

Asymptotic behavior of perturbation series of eigenvalues for anharmonic oscillators.

京大 数理研 小池達也

0 Introduction

非調和振動子の固有値の摂動展開について考察する。考えるのは次の固有値問題である。

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2(1 + \lambda x^{2N})\right)\psi = E(\lambda)\psi \quad (\lambda > 0, N = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0. \quad (2)$$

方程式 (1) と境界条件 (2) のスペクトルは離散かつ非縮退であるので、 $E(\lambda)$ は非負整数 K を用いて番号付けができる。

$$\begin{aligned} \text{eigenvalues} &: E^0(\lambda) < E^1(\lambda) < \dots < E^K(\lambda) < \dots, \\ \text{eigenfunctions} &: \psi^0(x, \lambda) \quad \psi^1(x, \lambda) \quad \dots \quad \psi^K(x, \lambda) \quad \dots \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ の時は良く知られた調和振動子になって、固有値は $E^K(0) = K + 1/2$ であり、固有関数は $\psi^K(x, 0) = D_{K-1/2}(x) = e^{-x^2/4} H_K(x)$ となる。ここで、 $D_\lambda(x)$ と $H_K(x)$ はそれぞれ Weber 関数と Hermite 多項式である。

$\lambda \ll 1$ のとき、固有値 $E^K(\lambda)$ と固有関数 $\psi^K(x, \lambda)$ は λ について次のように形式的に展開し、各項を帰納的に求めることができる。

$$E^K(\lambda) = K + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^K \lambda^n,$$

$$\psi^K(x, \lambda) = \psi^K(x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^K(x) \lambda^n.$$

この展開を摂動展開という。

ここでの目的は固有値の摂動展開の係数 A_n^K の n が十分大きい時の漸近的振舞いを調べることである。結果は次の通り。

$$A_n^K = \frac{(-1)^{n+1} N}{K! \sqrt{2\pi^3}} 4^{(K+1/2)/N} \left(\frac{B(\frac{3}{2}, \frac{1}{N})}{2N}\right)^{-K-1/2-nN} \Gamma(K + \frac{1}{2} + nN) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

($n \rightarrow \infty$).

ここで、 $B(x, y)$ は Beta 関数である。

上記結果は Bender-Wu [BW1,2] ([BB] も参照のこと) によって、heuristic に導き出されている。ここでは exact WKB method を用いることで厳密な議論が可能になることを示す。

係数 A_n^K の、不等式による評価でなく、上に述べたような exact な結論を導くためには固有値 $E^K(\lambda)$ の λ の関数としての解析的な性質を使う必要がある。第1節ではこの解析性について知られている結果をまとめる。その結果、求めるべきものは $E^K(\lambda)$ の λ -plane での cut $\{\lambda \leq 0\}$ における境界値の差に帰着される。第2節では、その境界値を求めるために非調和振動子に対して WKB 解を構成し、接続公式について述べる。第3節では、secular equation を求めて固有値の境界値の差を求める。最後に第4節で A_n^K の漸近的振舞いを求める。

1 $E^K(\lambda)$ の解析性について

この節では $E^K(\lambda)$ の解析性について、主に B.Simon [S] によって得られた結果について述べる。次が基本的な定理である。

定理 1.1

- (i) $E^K(\lambda)$ は $\lambda = 0$ に $(N+2)$ 位の branch point を持つ。
- (ii) $E^K(\lambda)$ の特異点について次が成り立つ (cut は λ -plane の負軸 $\{\lambda \leq 0\}$ に引く)。
 - (a) 原点は特異点の集積点である。
 - (b) 1st sheet には特異点はない。
 - (c) $0 < \theta < \frac{N+2}{2}\pi$ を満たす任意の θ に対して、 $R > 0$ が存在して、 $E^K(\lambda)$ は領域 $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > R, |\arg(\lambda)| < \theta\}$ において解析的である。
- (iii) $E^K(\lambda) = O(|\lambda|^{\frac{1}{N+2}})$ ($\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in (\text{any sheets})$).
- (iv) $0 < \theta < \frac{N+2}{2}\pi$ を満たす任意の θ に対して一様に

$$E^K(\lambda) \sim K + \frac{1}{2} + \sum A_n^K \lambda^n \quad (\lambda \rightarrow 0, |\arg(\lambda)| < \theta).$$

以上の定理を用いることで次の公式が示せる。

命題 1.2

$$A_n^K = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta E^K(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda, \quad (3)$$

ここで $\Delta E^K(\lambda) = E^K(\lambda + i0) - E^K(\lambda - i0)$.

証明のスケッチ

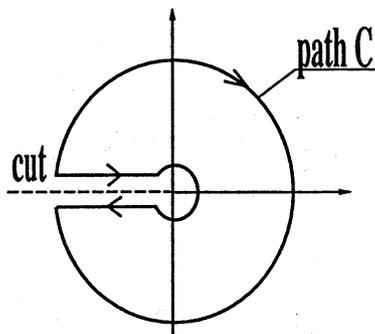


図 1: λ -plane における積分路 C .

$\tilde{E}^K(\lambda) = E^K(\lambda) - K - \frac{1}{2}$ とおく。 $\tilde{E}^K(\lambda)/\lambda$ に対して、積分路 C (図1) に沿って Cauchy の積分公式を使えば

$$\frac{\tilde{E}^K(t)}{t} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\tilde{E}^K(\lambda)}{\lambda(\lambda-t)} d\lambda,$$

を得る。積分路 C の半径を無限大にする極限をとると

$$\tilde{E}^K(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta \tilde{E}^K(\lambda)}{\lambda} \frac{t}{t-\lambda} d\lambda,$$

となる。

$$\frac{t}{t-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^j$$

であるから、命題の主張が従う。 \square

注意 1.3

(i) 上の命題 1.2 では積分路が負軸であったがこれは上記スケッチを見ればわかる通り $E^K(\lambda)$ の cut にそった路である。ところで cut の位置は $\{-te^{i\epsilon}; t > 0\}$ ($\epsilon > 0$ は十分小) としていいのだから (定理 1.1 参照)、命題 1.2 での積分路は $\{-te^{i\epsilon}; t > 0\}$ としてもやはり成り立つ。後に命題 1.2 はこの形で使う。

(ii) 大きい n に対しては積分の dominant な寄与は λ の小さいところから来る。ゆえに問題は十分小さい負の λ における $\Delta E(\lambda)$ の漸近形を求めることに帰着された。

$\Delta E^K(\lambda)$ を求めるために次の命題を用いる。

命題 1.4

$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $E^K(\lambda)$ は次の境界条件 (4) のもとでの方程式 (1) の固有値である。ただし、 $\theta = \arg(\lambda)$ として、

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Sigma_{\pm}(\theta)}} \psi(x) = 0 \quad \text{ここで } \Sigma_{\pm}(\theta) = \left\{ x \in \mathbb{C}; \left| \arg(\pm x) + \frac{\theta}{2(N+2)} \right| < \frac{\pi}{2(N+2)} \right\}. \quad (4)$$

特に $\theta = \pi, -\pi$ の時は図2のようになる。

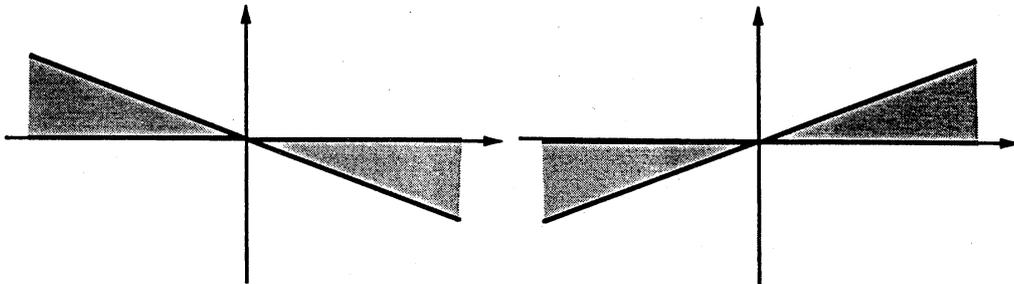


図2: 角領域 $\Sigma_{\pm}(\lambda)$: 左が $\Sigma_{\pm}(\pi)$ で右が $\Sigma_{\pm}(-\pi)$.

証明のスケッチ $\lambda > 0$ の時微分方程式を複素領域で考えると解が

$$\psi(x) \sim \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{2(N+2)}x^{2(N+2)}\right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

という漸近形をもっているので、

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$$

なる x についての条件は

$$\operatorname{Re}\left(\sqrt{\lambda}x^{2(N+2)}\right) > 0$$

である。これは、 $\Sigma_{\pm}(\theta)|_{\theta=0}$ の条件に他ならない。これを $\theta \neq 0$ に動かせばいい。 \square

2 非調和振動子の WKB 解析

前節で問題は境界条件 (4) のもとでの方程式 (1) の固有値を $\lambda < 0$, $\lambda \rightarrow 0$ で考えることに帰着された。従ってこれからは λ は small parameter として取り扱う。

2.1 非調和振動子の WKB 解

まず、非調和振動子に対する WKB 解を構成する。つぎの scaling をする。

$$\begin{aligned} \lambda &\longrightarrow \eta^{-N}e^{i\theta} \quad (\theta = \arg(\lambda)), \\ x &\longrightarrow \sqrt{\eta}x. \end{aligned}$$

λ が small parameter なので η は large parameter になっている。この時方程式 (1) は

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2(Q(x) - \eta^{-1}E)\right)\psi = 0 \quad (5)$$

$$Q(x) = \frac{1}{4}x^2(1 + e^{i\theta}x^{2N})$$

となる。この形にしてから WKB 解析を行う。

WKB 解は通常通りに作る。最初に未知関数を

$$\psi(x) = \exp\int^x S dx, \quad (6)$$

と変換し、得られた方程式

$$S^2 + \frac{dS}{dx} = \eta^2(Q(x) - \eta^{-1}E)$$

において S を η について

$$S = \eta S_{-1} + S_0 + \eta^{-1}S_1 + \dots$$

と展開する。すると各 S_j は次を満たす。

$$S_{-1}^2 = Q(x), \quad (7)$$

$$2S_0S_{-1} + \frac{d}{dx}S_{-1} = -E, \quad (8)$$

$$2S_{n+1}S_{-1} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} S_i S_j + \frac{d}{dx}S_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

方程式 (8) (9) は S_{-1} が決まれば一意的に解を決定し、さらに S_{-1} は二つの解

$$S_{-1} = \pm\sqrt{Q(x)}$$

を持つ。したがって S には二つの (形式) 解がある。具体的に書くと

$$S_{\pm} = \pm\eta\sqrt{Q(x)} + \left(\mp\frac{E}{2\sqrt{Q(x)}} - \frac{Q'(x)}{2Q(x)} \right) + O(\eta^{-1}) \quad (10)$$

となる。 $\sqrt{Q(x)}$ の branch は simple turning point から無限遠点に Stokes curve とは交わらないように cut をいれ (turning point、Stokes curve については定義 2.5 を参照)、原点付近で

$$\sqrt{Q(x)} \sim \frac{1}{2}x \quad (x \rightarrow 0)$$

となるように選ぶ。図 3 に $N = 1$ の時の例を示した。

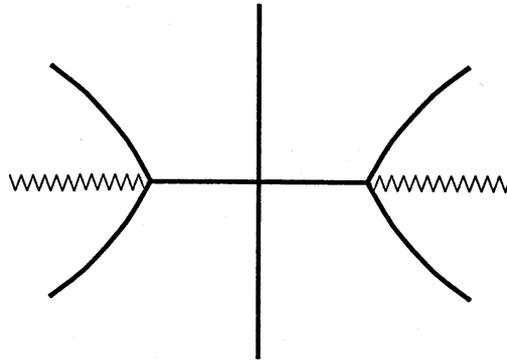


図 3: 波線が cut .

定義 2.1

$$S_{\text{odd}} = \frac{1}{2}(S_+ - S_-), \quad S_{\text{even}} = \frac{1}{2}(S_+ + S_-).$$

式 (10) より、

$$S_{\text{odd}} = \eta\sqrt{Q(x)} - \frac{E}{2\sqrt{Q(x)}} + O(\eta^{-1}), \quad (11)$$

$$S_{\text{even}} = -\frac{Q'(x)}{2Q(x)} + O(\eta^{-1}) \quad (12)$$

となる。この定義の目的を述べる前に次の補題を示しておく。

補題 2.2

$$S_{\text{even}} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log S_{\text{odd}}.$$

証明 S_{\pm} は

$$S_{\pm}^2 + \frac{dS_{\pm}}{dx} = \eta^2 (Q(x) - \eta^{-1}E)$$

を満たすから

$$2S_{\text{odd}}S_{\text{even}} + \frac{d}{dx}S_{\text{odd}} = 0$$

を得る。これより補題が示される。 \square

定数を除いて WKB 解は

$$\psi_{\pm} = \exp\left(\int^x S_{\pm} dx\right)$$

となるが、補題 2.2 を使うと

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int^x S_{\text{odd}} dx\right)$$

となる。

定義 2.3 (WKB 解の normalization)

非調和振動子の WKB 解 ψ_{\pm} の normalization を次で採用する。

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \eta \int_0^x \sqrt{Q(x)} dx\right) \exp\left(\pm \int_{\infty}^x (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx\right).$$

(注意: $S_{-1} = S_{\text{odd}, -1} = \sqrt{Q(x)}$)

\exp の中の各項が可積分であるようにこの normalization を選んだ。

2.2 WKB 解の接続公式

この節で WKB 解の接続公式について述べる。

定義 2.4 (turning point, Stokes curve)

- (i) $Q(x)$ の零点のことを turning point 呼ぶ。Simple な零点に対する turning point を simple turning point と呼ぶ。
- (ii) 次の積分曲線のことを Stokes curve と呼ぶ。

$$\text{Im} \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx = 0 \quad (a \text{ は turning point}) .$$

すぐわかるように simple turning point からは 3 本の、double turning point からは 4 本の Stokes curve がでてくる。

今考えている非調和振動子の時の turning point は

$$\begin{cases} \text{double} & : x = 0 \\ \text{simple} & : x = \exp\left(\frac{i}{2N}(2k\pi - \theta)\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 2N-1) \end{cases}$$

となっている。

定義 2.5 L を turning point a から出ている Stokes curve とする。

WKB 解 ψ_{\pm} が L の上で dominant であるとは $\pm \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx > 0$ が成り立っている時のことをいう。subdominant であるとは $\pm \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx < 0$ が成り立っている時のことをいう。ただし、復号は同順であり、積分路は L に沿うものとする。

形式的に構成された WKB 解は Borel 和をとることで意味付けする ([DDP])。つまり、WKB 解を

$$\psi_{\pm} = \exp\left(\pm \eta \int_0^x \sqrt{Q(x)} dx\right) \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\pm, j}(x) \eta^{-j-1/2}$$

と展開して η に対して Borel 和をとる。もちろん ($\psi_{\pm, j}(x)$ は x を含んでいるから) Borel 和が確定するかどうかは x に依存するが、これに関して以下で述べる接続公式が成り立つ。これは、

turning point の近傍で方程式を canonical なもの (simple turning point に対しては Airy 方程式、double turning point に対しては Weber 方程式) に変換し、それぞれの canonical equation の接続公式を適用すれば得られる。

以下では turning point を結ぶ Stokes curve はないものと仮定する。

定理 2.6 WKB 解は Stokes curve を除いて well defined (つまり Borel 和が確定する)。

定理 2.7 Stokes line L が、simple turning point a から出ているとする。 L を a を中心にして反時計回りに横切って WKB 解 $\hat{\psi}_{\pm}$ を解析接続する時次のように振舞う。

$$\hat{\psi}_+ \text{ が } L \text{ で dominant な時: } \begin{cases} \hat{\psi}_+ \rightarrow \hat{\psi}_+ + i\hat{\psi}_- \\ \hat{\psi}_- \rightarrow \hat{\psi}_- \end{cases}$$

$$\hat{\psi}_- \text{ が } L \text{ で dominant な時: } \begin{cases} \hat{\psi}_+ \rightarrow \hat{\psi}_+ \\ \hat{\psi}_- \rightarrow \hat{\psi}_- + i\hat{\psi}_+ \end{cases}$$

ただし、 $\hat{\psi}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_a^x S_{\text{odd}} dx\right)$ とした。

定理 2.8 Stokes line L が原点 (double turning point) から出ているとする。この時 WKB 解 ψ_{\pm} を Stokes line を越えて解析接続すると次のように振舞う (図 4 を参照)。

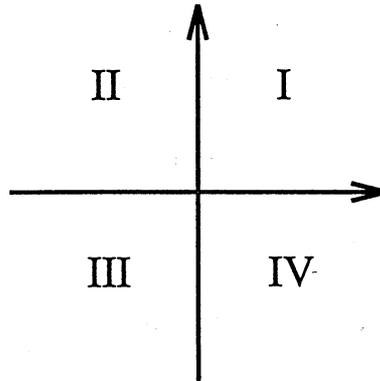


図 4: 領域 I、II、III、IV.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{領域 IV} \rightarrow \text{領域 I} : \psi_+ \rightarrow \psi_+ + i \frac{C_-}{C_+} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-F + \frac{1}{2})} \eta^{-F} \psi_-, \quad \psi_- \rightarrow \psi_- \\ \text{領域 I} \rightarrow \text{領域 II} : \psi_- \rightarrow \psi_- + i \frac{C_+}{C_-} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(F + \frac{1}{2})} e^{-i\pi F} \eta^F \psi_-, \quad \psi_+ \rightarrow \psi_+ \\ \text{領域 II} \rightarrow \text{領域 III} : \psi_+ \rightarrow \psi_+ + i \frac{C_-}{C_+} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-F + \frac{1}{2})} e^{2i\pi F} \eta^{-F} \psi_-, \quad \psi_- \rightarrow \psi_- \end{array} \right.$$

$$\text{ただし、} \begin{cases} C_{\pm} = (-4)^{\pm \frac{E}{2N}} + O(\eta^{-1}), \\ F = \text{Res}_{x=0} S_{\text{odd}} = -E + O(\eta^{-1}). \end{cases}$$

注意 2.9

(i) 定理 2.7 では $\hat{\psi}$ を使った。 ψ に読み替えるには積分路に注意して

$$\psi_{\pm} = \exp\left(\pm\eta \int_0^a \sqrt{Q(x)} dx\right) \exp\left(\pm \int_{\infty}^a (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx\right) \hat{\psi}_{\pm}$$

とすればいい。

(ii) 定理 2.8 では後に必要なものだけを書いた。

以上で準備を終わる。次の節で secular equation を求める。

3 Secular equation の導出

この節では secular equation を導く。求めたかったのは λ -plane 内の cut $\{\lambda \leq 0\}$ における $E^K(\lambda)$ の差 $\Delta E^K(\lambda) = E^K(\lambda + i0) - E^K(\lambda - i0)$ である。

ところが $\theta = \arg(\lambda) = \pi$ というのは Stokes line が degenerate している (turning point を結ぶ Stokes curve がある) ので cut を上か下かに少し回転しなければならない。ここでは下に回すことにし、 $\epsilon > 0$ を十分小さくとして cut を $\{\theta = \pi + \epsilon\}$ とする (注意 1.3 (i) 参照)。従って求めるものは $E^K(\pm(\pi - 0) + \epsilon)$ となる。

さて secular equation を導出するわけであるが、まず $\theta = \pm\pi + \epsilon$ の時 $\Sigma_+(\theta)$ と $\Sigma_-(\theta)$ のどちらにおいても ψ_- が subdominant であり、従って境界条件 (4) を満足するのは ψ_- であることに注意する。 ψ_- を $\Sigma_+(\theta)$ から $\Sigma_-(\theta)$ に解析接続すると、 ψ_+ と ψ_- の一次結合となるが、

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_+(\lambda) & & \Sigma_-(\lambda) \\ \psi_- & \xRightarrow{\text{解析接続}} & K_+(\eta, E)\psi_+ + K_-(\eta, E)\psi_- \end{array}$$

eigenfunction が存在するという条件から、 $K_+(\eta, E) = 0$ が導かれ、これが求める secular equation である。解析接続は前節の結果を用いれば容易に行なえる。以下の subsection で $\theta = \pm\pi + \epsilon$ における secular equation を具体的に求める。

なお $\theta = \pi + \epsilon$ と $\theta = -\pi + \epsilon$ での Stokes curve が同じになることに注意。実際、図 5 ~ 7 のようになる。

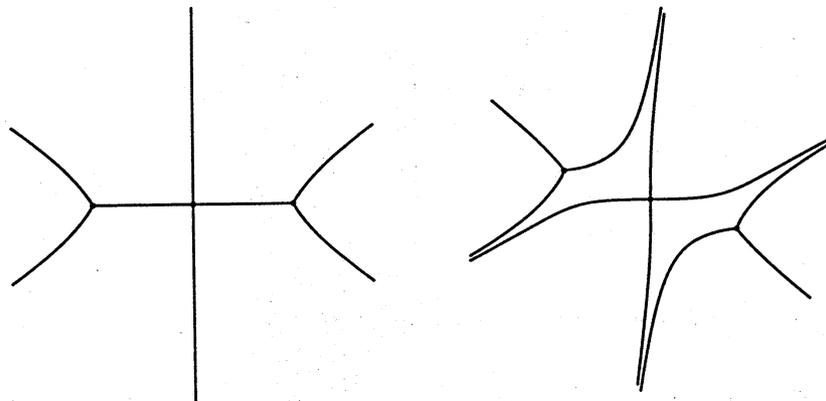


図 5: $N = 1$ における Stokes curve: 左が $\theta = \pm\pi$ の時で右が $\theta = \pm\pi + \epsilon$ の時。

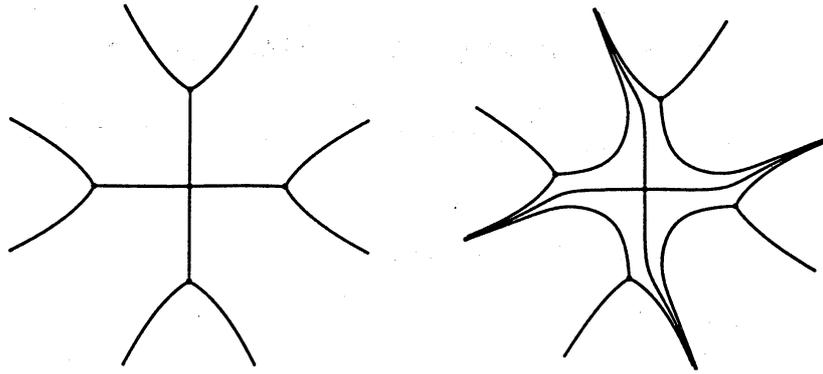


図 6: $N = 2$ における Stokes curve: 左が $\theta = \pm\pi$ の時で右が $\theta = \pm\pi + \epsilon$ の時.

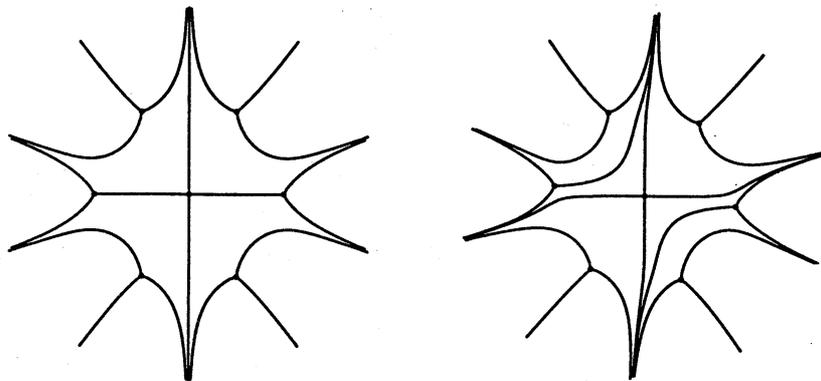


図 7: $N = 3$ における Stokes curve: 左が $\theta = \pm\pi$ の時で右が $\theta = \pm\pi + \epsilon$ の時.

3.1 $\arg(\lambda) = \pi + \epsilon$ での固有値

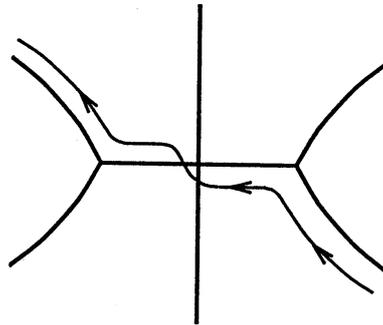


図 8: $\theta = \pi + \epsilon$ の時の解の解析接続の path .

cut の上側では解析接続の path は図 8 の通り。第 2 節で述べた接続公式を用いると、

$$\begin{aligned}
 K_+(\eta, E) = & i(B_2(\eta, E) \\
 & + A_-(\eta, E) - A_+(\eta, E) + B_1(\eta, E)B_2(\eta, E)A_+(\eta, E) \\
 & + B_1(\eta, E)A_+(\eta, E)A_-(\eta, E)).
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= \exp(-2\eta \int_0^{\pm 1} S_{-1} dx) \exp(-2 \int_{\infty}^{\pm 1} (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx), \\ B_1 &= \frac{C_-}{C_+} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-F + \frac{1}{2})} \eta^{-F}, \\ B_2 &= \frac{C_+}{C_-} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(F + \frac{1}{2})} e^{-i\pi} \eta^F. \end{aligned}$$

今、 ω を

$$\omega := 2 \int_0^1 S_{-1} dx = 2 \int_0^{-1} S_{-1} dx = \frac{B(\frac{1}{N}, \frac{3}{2})}{2N}$$

で定義すると、上の secular equation は $e^{-\eta\omega}$ に関して 0 次、1 次、2 次 となっているので

$$E = E_0(\eta) + E_1(\eta)e^{-\eta\omega} + E_2(\eta)e^{-2\eta\omega} + \dots,$$

$$E_j(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{j,n} \eta^{-n}$$

という形で解を求める。Secular equation に代入して $e^{-\eta\omega}$ に関して 1 次まで求めれば、

$$B_2(\eta, E_0) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial E}(\eta, E_0) E_1 + \tilde{A}_-(\eta, E_0) - \tilde{A}_+(\eta, E_0) + B_1(\eta, E_0) B_2(\eta, E_0) \tilde{A}_+(\eta, E_0) = 0. \quad (14)$$

$$\left(\text{ここで } \tilde{A}_{\pm} = A_{\pm} e^{\eta\omega} = \exp\left(-2 \int_{\infty}^{\pm 1} (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx\right) \right).$$

方程式 (13) を解くと

$$E_0^K = K + \frac{1}{2} + O(\eta^{-1}), \quad (15)$$

となる。従って (13)、(14)、(15) を用いると、

$$E_1^K = \frac{2i}{\sqrt{2\pi} K!} \eta^{K+\frac{1}{2}} 4^{(K+\frac{1}{2})/N} (1 + O(\eta^{-1})),$$

を得る。

3.2 $\arg(\lambda) = -\pi + \epsilon$ での固有値

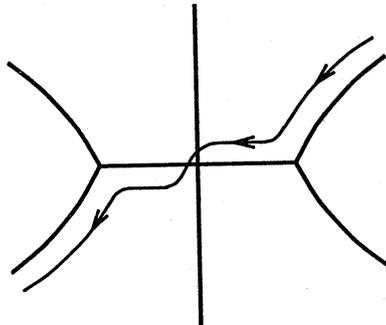


図 9: $\theta = -\pi + \epsilon$ の時の解の解析接続の path.

cut の下側の時の解析接続の path は図 9 の通り。この時の secular equation は、

$$\frac{1}{\Gamma(F + \frac{1}{2})} = 0$$

となる。

ここで注意しなければならないのはこの時解析接続の path と交わる Stokes curve の数は N と共に増加するということである。従って $K_+(\eta, E)$ は N と共に項を増やしていきそうに見えるが、turning point の位置関係と ψ_+ がこの増えた Stokes line 上で subdominant であることを考えれば $K_+(\eta, E)$ は変わらないことがわかる (変わるのは ψ_- の係数だけ)。

これを解くと

$$E^K = K + \frac{1}{2} + O(\eta^{-1})$$

となる。

4 A_n^K の漸近的振舞い

前節で $\arg(\lambda) = \pm\pi + \epsilon$ での固有値の形を求めた。固有値の cut における差は

$$\Delta E^K = E_1^K e^{-\eta\Omega} + \dots$$

$$E_1^K = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}K!} \eta^{K+\frac{1}{2}} 4^{(K+\frac{1}{2})/N} (1 + O(\eta^{-1}))$$

であることがわかる。これらを (3) に代入して

$$A_n^K = \frac{(-1)^{n+1}N}{K!\sqrt{2\pi^3}} 4^{(K+\frac{1}{2})/N} \omega^{-K-\frac{1}{2}-nN} \Gamma(K + \frac{1}{2} + nN) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

($n \rightarrow \infty$).

を得る。これが最初に述べた結果である。

References

- [BB] T.I.Banks and C.M.Bender : Anharmonic oscillator with polynomial self-interaction. J. Math. Phys., **13** (1972), 1320-1324.
- [BW1] C.M.Bender and T.T.Wu : Large-order behavior of perturbation theory. Phys. Rev. Lett., **27** (1971), 461-465.
- [BW2] ————— : Anharmonic oscillator. II. Phys. Rev. D, **7** (1973). 1620-1636.
- [DDP] E.Delabaere, H.Dillinger, and F.Pham : Exact semi-classical expansions for one dimensional quantum oscillators. Prépublication No. 441, Univ. Nice-Sophia-Antipolis, 1996.
- [S] B.Simon : Coupling constant analyticity for the anharmonic oscillator. Ann. Phys., **58** (1976), 76-136.