数理解析研究所講究録
984巻 1997年 198-208

Construction of solutions to hyperbolic differential equations

慶大理工 星野慶介（Keisuke Hoshino）

§0. 序

Ω は $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, の有界領域で C^2 級境界 $\partial\Omega$ をもつとし，T を任意の正数として $Q=(0,T)\times\Omega$ とおく．ベクトル値関数 $u=(u^1,\cdots,u^M):Q\to\mathbb{R}^M$, $M\geq 1$, に対する双曲型偏微分方程式

$$(1) \qquad u_{tt}-div(A(x)\nabla u)+|u_t|^{\gamma-2}u_t=0 \qquad in\ Q$$

を初期-境界条件

$$(2)\ \begin{cases} u|_{t=0}=u_0\ , \quad u_t|_{t=0}=v_0 \\ u(t,\cdot)|_{\partial\Omega}=u_0|_{\partial\Omega} \quad for\ \ t\in(0,T) \end{cases}$$

のもとで考える．

(1)において

$$div(A(x)\nabla u)=\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A^{\alpha\beta}_{ij}(x)\frac{\partial u^j}{\partial x_\beta}\right)\right) \quad (i=1,\cdots,M)$$

である．ここで，ギリシャ文字は $1,\cdots,m$ を，ラテン文字は $1,\cdots,M$ を動くものとして総和規約を用いる．

係数 $A^{\alpha\beta}_{ij}(x)$ は $A^{\alpha\beta}_{ij}=A^{\beta\alpha}_{ji}$ なる Ω 上の有界可測関数であり，次を満たす： $\exists\lambda>0$, $\exists L>0$ s.t.

(3) $\lambda|\xi|^2 \leqslant A^{\alpha\beta}_{ij}(x)\xi^i_\alpha\xi^j_\beta \leqslant L|\xi|^2$ for $\xi=(\xi^i_\alpha)\in\mathbb{R}^{mM}$, $x\in\Omega$.

(1) の非線型項の指数に現れる γ は

(4)
$$\begin{cases} \gamma>2 & \text{if } m=2 \\ 2<\gamma<2^*=\dfrac{2m}{m-2} & \text{if } m\geqq 3 \end{cases}$$

なる定数とする．

本稿の主題は，問題(1)-(2)の‘弱解’ u の構成と，その空間微分 $\nabla u=\left(\dfrac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}\right)$ の高次可積分性の導出である．

§1．諸定義と結果

Sobolev空間 $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^M)$, $W^{1,2}_0(\Omega,\mathbb{R}^M)$ を $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$ と略記する．(2)の初期-境界データ u_0, v_0 は

$$(u_0,v_0)\in H^1(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$$

なるものとして，(1)-(2)の弱解を定義する．定義を述べるために更に次の記号を導入しておく：

$$H^1_{u_0}(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega):\ u-u_0\in H^1_0(\Omega)\}$$

$$(\nabla u, \nabla\varphi)_A = A_{ij}^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \varphi^j}{\partial x_\beta}, \qquad (u_t, \varphi_t) = \frac{\partial u^i}{\partial t}\frac{\partial \varphi^i}{\partial t}.$$

<u>定義</u>　uが問題(1)-(2)の弱解であるとは，以下の四条件が成り立つことである：

i)　$u \in L^\infty((0,T), H^1(\Omega)) \cap W^{1,\gamma}((0,T), L^\gamma(\Omega))$

ii)　$u(t) \in H^1_{u_0}(\Omega)$ for a.e. $t \in (0,T)$

iii)　$\lim_{t\downarrow 0} u(t) = u_0$ in $L^2(\Omega)$

iv)　$C^1_0([0,T), H^1_0(\Omega))$に属する任意の$\varphi$が次を満たす：

$$\int_0^T\int_\Omega \{-(u_t,\varphi_t) + (\nabla u, \nabla\varphi)_A + |u_t|^{\gamma-2}(u_t,\varphi)\}\,dx\,dt$$
$$= \int_\Omega (v_0, \varphi(0,x))\,dx.$$

我々は弱解の構成のために近似解を導入し，空間微分の高次可積分性の議論もこの近似解に対して展開する．我々が扱うのはRotheの近似解で，(1)における時間微分を差分に置き換えた形の方程式を満たす．

まずNを正整数(>T)とし，区間(0,T)を幅$h = T/N$の小区間にN等分して

$$t_n = nh \quad (n \in \mathbb{Z})$$

とおく．時間変数tに関する関数fが

$$f(t) = f(t_n) = f_n \quad \text{for } t \in (t_{n-1}, t_n]$$

の形をしているとき，f は h-時間階段関数であるということにする．

<u>定義</u>　u_h が問題(1)-(2)の近似解であるとは，

i）$u_h(t)$ が $(-2h, T]$ 上の $H^1_{u_0}(\Omega)$ 値の h-時間階段関数：

$$u_h(t) = u_n \quad \text{for} \quad t \in (t_{n-1}, t_n] \ (n = -1, 0, 1, \cdots, N)$$

であり

ii）　$u_{-1} = u_0 - h v_0$　（(u_0, v_0) は与えられた初期-境界データ）

かつ

iii）任意の $\chi \in H^1_0(\Omega)$, $n = 1, \cdots, N$ に対して

$$\int_\Omega \left\{ \left(\frac{u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}}{h^2}, \chi \right) + (\nabla u_n, \nabla \chi)_A + \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right|^{\gamma-2} \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}, \chi \right) \right\} dx = 0$$

を満たすことである．

近似解は，以下の手続きにより $u_1, u_2, \cdots, u_N$ を逐次決定することにより構成される：　汎関数

$$F_n(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2h^2} |u - 2u_{n-1} + u_{n-2}|^2 + \frac{1}{2} (\nabla u, \nabla u)_A + \frac{1}{\gamma h^{\gamma-1}} |u - u_{n-1}|^\gamma \right\} dx$$

の $H^1_{u_0}(\Omega)$ における最小点を u_n とする．u_n は F_n の Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}}{h^2} - \mathrm{div}(A(x) \nabla u_n) + \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right|^{\gamma-2} \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = 0$$

を弱い意味で満たす．これは上記 iii) を意味する．

近似解に対して次のような記号を用いる：

$$\tilde{u}_h(t) = u_h(t-h) \ , \quad \bar{\partial}_t u_h = \frac{u_h - \tilde{u}_h}{h} \ , \quad \bar{\partial}_t^2 u_h = \frac{u_h - 2\tilde{u}_h + \tilde{\tilde{u}}_h}{h^2}$$

近似解の存在については前頁で説明したが，更に近似解の空間微分に対して高次可積分性が成り立つ．その陳述には、以下の記号を要する：$R>0$，$z_0=(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ に対し

$$Q_R(z_0)=\Lambda_R(t_0)\times B_R(x_0)\ ,\quad \Lambda_R(t_0)=(t_0-R,t_0+R),$$
$$B_R(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^m : |x-x_0|<R\}\ ;$$
$$⨍_A u\,dz=\frac{1}{|A|}\int_A u\,dz \qquad \text{for } A\subset\mathbb{R}^{m+1},$$

但し $|A|$ は A の Lebesgue 測度，$dz=dx\,dt$．

<u>定理 1</u>．$(u_0,v_0)\in H^1(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$ に対して，(1)-(2) の近似解 u_h が存在し，m,M,λ,L,u_0,v_0 に依存する正定数 ε_0, C があって任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，$Q_{2R}(z_0)\subset Q$，$z_0=(t_{n_0},x_0)$ $(n_0=1,2,\cdots,N-1)$ に対し

$$(5)\quad \left(⨍_{Q_R(z_0)}|\nabla u_h|^{2+\varepsilon}dz\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \le C\left(⨍_{Q_{2R}(z_0)}|\nabla u_h|^2dz\right)^{\frac12} + C\left(⨍_{Q_{2R}(z_0)}|\bar\partial_t u_h|^{2+\varepsilon}+|\bar\partial_t\tilde u_h|^{2+\varepsilon}+|\bar\partial_t u_h|^{\frac{2+\varepsilon}{2}\cdot\frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}}dz\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$$

が成り立つ．

弱解に対しては次の結果を得る．

<u>定理 2</u>．初期-境界データ $(u_0,v_0)\in H^3(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$ が

$$(6)\qquad \mathrm{div}(A(x)\nabla u_0)-|v_0|^{\gamma-2}v_0\ \in H^1_0(\Omega)$$

を満たすとき，(1)-(2) の弱解 u が存在し，m,M,λ,L,u_0,v_0 に依存する正定数 ε_0, C があって任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，$Q_{2R}(z_0)\subset Q$，$z_0=(t_0,x_0)$ に対して

$$(7)\quad \left(⨍_{Q_R(z_0)}|\nabla u|^{2+\varepsilon}dz\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \le C\left(⨍_{Q_{2R}(z_0)}|\nabla u|^2dz\right)^{\frac12} + C\left(⨍_{Q_{2R}(z_0)}|u_t|^{2+\varepsilon}+|u_t|^{\frac{2+\varepsilon}{2}\cdot\frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}}dz\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}}.$$

注意. 上の定理の中の不等式(5),(7)に現れる定数 2^* は, $m \geqq 3$ の場合(4)によって定められるが, $m=2$ のときは $\gamma < 2^* < \infty$ を満たす任意の定数とする.

§2. 基本的な評価

近似解 u_h に対するエネルギー評価とCaccioppoli評価を導く. Caccioppoli評価は高次可積分性の議論において本質的役割を果たす.

<u>補題1(エネルギー評価)</u> $(u_0, v_0) \in H^1(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ に対する(1)-(2)の近似解 u_h に対して

$$\sup_{t \in (0,T)} \int_{\{t\} \times \Omega} |\partial_t u_h|^2 + |\nabla u_h|_A^2 \, dx \leq \int_\Omega |v_0|^2 + |\nabla u_0|_A^2 \, dx ,$$

$$\int_Q |\partial_t u_h|^\gamma \, dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |v_0|^2 + |\nabla u_0|_A^2 \, dx .$$

<u>証明</u>. 近似解の定義 iii) の等式に $\chi = u_n - u_{n-1}$ を代入して得られる

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \{ (\partial_t u_n - \partial_t u_{n-1}, \partial_t u_n) + (\nabla u_n, \nabla u_n - \nabla u_{n-1})_A + h |\partial_t u_n|^\gamma \} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_\Omega \{ (|\partial_t u_n|^2 + |\nabla u_n|_A^2) - (|\partial_t u_{n-1}|^2 + |\nabla u_{n-1}|_A^2) \} dx + h \int_\Omega |\partial_t u_n|^\gamma dx \end{aligned}$$

から

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\partial_t u_n|^2 + |\nabla u_n|_A^2 \, dx + h \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\partial_t u_i|^\gamma dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |v_0|^2 + |\nabla u_0|_A^2 \, dx .$$

これより補題の二つの評価が出る.

補題2(Caccioppoli評価) u_h は $(u_0, v_0) \in H^1(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ に対する (1)-(2) の近似解とする. このとき, m, λ, L のみに依存する正定数 C があって 任意の $Q_{2R}(z_0) \subset Q$, $z_0 = (t_{n_0}, x_0)$ $(n_0 = 1, 2, \cdots, N-1)$ に対し

$$\fint_{Q_R(z_0)} |\nabla u_h|_A^2 \, dz \le CR^{-2} \fint_{Q_{2R}(z_0)} |u_h - \bar{u}_{h,x_0,2R}(t)|^2 \, dz + C \fint_{Q_{2R}(z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^2 + |\bar{\partial}_t \tilde{u}_h|^2 \, dz$$
$$+ C \fint_{Q_{2R}(z_0)} |\bar{\partial}_t u_h|^{\gamma-1} |u_h - \bar{u}_{h,x_0,2R}(t)| \, dz .$$

ここで

$$\bar{u}_{h,x_0,2R}(t) = \fint_{B_{2R}(x_0)} u_h(t,x) \, dx$$

証明. [2] の Lemma 1 の $\bar{u}_{h,z_0,2R}$ を $\bar{u}_{h,x_0,2R}(t)$ に置き換えて 同じ議論をおこなえばよい.

次に, 近似解 u_h に付随して

$$v_h(t) = \frac{t - t_{n-1}}{h} \bar{\partial}_t u_n + \frac{t_n - t}{h} \bar{\partial}_t u_{n-1} \qquad \text{for } t \in (t_{n-1}, t_n)$$

で定義される v_h を考える. v_h は $\bar{\partial}_t^2 u_h = \dfrac{\partial v_h}{\partial t}$ を満たし

$$H^1(Q) = L^2((0,T), H^1(\Omega)) \cap H^1((0,T), L^2(\Omega))$$

に属するが, 定理2の仮定のもとでは 次のことがいえる.

補題3. 初期-境界データ $(u_0, v_0) \in H^3(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ が (6) を満たすとき, $\{v_h : h = T/N, N \text{は正整数}\}$ は $H^1(Q)$ において 有界である.

証明 $u_{-2} = u_0 - 2hv_0 + h^2(\operatorname{div}(A(x)\nabla u_0) - |v_0|^{\gamma-2} v_0)$ と定義すると, 近似解の定義 iii) が $n=0$ に対しても成り立つ. iii)の等式のnを$n-1$で置き換えた等式を もとの等式 から 引くと

$$\int_\Omega \{(\bar{\partial}_t^2 v_n, \chi) + (\nabla v_n, \nabla\chi)_A + ((|v_n|^{\gamma-2}v_n - |v_{n-1}|^{\gamma-2}v_{n-1})/h, \chi)\}\,dx = 0,$$

ここで　$v_n = \bar{\partial}_t u_n$ とおいた．　$\chi = v_n - v_{n-1}$ を代入，変形すると

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\bar{\partial}_t v_n|^2 + |\nabla v_n|_A^2\,dx + \frac{1}{h}\int_\Omega (|v_n|^{\gamma-2}v_n - |v_{n-1}|^{\gamma-2}v_{n-1}, v_n - v_{n-1})\,dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\bar{\partial}_t v_{n-1}|^2 + |\nabla v_{n-1}|_A^2\,dx$$

となり，左辺第二項が正になることが容易に示される．よって

$$\sup_{t\in(0,T)} \int_{\{t\}\times\Omega} |\partial_t v_h|^2 + |\nabla v_h|_A^2\,dx \leq 2\int_\Omega |\mathrm{div}(A(x)\nabla u_0) - |v_0|^{\gamma-2}v_0|^2 + |\nabla v_0|_A^2\,dx$$

が導かれ，所期の結果を得る．

この補題は，近似解 u_h の $h\downarrow 0$ のときの収束を導く．

§3. 定理の証明．

<u>定理1の証明</u>．Caccioppoli 評価（補題2）の右辺最終項は Hölder 不等式と Sobolev-Poincaré 不等式により，次のように評価される．

$$\begin{aligned}
&\fint_{Q_{2R}(z_0)} |\partial_t u_h|^{\gamma-1}|u_h - \bar{u}_{h,x_0,2R}(t)|\,dz \\
&\leq \left(\fint_{Q_{2R}(z_0)} |\partial_t u_h|^{\frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}}\,dz\right)^{1-\frac{1}{2^*}} \left(\fint_{Q_{2R}(z_0)} |u_h - \bar{u}_{h,x_0,2R}(t)|^{2^*}\,dz\right)^{\frac{1}{2^*}} \\
&\leq C\left(\fint_{Q_{2R}(z_0)} |\partial_t u_h|^{\frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}}\,dz\right)^{1-\frac{1}{2^*}} \left\{\fint_{\Lambda_{2R}(t_{n_0})} R^{2^*}\left(\fint_{B_{2R}(x_0)} |\nabla u_h|^2\,dx\right)^{\frac{2^*}{2}} dt\right\}^{\frac{1}{2^*}} \\
&\leq C\left(\fint_{Q_{2R}(z_0)} |\partial_t u_h|^{\frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}}\,dz\right)^{1-\frac{1}{2^*}} \left(\sup_{t\in\Lambda_{2R}(t_{n_0})} \int_{\{t\}\times B_{2R}(x_0)} |\nabla u_h|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}} \left(\fint_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u_h|^2\,dz\right)^{\frac{1}{2^*}}.
\end{aligned}$$

最終辺の二番目の積分は，補題1により，初期データのみに依存する定数でおさえられる．Young の不等式と，再び Sobolev-Poincaré 不等式を用いれば，Caccioppoli 評価は 結局

$$\fint_{Q_R(z_0)} |\nabla u_h|^2 dz \le C\left(\fint_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u_h|^s dz\right)^{\frac{2}{s}} + C \fint_{Q_{2R}(z_0)} |\bar\partial_t u_h|^2 + |\bar\partial_t \tilde{u}_h|^2 \, dz$$
$$+ C\theta^{-(2^*-1)} \fint_{Q_{2R}(z_0)} |\bar\partial_t u_h|^{\frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1}} dz + \theta \fint_{Q_{2R}(z_0)} |\nabla u_h|^2 dz$$

となる．ここで θ は $0<\theta<1$ なる任意の定数，$s = \frac{2(m+1)}{m+3}$ である．

$$s<2, \quad 2<\gamma, \quad \frac{2^*(\gamma-1)}{2^*-1} < \gamma$$

に注意して下の命題を用いれば，定理1を得る．

<u>命題</u>（[1], Proposition 1）　$g \in L^q(Q)$ と $f \in L^r(Q)$，$r>q>1$，は非負値 h-時間階段関数とする．正定数 b と定数 $\theta \in [0,1)$ があって任意の $Q_{2R}(z_0) \subset Q$，$z_0 = (t_{n_0}, x_0)$ $(n_0 = 1, \ldots, N-1)$ に対して

$$\fint_{Q_R(z_0)} g^q dz \le b\left\{\left(\fint_{Q_{2R}(z_0)} g\, dz\right)^q + \fint_{Q_{2R}(z_0)} f^q dz\right\} + \theta \fint_{Q_{2R}(z_0)} g^q dz$$

が成り立つとする．このとき，b, θ, q, r, m にのみ依存する正定数 ε_0，C があって，任意の $Q_{2R}(z_0) \subset Q$，$z_0 = (t_{n_0}, x_0)$，$p \in [q, q+\varepsilon_0)$ に対し

$$\left(\fint_{Q_R(z_0)} g^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left\{\left(\fint_{Q_{2R}(z_0)} g^q dz\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\fint_{Q_{2R}(z_0)} f^p dz\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

が成り立つ．

<u>定理2の証明．</u>　補題3と compact imbedding $H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ により，$\{v_h\}$ は $L^2(Q)$ で強収束する列を含み，更に適当な部分列をとれば Q 上 a.e. で収束する．

$$\int_Q |v_h - \bar\partial_t u_h|^2 dz \le \int_Q |\bar\partial_t u_h - \bar\partial_t \tilde{u}_h|^2 dz = h^2 \int_Q |\bar\partial_t^2 u_h|^2 dz$$

の最後の積分は補題3により h に関して一様有界であるから，$\bar\partial_t u_h$ と v_h が共通の極限をもつことがわかる．補題1に基づき，

[1] の Theorem 2 の証明にならえば，ある

$$u \in L^\infty((0,T), H^1(\Omega)) \cap W^{1,\gamma}((0,T), L^\gamma(\Omega))$$

に対して $h \downarrow 0$ のとき（必要なら部分列をとって）

$$\bar{\partial}_t u_h \rightharpoonup u_t, \quad \nabla u_h \rightharpoonup \nabla u \quad \text{weakly* in } L^\infty((0,T), L^2(\Omega)),$$

$$u_h \to u \quad \text{strongly in } L^2(Q)$$

となる．上記により，$\bar{\partial}_t u_h \to u_t$ a.e. on Q を得る．よって $L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(Q)$ の有界列 $\{|\bar{\partial}_t u_h|^{\gamma-2}\bar{\partial}_t u_h\}$ の弱収束（部分列の）極限は，$|u_t|^{\gamma-2}u_t$ となる．以上により，u が 弱解 の定義の条件 iv) を満たすことが導かれる． 以下は [1] の Theorem 2 と全く同様にして証明される．

References

[1] K. Hoshino and N. Kikuchi, *On a construction of weak solutions to linear hyperbolic partial differential systems with the higher integrable gradients*, Sem. Math. V. A. Steklov Math. Inst. St. Petersburg 233 (1996) 30-52.

[2] K. Hoshino, *On a method constructing solutions to hyperbolic partial differential equations*, to appear in Nonlinear Studies.

[3] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Ann. Math. Studies n. 105,

Princeton University Press, Princeton, N.J., 1983.

[4] M. Giaquinta and M. Struwe, *On the partial regularity of weak solutions of non-linear parabolic systems*, J. Reine Angew. Math. 311/312 (1979) 145-169

[5] F. W. Gehring, *The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*, Acta Math. 130 (1973) 265-277.

[6] E. Rothe, *Wärmeleitungsgleichung mit nichtkostanten Koeffizienten*, Math. Ann. 104 (1931) 340-362