I\otimes\hbar c d\Gamma(\hat{\omega}) + C_\kappa(V) - \eta_\kappa \equiv \widetilde{\mathbf{H}_\kappa}(V) \tag{5.1}$$

$$\mathcal{U}_\kappa^{-1}\mathbf{H}_\kappa^{REN}(V)\mathcal{U}_\kappa = -\frac{1}{2m_{00\kappa}}\Delta\otimes I + \kappa I\otimes\hbar c d\Gamma(\hat{\omega}) + C_\kappa(V) - \eta_\kappa \equiv \widetilde{\mathbf{H}_\kappa^{REN}}(V) \tag{5.2}$$

をえる. ここで $C_\kappa(V) = \mathcal{U}_\kappa^{-1}(V\otimes I)\mathcal{U}_\kappa$ とおいた. 後でみるように (補題 5.4) $C_\kappa(V)$ は $D(-\Delta\otimes I)\cap D(I\otimes\hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$ 上でうまく定義されている.

補題 5.2 ([3]) 次の (1) ~ (4) が成立する.

$$(1)\quad u-\lim_{\kappa\to\infty}\mathbf{W}_{\kappa+} = I,\quad (2)\ s-\lim_{\kappa\to\infty}\mathbf{W}_{\kappa-} = 0,\quad (3)\ s-\lim_{\kappa\to\infty}L_{\mu,\kappa}^{(r)} = \frac{e}{m}\frac{e_\mu^r\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2c^3\omega^3}}\hat{\rho} \equiv L_{\mu,\infty}^{(r)},$$

$$(4)\quad \lim_{\kappa\to\infty}\mathbf{W}_{\kappa-}^*\mathbf{W}_{\kappa-} = 0,\quad (\text{トレースノルム位相}).$$

□

定理 5.3 ([3]) $\mathcal{F}$ 上のあるユニタリー作用素 $\mathcal{U}_\infty$ が存在して

$$s-\lim_{\kappa\longrightarrow\infty}\mathcal{U}_\kappa = \mathcal{U}_\infty.$$

証明: 第 2 章との対応関係

$$T_\kappa = \mathbf{W}_{\kappa-},\ S_\kappa = \mathbf{W}_{\kappa+},\ L_\kappa = \bigoplus_r\sum_\mu p_\mu L_{\mu,\kappa}^{(r)},\ T=0,\ S=I,\ L=\bigoplus_r\sum_\mu p_\mu L_{\mu,\infty}^{(r)}$$

によって, 補題 5.2 はまさしく **条件 B** に対応していることが分かる. 故に定理 2.5 より従う. □

補題 5.4 ([3]) $\mathcal{U}_\infty^{-1}(V\otimes I)\mathcal{U}_\infty = C_\infty(V)$ とおく. このとき, (1) ~ (3) が成立する.

(1) 全ての $\kappa > 0$ に対して, $D(C_\kappa(V)) \supset D(-\Delta\otimes I)$ さらに 全ての $\lambda > 0$ に対して, $C_\kappa(V)(-\Delta\otimes I+\lambda)^{-1}$ は有界線形作用素で $\kappa > 0$ について一様に

$$\lim_{\lambda\to\infty}||C_\kappa(V)(-\Delta\otimes I+\lambda)^{-1}|| = 0.$$

(2) $D(C_\infty(V)) \supset D(-\Delta \otimes I)$, さらに, 全ての $\lambda > 0$ に対して

$$s-\lim_{\kappa\to\infty} C_\kappa(V)(\Delta \otimes I + \lambda)^{-1} = C_\infty(V)(\Delta \otimes I + \lambda)^{-1}.$$

(3) 全ての $\kappa > 0$ に対して $m_{00\kappa} > 0$ で次の $(i)(ii)$ が成り立つ.

$$(i)\ s-\lim_{\kappa\to\infty} \frac{1}{2m_{00\kappa}} = \frac{1}{2m}\left(\frac{e^2}{2mc^2}\right)^2 \left\|\frac{\hat{\rho}}{\omega}\right\|^4 \equiv \frac{1}{2m_\infty}, \quad (ii)\ s-\lim_{\kappa\to\infty} \eta_\kappa = 0.$$

証明: $\mathcal{U}_\kappa$ と $-\Delta \otimes I$ の可換性と定理 5.3 および **条件 C** より容易に導くことができる. □

定理 5.5 ([3])
(1) 全ての $\kappa > 0$ に対して$\widetilde{\mathbf{H}_\kappa}(V)$, $\mathbf{H}_\kappa^{\widetilde{REN}}(V)$ はそれぞれ $D(-\Delta \otimes I) \cap D(I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$ 上自己共役かつ下から有界である. さら自己共役作用素$-\Delta \otimes I + I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega})$ の任意のコア上で本質的に自己共役である.
(2) $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}^{EM}(\mathcal{W})$ でそれぞれ稠密な 2 つの集合を

$$D_{L^2(\mathbb{R}^d)}(C_\infty(V)) = D(-\Delta), \qquad D_{\mathcal{F}^{EM}}(C_\infty(V)) = D(d\Gamma(\hat{\omega}))$$

として $C_\infty(V) \in \mathbb{E}(\mathcal{F})$ である. さらにこのとき $E_\Omega(C_\infty(V)) = V_{eff}$ とおくと, $z \in \mathbb{C}$ で, $\Im z \neq 0$ または $z < 0$ で $|z|$ 十分大きいものに対して

$$s-\lim_{\kappa\longrightarrow\infty} \left(H_\kappa^{\widetilde{REN}}(V) - z\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{2m_\infty}\Delta + V_{eff} - z\right)^{-1} \otimes P_0$$

ここで, P_0 は $\mathcal{F}^{EM}$ から $\{\alpha\Omega | \alpha \in \mathbb{C}\}$ への射影作用素である.

証明: 第 1 章との対応関係

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d), \mathcal{K} = \mathcal{W}, C_\kappa = C_\kappa(V), C = C_\infty(V), A = -\Delta, B = \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}),$$
$$F_1(\kappa) = \frac{1}{2m_{00\kappa}}, \text{または } F_1(\kappa) = \frac{1}{2m'_\kappa}, F_2(\kappa) = \eta_\kappa.$$

によって, 補題 5.4 はまさしく **条件 A** にほかならない. 故に定理 1.1, 1.2 より従う. □

注意 5.6 定理 *1.1* は, **条件 A**(1) 及び (3) の $F_1(\kappa) \geq 0$ を仮定するだけで成立する. 故に, $\widetilde{\mathbf{H}_\kappa}(V)$ の自己共役性は, $m'_\kappa \longrightarrow 0$ となるが問題はない.

V_{eff} は Effectiv Potential とよばれ, その具体的な形は

$$\begin{aligned} V_{eff}(x) &= (2\pi C(\rho))^{-\frac{d}{2}} \int dy e^{-|x-y|^2/2C(\rho)} V(y) \\ C(\rho) &= \frac{d-1}{2d}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \int dk \frac{|\hat{\rho}(k)|^2}{\omega(k)^3}. \end{aligned}$$

となることが知られている ([2],[3]). これらのことより, 我々は次の主定理をえる.

定理 5.7 ([3])
(1) 全ての $\kappa > 0$ に対して $\mathbf{H}_\kappa(V)$, $\mathbf{H}_\kappa^{REN}(V)$ はそれぞれ $D(-\Delta \otimes I) \cap D(I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$ 上自己共役で下から有界である.
(2) $z \in \mathbb{C}$ で, $\Im z \neq 0$ または $z < 0$ で $|z|$ が十分大きいとする. このとき

$$s - \lim_{\kappa \to \infty} (H_\kappa^{REN}(V) - z)^{-1} = \mathcal{U}_\infty \left\{ \left(-\frac{1}{2m_\infty} \Delta + V_{eff} - z \right)^{-1} \otimes P_0 \right\} \mathcal{U}_\infty^{-1},$$

証明: (1) は定理 5.5(1) 及び (5.1)(5.2) より従う. (2) は定理 5.3 5.5(2) 及び (5.1) より従う. □

注意 5.8 我々の求めた *Effective potential* は [2] のそれと一致している.

REFERENCES

1 T.A.Welton, "Some observable effects of the quantum mechanical fluctuations of the electromagnetic field", Phys.Rev.**74**, 1157(1948).
2 A.Arai, "An asymptotic analysis and its application to the nonrelativistic limit of the Pauli-Fierz and a spin-boson model", J.Math.Phys.**31**, 2653(1990).
3 F.Hiroshima, "Scaling limit of a model of quantum electrodynamics", J.Math.Phys.**34**,4478 (1993)
4 江沢洋, 新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 日本評論社.
5 M.Reed and B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* **II**, Academic Press, New York, 1978.
6 P.Kristensen, L.Mejlbo and E.Thue.Poulsen, "Tempered distributions in infinitely many dimensions **II**, displacement operators", Math.scand.**14**, 129(1964).
7 F.A.Berezin, *Method of Second Quantization*, Accademic Press, New York, (1966).
8 S.N.M.Ruijsenaars, "On Bogoliubov transformations. **II**. The general case", Ann.Phys.**116**, 105(1978).
9 A.Arai, "A note on scattering theory in nonrelativistic quantum electrodynamics", J.Phys.A.Math. Gen.**16**, 49(1983).
10 M.Reed and B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* **IV**, Academic Press, New York, 1978.
11 A.Arai, " On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalerfield **I**", J.Math.Phys.**22**, 2539(1981).
12 A.Arai, "Rigorous theory of spectra and radiation for a model in a quantum electrodynamics", J.Math.Phys. **24**, 1896(1983).