数理解析研究所講究録
986 巻 1997 年 210-217

楕円母集団下での統計量分布高次漸近展開のための行列微分について

東京理科大学 工学研究科 井上 達紀 (Tatsuki Inoue)
東京理科大学 工学部 岩下 登志也 (Toshiya Iwashita)
橋口 博樹 (Hiroki Hashiguchi)
仁木 直人 (Naoto Niki)

1. はじめに — 統計学的背景 —

データ解析や理論統計において，統計量の分布関数を求めることは，重要かつ基本的な問題であり，多くの研究がされている．一般に多変量の場合，統計量の分布関数を厳密に表すことは困難であり，Edgeworth 型の漸近展開を用いてその近似を求めることが広く行われている．

確率ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ が楕円分布 $E_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda})$ に従う時，その密度関数は非負関数 g を用いて

$$f_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Lambda}}(\boldsymbol{x}) = c_p \left|\boldsymbol{\Lambda}\right|^{-\frac{1}{2}} g\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right), \tag{1}$$

と表される．ここで c_p は p に依存する正の定数，$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$，$\boldsymbol{\Lambda}$ は $p \times p$ 正定値行列である．特性関数は適当な関数 Ψ を用いて

$$\psi(\boldsymbol{t}) \equiv E\left[\exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{x})\right] = \exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu})\Psi(\boldsymbol{t}'\Lambda\boldsymbol{t}), \tag{2}$$

と表現でき [3]，平均ベクトルと共分散行列が存在するならば，

$$E\left[\boldsymbol{x}\right] = \boldsymbol{\mu}, \tag{3}$$

$$\Sigma \equiv \mathrm{Cov}[\boldsymbol{x}] = c\Lambda. \tag{4}$$

ただし，$c = -2\frac{d}{dx}\Psi(x)\Big|_{x=0}$ であり，$i = \sqrt{-1}$ である [4]．

標本 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N \overset{i.i.d.}{\sim} E_p(\boldsymbol{0}, (1/c)\boldsymbol{I})$ の平均ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^p$ と共分散行列 $\boldsymbol{S}\,(p \times p)$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\boldsymbol{x}_r, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{N-1}\sum_{r=1}^{N}(\boldsymbol{x}_r - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_r - \bar{\boldsymbol{x}})'. \tag{6}$$

で表されるスカラ値関数 $h(\sqrt{N}\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{S})$ について次の定理が成り立つ．

定理 1 (Iwashita (1996) [5]) $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N \overset{i.i.d.}{\sim} E_p(\boldsymbol{0},(1/c)\boldsymbol{I})$，モーメントが 6 次まで存在すると仮定し，スカラ値関数 $h(\sqrt{N}\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{S})$ が$\sqrt{N}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}$ 近傍で *Taylor* 展開可能ならば，$h(\sqrt{N}\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{S})$ の期待値は

$$E\left[h(\sqrt{N}\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{S})\right]=\Xi h(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Gamma})\mid_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{I}}. \tag{7}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\Xi=&\exp\Bigl(\frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}\Bigr)\\
&\times\Biggl[1+\frac{1}{N}\Bigl[\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)+\kappa\Bigl\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)+\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^2+\frac{1}{8}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^2+(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})+\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\Bigr\}\Bigr]\\
&\quad+\frac{1}{N^2}\Bigl[\ \frac{4}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^3)+\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\}^2+\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\\
&\qquad+\beta\Bigl[\ \frac{4}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^3)+\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})+\frac{1}{6}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^3+\frac{1}{48}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^3\\
&\qquad\quad+2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}^2\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})+(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})+\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\\
&\qquad\quad+\frac{1}{4}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^2+\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})+\frac{1}{8}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\Bigr]\\
&\qquad+\kappa\Bigl[-\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})-\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^3+\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\}^2+\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^2\\
&\qquad\quad-\frac{1}{16}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^3-4(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}^2\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})-3(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\\
&\qquad\quad-\frac{3}{4}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^2-\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})-\frac{3}{8}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\\
&\qquad\quad+(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)+\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})+\frac{1}{8}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\Bigr]\\
&\qquad+\kappa^2\Bigl[\ \frac{1}{2}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\}^2+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^2+\frac{1}{8}\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^4+\frac{1}{128}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^4\\
&\qquad\quad+\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^2+\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})+\frac{3}{16}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^2\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^2\\
&\qquad\quad+(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)+\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})+\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^2\\
&\qquad\quad+\frac{1}{4}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\}^3+\frac{1}{8}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)\\
&\qquad\quad+\frac{1}{8}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\boldsymbol{\partial}\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})+\frac{1}{16}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}'\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}})^3\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})\Bigr]\Bigr]\\
&\quad+o(N^{-2})\Biggr],
\end{aligned} \tag{8}$$

$\kappa=\Psi''(0)/\{\Psi'(0)\}^2-1$, $\beta=\Psi^{(3)}(0)/\{\Psi'(0)\}^3-1$, $\boldsymbol{I}$ は $p\times p$ の単位行列であり，$\boldsymbol{z}=(z_1,\ldots,z_p),\Gamma=(\gamma_{ij})_{1\le i,j\le p}$ に対して，$\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}=(\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_p}),\boldsymbol{\partial}=\left(\frac{1}{2}(1+\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial\gamma_{ij}}\right)_{1\le i,j\le p}$ である．

例えば，楕円母集団下で興味ある統計量

$$T^2=N(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0), \tag{9}$$

のモーメント母関数 $\exp(tT^2)$ は $\bar{\boldsymbol{x}}$ と $\boldsymbol{S}$ で表されるスカラ値関数であり．定理 1 を $h(\sqrt{N}\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{S}) = \exp(tT^2)$ として適用し，

1. 平均に関する微分演算子 $\underset{\sim}{\boldsymbol{\partial}}$ を h に作用させ，その結果に $\boldsymbol{0}$ を代入．
2. 行列に関する微分演算子 $\boldsymbol{\partial}$ を 1. で求めた結果に作用させ，その結果に $\boldsymbol{I}$ を代入．

という過程を経て，$o(N^{-2})$ までの近似を得ることができる．

このような多変量分布における漸近展開の計算は，手計算で求められることがほとんどであり，数式処理システムの役割は，その手計算の結果を 2, 3 変量の場合に当てはめ，計算が正しいかどうかを確かめることにあった．実際，数式処理システムにおいて行列を処理するには，行列のサイズを決め，行列の各要素を記号的に与えなければならず，このため，次数が増えるにつれ時間・空間の面で計算が困難になる．本稿では，過程 2. を計算をする際に必要となる次元非依存計算をどのように処理するかを述べる．

2. 準備

ここでは，漸近計算に必要な行列に対する微分と微分行列に関する定義と定理についてまとめる．

定義 2 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{1\le i,j\le p}$，ただし x_{ij} は互いに独立な変数とする．スカラ値関数 $f(\boldsymbol{X})$ に対する微分行列を

$$\boldsymbol{\partial} f(\boldsymbol{X}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} f(\boldsymbol{X})\right)_{1\le i,j\le p},$$

と定義する．また，$\boldsymbol{X}$ が対称行列の場合，*Kronecker* の δ を用いて

$$\boldsymbol{\partial} f(\boldsymbol{X}) \equiv \left(\frac{1}{2}(1+\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial x_{ij}} f(\boldsymbol{X})\right)_{1\le i,j\le p},$$

と定義する．

定義 3 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{1\le i,j\le p}$，ただし x_{ij} は互いに独立な変数とする．スカラ値関数 $f(\boldsymbol{X})$ を要素とする行列 $\boldsymbol{Y} = (y_{kl})_{1\le k\le m,\ 1\le l\le n}$ に対する x_{ij} の微分を

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{Y} \equiv \left(\frac{\partial y_{kl}}{\partial x_{ij}}\right)_{1\le k\le m,\ 1\le l\le n},$$

と定義する．

定理 4 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{1\le i,\,j\le p}$ を各要素が独立で非特異な行列とする．このとき，

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{X}^{-1} = -\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{X}^{-1}.$$

ここで，$\boldsymbol{E}_{ij}$ は (i,j) 成分が 1 でそれ以外は 0 であるような行列 $(p\times p)$ である．また，$\boldsymbol{X}$ が対称行列の場合，

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{X}^{-1} = \begin{cases} -\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji})\boldsymbol{X}^{-1} & (i\ne j) \\ -\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{X}^{-1} & (i=j) \end{cases}.$$

定義 5 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$, ただし x_{ij} は互いに独立な変数とする. スカラ値関数 $f(\boldsymbol{X})$ を要素とする行列 $\boldsymbol{Y} : p \times p$ に対する微分行列を

$$\boldsymbol{\partial Y} \equiv \sum_{i}^{p}\sum_{j}^{p} \boldsymbol{E}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{Y},$$

と定義する. また, $\boldsymbol{X}$ が対称行列の場合,

$$\boldsymbol{\partial Y} \equiv \begin{cases} \displaystyle\sum_{i}^{p}\sum_{i}^{p} \boldsymbol{E}_{ii}\frac{\partial}{\partial x_{ii}}\boldsymbol{Y} & (i = j) \\ \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i}^{p}\sum_{j}^{p} \boldsymbol{E}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{Y} & (i \neq j) \end{cases},$$

と定義する. 特に, $\left.\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{Y}\right|_{i=j} = 2\frac{\partial}{\partial x_{ii}}\boldsymbol{Y}$ ならば,

$$\boldsymbol{\partial Y} \equiv \frac{1}{2}\sum_{i}^{p}\sum_{j}^{p} \boldsymbol{E}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{Y}.$$

3. 項書換え系 Mathematica 上での実装

多変量解析でよく使う行列は対称行列であり, その微分演算結果のほとんどは$\boldsymbol{E}_{ij}$, トレース $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$, 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ を用いて表現できる. 詳しくは [1] を参照. 本稿では $p \times p$ 対称行列を要素を用いて表現せず, 一つの記号として扱うことを試みる. すなわち, 行列の (i, j) 要素が計算に必要な場合, 記号 $\boldsymbol{A}$ に対して $[\boldsymbol{A}]_{ij}$ で (i, j) 要素を表し, 行列要素を明示することを避け,

1. 行列かスカラかを判定する述語,
2. 微分を作用させるための関数,
3. 行列に対する演算のための書き換え規則,

を導入し, 項書換えシステムである Mathematica 上にインプリメントする.

3.1. 変数の属性の判定について

行列変数集合, 行列値関数集合

```
In[1]:=
    MatrixV={A, B, C, Imatrix, Dmatrix};
    MatrixF={Dot, Inverse, Transpose};
```

を定義し, 記号がどの属性に入っているかを組み込み関数 MemberQ を用いて判定し, 行列かスカラかを判定する述語 OMatrixQ, OScalarQ を定義する.

```
In[2]:=
    OMatrixQ[x_]:=MemberQ[MatrixV,x] /; AtomQ[x];
    OMatrixQ[x_]:=MemberQ[MatrixF,Head[x]] /; !AtomQ[x];
    OScalarQ[x_]:=!OMatrixQ[x];
```

この述語を用いて，行列に関する書き換え則を適用する際の条件とする．同様に，対称行列・定数行列といった属性も変数に付加できる．例えば，転置に関して，対称行列記号集合 SymmtxV を定義し MemberQ[SymmtxV,x] を条件とすればよい．

```
In[3]:=
    Transpose[x_]:=x /; MemberQ[SymmtxV,x];
    Transpose[Inverse[x_]]:=Inverse[x] /; MemberQ[SymmtxV,x];
```

3.2. 微分演算について

$\boldsymbol{\partial}$ は定数行列変数 Dmatrix で表す．例えば，

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{A}^{-1}\right)\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{B}^{-1}\right)|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{A}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\right)\right\}, \tag{10}$$

は Mathematica 上で

```
In[4]:=
    tr[Dmatrix . Inverse[A]] * tr[Dmatrix . Inverse[B]] *
     Sqrt[Det[B] ] / Sqrt[Det[A]] * Exp[tr[Inverse[A] . C]]
```

と表現される．ここで，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-2t\boldsymbol{B}$ は $x_{ij}\neq t$ を要素とする非特異な対称行列，$\boldsymbol{C}$ は定数行列と定義されているものとする．(10) 式中の $\boldsymbol{\partial}$ を

$$\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\boldsymbol{E}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{A}^{-1}\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{B}^{-1}\right)|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{A}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\right)\right\}\right),$$

と展開するための関数 Parse を用意し，項書換え則 Table 1. を適用する．与えられる式中の $\boldsymbol{\partial}$ は有限個であり，関数 Parse を有限回適用することによって消去できる．

3.3. 行列に対する簡約・標準化について

書き換え則は，演算子を消す方向に作用する簡約規則と表現を標準形に還元する規則を用意する．基本的に Mathematica に従い，計算の優先順位が高い演算子は，順位の低い演算子を引数としないように項書き換えを行なう．例えば，二項演算子の優先順位は，低い順から和 (Plus 演算子)・積 (Times 演算子)・行列積 (Dot 演算子) であり，Times は可換則を満たすが，Dot は非可換演算である．行列値同士を Times 演算子で結合しないように注意しつつ，

Plus[Times[スカラ値 1, スカラ値 2, ... , Dot[行列値 , ...]] , ...]

のように表現する．また，行列の積のトレース $\mathrm{tr}(\boldsymbol{ABC})$ は $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ の回転に関して不変

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{ABC})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BCA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{CAB})$$

であるので辞書式順序で最小の表現を標準形とする．

Table 1.　行列に関する項書換え則

ここでは $p\times p$ 行列のみ扱い，$\boldsymbol{Y}$ は任意の行列，$\boldsymbol{X}$ は $\boldsymbol{E}_{ij}$ を除く任意の行列，$\boldsymbol{W}$ は非特異な行列，$\boldsymbol{V}$ は対称行列，$\boldsymbol{U}$ は非特異な対称行列，$\boldsymbol{C}$ は定数行列，$\boldsymbol{A}$ は x_{ij} を要素とする非特異な対称行列，$\boldsymbol{I}$ は単位行列，$\boldsymbol{O}$ は零行列，c は添字記号を除くスカラ値記号または，スカラ値，i,j,k,l は添字記号を表す．また，$\xrightarrow{*}$ は標準形へ変換する規則である．

$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2)$	$\xrightarrow{*}$	$\frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial x_{ij}}+\frac{\partial \boldsymbol{Y}_2}{\partial x_{ij}}$	$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_2)$	$\xrightarrow{*}$	$\frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{Y}_2+\boldsymbol{Y}_1\frac{\partial \boldsymbol{Y}_2}{\partial x_{ij}}$
$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\operatorname{tr}(\boldsymbol{Y})$	$\xrightarrow{*}$	$\operatorname{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial x_{ij}}\right)$	$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	$\rightarrow$	$\lvert\boldsymbol{A}\rvert\left[\boldsymbol{A}^{-1}\right]_{ij}+\lvert\boldsymbol{A}\rvert\left[\boldsymbol{A}^{-1}\right]_{ji}$
$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{A}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}$	$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{A}^{-1}$	$\rightarrow$	$-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}_{ji}\boldsymbol{A}^{-1}$
$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\boldsymbol{C}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{O}$			
$\sum_i(c\boldsymbol{Y})$	$\xrightarrow{*}$	$c\sum_i\boldsymbol{Y}$	$\sum_i(\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2)$	$\xrightarrow{*}$	$\sum_i\boldsymbol{Y}_1+\sum_i\boldsymbol{Y}_2$
$\sum_i(\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_{ij})$	$\xrightarrow{*}$	$\boldsymbol{X}\sum_i\boldsymbol{E}_{ij}$	$\sum_i(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{X})$	$\xrightarrow{*}$	$(\sum_i\boldsymbol{E}_{ij})\boldsymbol{X}$
$\sum_i\boldsymbol{O}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{O}$	$\sum_i^p[\boldsymbol{X}]_{ii}$	$\rightarrow$	$\operatorname{tr}(\boldsymbol{X})$
$\sum_i^p\boldsymbol{E}_{ii}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{I}$	$\sum_i^p\sum_j^p\boldsymbol{E}_{ij}[\boldsymbol{X}]_{ij}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{X}$
$\operatorname{tr}(c\boldsymbol{Y})$	$\xrightarrow{*}$	$c\operatorname{tr}(\boldsymbol{Y})$	$\operatorname{tr}(\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2)$	$\xrightarrow{*}$	$\operatorname{tr}(\boldsymbol{Y}_1)+\operatorname{tr}(\boldsymbol{Y}_2)$
$\operatorname{tr}(\boldsymbol{I})$	$\rightarrow$	p	$\operatorname{tr}(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{X}_2)$	$\rightarrow$	$[\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1]_{ji}$
$\lvert c\boldsymbol{Y}\rvert$	$\xrightarrow{*}$	$c^p\lvert\boldsymbol{Y}\rvert$	$\lvert\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_2\rvert$	$\xrightarrow{*}$	$\lvert\boldsymbol{Y}_1\rvert\lvert\boldsymbol{Y}_2\rvert$
$(\boldsymbol{W}^{-1})^{-1}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{W}$	$(\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{W}_2)^{-1}$	$\xrightarrow{*}$	$\boldsymbol{W}_2{}^{-1}\boldsymbol{W}_1{}^{-1}$
$(\boldsymbol{Y}')'$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{Y}$	$(\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_2)'$	$\xrightarrow{*}$	$\boldsymbol{Y}_2{}'\boldsymbol{Y}_1{}'$
$\boldsymbol{V}'$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{U}^{-1\prime}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{U}^{-1}$
$[\boldsymbol{V}]_{ji}$	$\rightarrow$	$[\boldsymbol{V}]_{ij}$	$\boldsymbol{I}\boldsymbol{Y},\quad \boldsymbol{Y}\boldsymbol{I}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{Y}$
$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{E}_{kl}$	$\rightarrow$	$[\boldsymbol{Y}]_{jk}\boldsymbol{E}_{il}$	$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{Y},\ 0\boldsymbol{Y}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{O}$
$(c_1\boldsymbol{Y}_1)(c_2\boldsymbol{Y}_2)$	$\xrightarrow{*}$	$c_1c_2(\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_2)$	$\boldsymbol{Y}_1(\boldsymbol{Y}_2+\boldsymbol{Y}_3)\boldsymbol{Y}_4$	$\xrightarrow{*}$	$\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_4+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_3\boldsymbol{Y}_4$

3.4. 計算出力例

以下は，式 (10) を `Timing` 関数で評価した結果である．Mathematica のバージョン，使用機種，使用 OS は，`Mathematica 2.2 for SPARC`，`Hyper SPARC 100MHz`，`SunOS4.1.4` である．

```
Out[4]=
    { 3.78333 Second,
            -1
      tr[C A  ]                    -1  -1      -1  -1        -1  -1 2
    (E            Sqrt[|B|] (2 tr[A   A  ] tr[A   B  ] + tr[A   B  ]  +
            -1  -1        -1  -1  -1
      2 tr[A   B  ] tr[C A   A   A  ] +
            -1  -1        -1  -1  -1
      4 tr[A   A  ] tr[C A   B   A  ] -
            -1  -1        -1  -1  -1
      2 tr[A   B  ] tr[C A   B   A  ] +
              -1  -1  -1        -1  -1  -1
      4 tr[C A   A   A  ] tr[C A   B   A  ] +
            -1  -1  -1  -1          -1  -1  -1  -1
      8 tr[A   A   A   B  ] + 2 tr[A   B   A   B  ] +
              -1  -1  -1  -1  -1            -1  -1  -1  -1  -1
      4 tr[C A   A   A   B   A  ] + 4 tr[C A   A   B   A   A  ] +
              -1  -1  -1  -1  -1            -1  -1  -1  -1  -1
      4 tr[C A   B   A   A   A  ] + 4 tr[C A   B   A   B   A  ] +
            -1  -1  -1      -1        -1  -1      -1 2
      4 tr[A   A   B  ] tr[A  ] + tr[A   B  ] tr[A  ]  +
              -1  -1  -1      -1 2         -1  -1  -1      -1
      2 tr[C A   B   A  ] tr[A  ]  + 4 tr[A   B   B  ] tr[B  ] +
            -1  -1      -1 2       -1  -1      -1 2
      2 tr[A   A  ] tr[B  ]  - tr[A   B  ] tr[B  ]  +
              -1  -1  -1      -1 2       -1 2     -1 2
      2 tr[C A   A   A  ] tr[B  ]  + tr[A  ]  tr[B  ]  )) / (4 Sqrt[|A|])
    }
```

参 考 文 献

[1] Fang K.T. and Zhang Y.T.(1990) *Generalized Multivariate Analysis.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[2] James, A.T.(1961). Zonal polynomials of the real positive symmetric matrices. *Ann. Math.* **74**, 456–469.

[3] Kelker, D.(1970). Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization. *Sankhyà* **A 32**, 179–195.

[4] Muirhead, R.J.(1982). *Aspects of Multivatiate Statistical Theory.* Wiley, New York.

[5] Iwashita, T. (submitted). An asymptotic expansion formula and an asymptotic distribution of statistic under elliptical populations