数理解析研究所講究録
984 巻 1997 年 92-95

関数微分方程式の準周期解の近似解法

S.Yui[1], K.Hosono and M.Kurihara[2]
[1,2]Department of Computer Science, Faculty of Engineering
Yamanashi University, Kofu 400, Japan
(油井誠志、細野健司、栗原光信)

1 準周期関数

関数 $f(t)\in C(R;R^d)$ が周期$\omega_1,\ldots,\omega_m$で準周期であるとは,

$$f(t)=f_0(t,\ldots,t),\qquad(t\in R)$$

を満たす $f_0(u_1,\ldots,u_m)\in C(R^m;R^d)$ が存在し, $f_0(u_1,\ldots,u_m)$ がそれぞれの変数 u_i $(i=1,\ldots,m)$ に対して, 周期$\omega_1,\ldots,\omega_m$の周期的であるときである. ただし, $C(R^m;R^d)$ は定義域を R^m, 値域を R^dとする連続関数の集合とする. ここで, 関数 $f(t)$ が周期$\omega_1,\ldots,\omega_m$を持つ準周期であるなら, $f(t)$ は概周期である.

2 exponential dichotomy

次の微分作用素 L を定義する.

$$Lz=\frac{dz}{dt}-A(t)z \tag{2.1}$$

$$Lz=0 \tag{2.2}$$

ここで, z は R 上で連続微分可能な d 次元ベクトル値関数で, $A(t)$ は連続な $d\times d$ の正方行列値関数とする.

線形微分作用素 (2.1) は, $A(t)$ が準周期行列のとき準周期作用素と呼ばれる. また, 同様に $A(t)$ が概周期行列のとき概周期作用素と呼ばれる.

微分作用素 L が概周期作用素であるとき, 任意の概周期関数 $f(t)$ に対して,

$$Lz=f(t) \tag{2.3}$$

が, 少なくとも一つの有界な解を持つとき, 正則であると呼ぶ. また, 準周期は概周期であるから, 準周期作用素は, 概周期作用素として正則であるとき, 正則である.

定義 1.
(2.4) と (2.5) を満たす射影行列 P と正の定数C_1,C_2とσが存在するとき, (2.2) は exponential dichotomy を満たすという.

$$|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)|\le C_1e^{-\sigma_1(t-s)}\qquad(s\le t) \tag{2.4}$$

$$|\Phi(t)(E-P)\Phi^{-1}(s)|\le C_2e^{-\sigma_2(s-t)}\qquad(t\le s) \tag{2.5}$$

ここで, $\Phi(t)$ はは, $\Phi(0)=E$ を持つ線形同次方程式 (2.2) の基本行列である.

この古典的定義を拡張して, 次の一般化された exponential dichotomy の概念を導入する.

定義 2.
線形同次方程式 $Lz=0$ が, 次の条件 1,2,3 を満たす射影行列 P, 正の定数σ_1,σ_2非負の関数 $C_1(t,s),C_2(t,s)$, 非負の定数 M が存在するとき, L は一般化された exponential dichotomy を満たすという.

1. $|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)| \leq C_1(t,s)e^{-\sigma_1(t-s)} \qquad (t \geq s)$
2. $|\Phi(t)(E-P)\Phi^{-1}(s)| \leq C_2(t,s)e^{-\sigma_2(t-s)} \qquad (t < s)$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} C_1(t,s)e^{-\sigma_1(t-s)}ds + \int_{t}^{\infty} C_2(t,s)e^{-\sigma_2(s-t)}ds \leq M \qquad (t \in R)$

定理 1.
もし，(2.1) によって定義された周期$\omega_1,\ldots,\omega_m$を持つ準周期作用素 L が一般化された exponential dichotomy を満たすならば，周期$\omega_1,\ldots,\omega_m$を持つ準周期関数 $f(t)$ に対して，微分方程式 (2.3) は同じ周期を持つ準周期解 $z=z(t)$ を一意的に持つ．また，それは次式によって与えられる:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s)ds,$$

但し，

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi(t)P\Phi^{-1}(s) & (t \geq s) \\ -\Phi(t)(E-P)\Phi^{-1}(s) & (t < s) \end{cases}.$$

ここで，$G(t,s)$ は，L に対してグリーン関数と呼ばれる．また，解 $z(t)$ は，次の関係を満たす．

$$\|z\| \leq M\|f\|$$

ただし，定義 2 における条件 3 の M を用いる．また，$\|f\| = \max_{t\in R}|f(t)|$ とする．

3 差分微分方程式

定理 2.
差分微分方程式

$$\frac{dz(t)}{dt} = X(t, z(t), z(t+\tau)) \tag{3.6}$$

を考える．ここで与えられた関数 $X(t,z,w)$ は領域 $R \times D \times D$ で定義され，t について周期$\omega_1,\ldots,\omega_m$を持つ準周期であり，(z,w) について連続微分可能であると仮定する．ただし，$D \subset R^d$は有界領域とする．また，差分微分方程式系 (3.6) は，任意の t に対して D 内に位置し同じ周期を持つ準周期関数である近似解 $z=\bar{z}(t)$ を持ち，全ての $t \in R$ に対して，

$$\left|\frac{d\bar{z}(t)}{dt} - X(t, \bar{z}(t), \bar{z}(t+\tau))\right| \leq r$$

を満たすと仮定する．更に，次の条件を満たす正定数δ，非負の定数κとλ，同じ周期$\omega_1,\ldots,\omega_m$を持つ準周期的な正方行列 $A(t)$ が存在すると仮定する．

1. 線形系$\frac{dz}{dt} = A(t)x$ は，一般化された exponential dichotomy を満たす．
2. $D_\delta = \{z : |z-\bar{z}(t)| \leq \delta, \forall t \in R\} \subset D$.
3. $|\Phi(t,z(t),z(t+\tau)) - A(t)| \leq \frac{\kappa}{M}$，$|\Psi(t,z(t),z(t+\tau))| \leq \lambda$が，任意の $(t,x,y) \in R \times D_\delta \times D_\delta$に対して成立する．
4. 不等式$\kappa + M\lambda < 1$ と $\frac{Mr}{1-\kappa-M\lambda} \leq \delta$が成り立つ．

ここで，$\Phi(t,z,w)$ と$\Psi(t,z,w)$ のは，それぞれ z, w に関する関数 $X(t,z,w)$ のヤコビアン行列で，M は定義 2 の条件 3 に現われる定数である．そのとき与えられた系 (3.6) は，任意の $t \in R$ に対して D_δ内に位置する同じ周期$\omega_1,\ldots,\omega_m$を持つ一意的な準周期解を持つ．さらに，全ての $t \in R$ に対して，次の関係を満たす:

$$|z(t) - \bar{z}(t)| \leq \frac{Mr}{(1-\kappa-M\lambda)}.$$

4 数値解法

次の Duffing 型非線形差分微分方程式を考える．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\mu\frac{dx(t)}{dt} + \nu_0^2 x(t) = \varepsilon x^3 + \sigma x(t+\tau) + a\cos\nu_1 t + b\cos\nu_2 t \tag{4.7}$$

(4.7) に対する，Galerkin 近似解として，

$$\begin{aligned} x &= x_m(t) \\ &= \alpha_{00} + \sum_{r=1}^{m}\sum_{|p|=r,(p,\nu)>0}(\alpha_p\cos(p,\nu)t + \beta_p\sin(p,\nu)t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

とおく．ここで，$p=(p_1,p_2), \nu=(\nu_1,\nu_2), p_1,p_2\in Z, (p,\nu)=p_1\nu_1+p_2\nu_2, |p|=|p_1|+|p_2|$ とする．また，$\sum_{|p|=r,(p,\nu)>0}$ は，条件 $|p|=r$ かつ $(p,\nu)>0$ を満たす整数の組 $p=(p_1,p_2)$ の全てについて，和をとることを表す．

このとき，未定係数 $\{\alpha_{00},\alpha_p,\beta_p : 1\le|p|\le m, (p,\nu)>0\}$ を次の手順で定める．

1. (4.8) を (4.7) に代入する．
2. 代入した両辺を，$\{1,\cos(p,\nu)t,\sin(p,\nu)t : 1\le|p|\le m,(p,\nu)>0\}$ の項に整理し，その係数を取り出す．
3. 未定係数 $\{\alpha_{00},\alpha_p,\beta_p : 1\le|p|\le m,(p,\nu)>0\}$ に関する非線形連立方程式を得る．
4. 得られた非線形連立方程式に対し，Newton-Raphson 法で未定係数の値を定める．

5 数値実験例

定数項を，$\mu=1/8, \nu=\sqrt{2}, \varepsilon=1/64, a=1/8, b=1/2, \nu_1=1, \nu_2=\sqrt{5}, \sigma=1/64, \tau=1/2$ として数値実験を行った．このとき，粗い手計算によって得られる近似解

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.000260713459 + 0.1177606996\cos\nu_1 t + 0.02945137459\sin\nu_1(t) \\ &\quad -0.1616632261\cos\nu_2 t + 0.02985984173\sin\nu_2 t \end{aligned}$$

を Newton-Raphson 法の初期値として用いる．最終的に，近似解 $x_4(t)$ を次のように得る:

$$\begin{aligned} x_4(t) &= -0.0000933 + 0.11741931\cos t \\ &\quad -0.0000532\cos 2t - 0.1607751\cos\sqrt{5}t \\ &\quad -0.0000105\cos 2\sqrt{5}t + 0.0000202\cos(-2+\sqrt{5})t \\ &\quad +0.00514645\cos(-1+\sqrt{5})t + 0.0000363\cos(1+\sqrt{5})t \\ &\quad +0.0000382\cos(-2+2\sqrt{5})t + 0.0294152\sin t \\ &\quad -0.0000129\sin 2t + 0.0306886\sin\sqrt{5}t \\ &\quad -0.0001386\sin(-2+\sqrt{5})t - 0.0012598\sin(-1+\sqrt{5})t \\ &\quad +0.0000191\sin(-2+2\sqrt{5})t - 0.00003\sin(-1+2\sqrt{5})t. \end{aligned}$$

ここで，定理 2 を用いて，誤差評価を与える．(4.7) を，$z=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に関する連立方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\nu^2 x(t) - 2\mu y(t) + \varepsilon x^3(t) + \delta x(t+\tau) + a\cos\nu_1 t + b\cos\nu_2 t \end{cases}$$

に書き換えると，右辺のヤコビアン行列$\Phi(t,z,w)$と$\Psi(t,z,w)$は，

$$\Phi(t,z,w)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2+3\varepsilon x^2 & -2\mu \end{pmatrix},\quad \Psi(t,z,w)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

となるので，定理2の仮定で選択する行列を$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & -2\mu \end{pmatrix}$とする．このとき，全ての$(t,z,w)\in R\times D_\delta\times D_\delta$に対して，

$$|\Phi(t,z,w)-A(t)|=3|\varepsilon||x|^2\leq 3|\varepsilon|(\Omega+\delta)^2$$

かつ，$|\Psi(t,z,w)|=|\sigma|$が成立する．ただし，$\Omega=\max\{|x_4(t)|:t\in R\}$とする．ここで，$r=2.07582\times 10^{-6},\Omega=0.146928$となり，$M=\frac{\nu+1}{\mu\sqrt{\nu^2-\mu^2}}\max\{1,\nu\}=19.974$を得る．定理2を用いて，以上より，2つの不等式

$$3|\varepsilon|(\Omega+\delta)^2\leq\frac{\kappa}{M}$$

$$Mr<(1-\kappa-M\lambda)\delta$$

を満たすように，$\kappa=0.38,\lambda=|\sigma|=1/64=0.015625,\delta=$を選択すると，定理2の仮定が全て満たされる．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{Mr}{1-\kappa-M\lambda} &= \frac{19.974112\times 2.07582\times 10^{-6}}{1-0.38-19.947112\times 0.015625}\\ &< 0.000134295<0.14\times 10^{-3}\end{aligned}$$

を得る．その結果，正確な準周期解$x(t)$と$\bar{x}_4(t)$の誤差評価を得る．

$$|x(t)-\bar{x}_4(t)|<0.14\times 10^{-3}.\quad (t\in R)$$

References

[1] A.M.Fink, "Almost periodic differential equations", Lecture Notes in Mathematics, vol.377, Springer-Verlag,1974.

[2] A.Kohda, "Mathematical Analysis of the Quasiperiodic Solutions to Nonlinear Differential Equation", 1995.

[3] W.A.Coppel, "Dicotomy in stability theory", Lecture Notes in Mathematics, vol.629, Springer-Verlag, 1978.

[4] M.Kurihara, "Quasiperiodic solutions of Quasiperiodic Differential Difference Equations", Reports of the Faculty of Engineerring Yamanashi Univ., vol.37, 1986.

[5] M.Urabe, "Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic System", Arch,Rational Mech,Anal, vol.20,1965.

[6] 細野健司, "関数微分方程式の準周期解の近似解法", 山梨大学大学院修士論文,1996.