数理解析研究所講究録
986 巻 1997 年 218-223

線形要素を用いた境界要素法における解析的積分

工学院大学 一般教育部 北原 清志 (Kiyoshi Kitahara)

Abstract. The essence of the boundary element method is the transformation of the governing differential equations into equivalent sets of integral equations. It is sufficient for the solution of the problem to discretize only the boundary rather than the whole domain. So the boundary element method is ideally suited for structural shape optimization. This report presents analytical integrations in the boundary element method employing linear elements for bidimentional elasticity problems. Analytic integrations provide a convenient means of computing accurate stress and deflection information when they are compared with numerical integrations.

1. はじめに

境界要素法は数値計算により弾性体の応力解析を行う代表的な一方法である。特に形状変化を伴う応力解析に対しては，境界の形状のみを用いて計算を行うので，有限要素法や差分法などと比べて有利である。しかしながら境界要素法では，境界積分方程式を解かねばならないので，積分計算が必要になる。従来の方法では積分計算は数値積分によって行なっていた。数値積分は汎用性に富むが，特異性のある積分では誤差が大きくなり易く，通常の積分でも計算速度が遅くなる可能性がある。そこで積分の部分をあらかじめ解析的に行っておけば，汎用性は犠牲になるが，計算誤差と計算速度の問題を共に克服できることが期待される。解析的積分を実行するにあたっては，初等的だが膨大な量の積分を行い，かつ，結果を十分使いやすい形に整理する必要があるので，コンピューターによる数式処理を行うことが必須であると考えられる。

本報告では，応力解析および形状最適化問題への応用を目的として，2次元静弾性問題に対する境界要素法を考察する。1次アイソパラメトリック要素を用いた場合の解析的積分を計算し，ある程度整理された結果を報告する。

2. 基礎方程式の離散化

2次元静弾性問題における Somigliana の公式（Green の公式）は，弾性体の占める領域を Ω ，その境界を Γ とすると次式で与えられる。

$$u_j(y) = \int_\Gamma u^*_{ij}(x,y)t_i(x)\,d\Gamma(x) - \int_\Gamma t^*_{ij}(x,y)u_i(x)\,d\Gamma(x) + \int_\Omega u^*_{ij}(x,y)b_i(x)\,d\Omega(x)$$

ただし添字は総和規約に従うものとし，その範囲は $1,2$ である。ここで $y \in \Omega$ であり，u_i は変位，t_i は表面力，b_i は領域内の物体力，さらに u^*_{ij}, t^*_{ij} は弾性方程式の基本解（Kelvin

の解）であり次式で与えられる。

$$u^*_{ij}(x,y) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}\left\{(3-4\nu)\delta_{ij}\ln(\frac{1}{r}) + r_{,i}\, r_{,j}\right\}$$
$$t^*_{ij}(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\{(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}\, r_{,j}\} + (1-2\nu)(r_{,i}\, n_j - r_{,j}\, n_i)\right]$$

G はせん断弾性係数，ν は Poisson 比で共に正の定数，r は点 x, y 間の距離，n_i は点 x の外向き単位法線ベクトル，$r_{,i} = \partial r/\partial x_i$ である。

ソース点 y を境界上に移行すれば，境界上の変位と表面力を関係づける次の境界積分方程式が得られる。

$$c_{ij}(y)u_i(y) + \mathrm{p.v.}\int_\Gamma t^*_{ij}(x,y)u_i(x)\,d\Gamma(x) = \int_\Gamma u^*_{ij}(x,y)t_i(x)\,d\Gamma(x) + \int_\Omega u^*_{ij}(x,y)b_i(x)\,d\Omega(x)$$

$c_{ij}(y)$ は、ソース点が境界の滑らかな部分に置かれているときは$\frac{1}{2}\delta_{ij}$ となり，境界のかど点上に置かれているときは，かどがなす角度とその向きによって決まる定数となる。また，p.v.$\int$ は Cauchy の主値積分である。

今回は物体力 $b_i(x) \equiv 0$ の場合を報告する。境界 Γ を N 個の線形境界要素（線分）Γ_k で近似し，各境界要素上の変位と表面力を 1 次関数で近似することによって，境界積分方程式は次のように離散化される。

$$c^l u^l + \sum_{k=1}^{N} h^{lk}u^k = \sum_{k=1}^{N} g^{lk}t^k \qquad (l = 1, 2, \cdots, N)$$

ここで，l, k を固定するごとに $c^l = [c^l_{ij}]$, $h^{lk} = [h^{lk}_{ij}]$ は 2 次正方行列，$g^{lk} = [g2^{l,k-1}_{ij},\ g1^{lk}_{ij}]$ は (2,4) 行列であり，$u^k = {}^t[u^k_1,\ u^k_2]$ は境界要素 Γ_k の始点における変位，$t^k = {}^t[t2^{k-1}_1,\ t2^{k-1}_2,\ t1^k_1,\ t1^k_2]$ は始めの 2 成分が境界要素 Γ_{k-1} の終点における表面力，あとの 2 成分が境界要素 Γ_k の始点における表面力である。一般に $t2^{k-1}_i \neq t1^k_i$ であるが，表面力が連続かつ滑らかな境界点では $t2^{k-1}_i = t1^k_i \quad (i = 1, 2)$ が成り立っている。

弾性定数に関係した定数を次のように定める。

$$C_h = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)}, \quad C_g = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}$$

境界点がかど点で，かどのなす角が α であり（$\alpha = \pi$ のとき，かど点は実は滑らかな点である），このかど点が境界要素 Γ_{l-1} の終点でありかつ Γ_l の始点であるとすれば c^l は次のように計算される。ただし $s^k = {}^t[s^k_1,\ s^k_2]$ $(k = l-1, l)$ はΓ_k の方向ベクトルである。

$$c^l_{11} = \frac{\alpha}{2\pi} + C_h(s^l_1 s^l_2 - s^{l-1}_1 s^{l-1}_2), \quad c^l_{12} = c^l_{21} = C_h\left((s^l_2)^2 - (s^{l-1}_2)^2\right),$$
$$c^l_{22} = \frac{\alpha}{2\pi} - C_h(s^l_1 s^l_2 - s^{l-1}_1 s^{l-1}_2)$$

3. 計算結果

境界要素 Γ_k に関して次のように記述する：

$$x^k = {}^t[x_1^k, x_2^k]\text{: 始点の位置ベクトル},$$
$$\rho_k = |x^{k+1} - x^k|\text{：}\Gamma_k\text{ の長さ},$$
$$s^k = {}^t[s_1^k,\ s_2^k] = (x^{k+1} - x^k)/\rho_k\text{：始点から終点へ向かう単位ベクトル}$$

以下では境界要素 Γ_l 上の節点 x^l を固定して考える。

$$\begin{aligned}
&z^{lk} = x^k - x^l, \quad R^{lk} = |z^{lk}|,\\
&a^{lk} = z^{lk} \cdot s^k = z_1^{lk} s_1^k + z_2^{lk} s_2^k,\\
&b^{lk} = a^{lk} + \rho_k, \quad c^{lk} = z_1^{lk} s_2^k - z_2^{lk} s_1^k
\end{aligned}$$

以上の式および以下の式において，境界要素の番号付けを表す添数に関しては，次の例で示す規則に従うものとする。

$$\Gamma_0 = \Gamma_N, \quad \Gamma_{-1} = \Gamma_{N-1}, \quad \Gamma_{N+1} = \Gamma_1$$

境界上の変位 u に対する係数行列 h は次式で与えられる。ただし $k \neq l-1, l, l+1$ である。

$$\begin{aligned}
&h_{11}^{ll} = h_{22}^{ll} = 0, \quad h_{12}^{ll} = -h_{21}^{ll} = (1-2\nu) C_h \ln\left(\frac{\rho_l}{\rho_{l-1}}\right).\\
&h_{11}^{l,l-1} = C_h c^{l,l-2}((1-2\nu) H_{2111}^{l,l-2} + 2H_{2112}^{l,l-2}),\\
&h_{12}^{l,l-1} = C_h((1-2\nu)(H_{2212}^{l,l-2} - 1) + 2c^{l,l-2} H_{2211}^{l,l-2}),\\
&h_{21}^{l,l-1} = C_h(-(1-2\nu)(H_{2212}^{l,l-2} - 1) + 2c^{l,l-2} H_{2211}^{l,l-2}),\\
&h_{22}^{l,l-1} = C_h c^{l,l-2}((1-2\nu) H_{2111}^{l,l-2} + 2H_{2222}^{l,l-2}).\\
&h_{11}^{l,l+1} = C_h c^{l,l+1}((1-2\nu) H_{1111}^{l,l+1} + 2H_{1112}^{l,l+1}),\\
&h_{12}^{l,l+1} = C_h((1-2\nu)(H_{1212}^{l,l+1} + 1) + 2c^{l,l+1} H_{1211}^{l,l+1}),\\
&h_{21}^{l,l+1} = C_h(-(1-2\nu)(H_{1212}^{l,l+1} + 1) + 2c^{l,l+1} H_{1211}^{l,l+1}),\\
&h_{22}^{l,l+1} = C_h c^{l,l+1}((1-2\nu) H_{1111}^{l,l+1} + 2H_{1222}^{l,l+1}).\\
&h_{11}^{lk} = C_h\left((1-2\nu)(c^{l,k-1} H_{2111}^{l,k-1} + c^{lk} H_{1111}^{lk}) + 2(c^{l,k-1} H_{2112}^{l,k-1} + c^{lk} H_{1112}^{lk})\right),\\
&h_{12}^{lk} = C_h\left((1-2\nu)(H_{2212}^{l,k-1} + H_{1212}^{lk}) + 2(c^{l,k-1} H_{2211}^{l,k-1} + c^{lk} H_{1211}^{lk})\right),\\
&h_{21}^{lk} = C_h\left(-(1-2\nu)(H_{2212}^{l,k-1} + H_{1212}^{lk}) + 2(c^{l,k-1} H_{2211}^{l,k-1} + c^{lk} H_{1211}^{lk})\right),\\
&h_{22}^{lk} = C_h\left((1-2\nu)(c^{l,k-1} H_{2111}^{l,k-1} + c^{lk} H_{1111}^{lk}) + 2(c^{l,k-1} H_{2222}^{l,k-1} + c^{lk} H_{1222}^{lk})\right).
\end{aligned}$$

表面力 t に対する係数行列 g は次式で与えられる。

$$g2_{11}^{l,k-1} = C_g\left((3-4\nu) G_{2111}^{l,k-1} + G_{2112}^{l,k-1}\right), \quad g2_{12}^{l,k-1} = C_g G_{221}^{l,k-1}$$

$$g2_{21}^{l,k-1} = g2_{12}^{l,k-1}, \quad g2_{22}^{l,k-1} = C_g\left((3-4\nu)G_{2111}^{l,k-1} + G_{2222}^{l,k-1}\right)$$
$$g1_{11}^{lk} = C_g\left((3-4\nu)G_{1111}^{lk} + G_{1112}^{lk}\right), \quad g1_{12}^{lk} = C_g G_{121}^{lk}$$
$$g1_{21}^{lk} = g1_{12}^{lk}, \quad g1_{22}^{lk} = C_g\left((3-4\nu)G_{1111}^{lk} + G_{1222}^{lk}\right)$$

積分によって得られる２つの関数を次のようにまとめておく。

$$\mathrm{LN21R}^{lk} = \frac{1}{\rho_k}\ln\left(\frac{R^{l,k+1}}{R^{lk}}\right), \quad \mathrm{ATANCR}^{lk} = \frac{1}{\rho_k|c^{lk}|}\left(\arctan(\frac{|c^{lk}|}{a^{lk}}) - \arctan(\frac{|c^{lk}|}{b^{lk}})\right)$$

以下では記述の繁雑さを避けるため，次のように添数を省略する。

$$\rho_k = \rho, \quad s_i^k = s_i \quad z_i^{lk} = z_i, \quad R^{lk} = R_1, \quad R^{l,k+1} = R_2, \quad a^{lk} = a, \quad b^{lk} = b, \quad c^{lk} = c,$$
$$\mathrm{LN21R}^{lk} = \mathrm{LN21R}, \quad \mathrm{ATANCR}^{lk} = \mathrm{ATANCR}$$

H_{ijmn}^{lk} は次のように表される。ただし，$k \neq l, l-1$ である。

$$H_{1111}^{lk} = b\,\mathrm{ATANCR} - \mathrm{LN21R}$$
$$H_{1112}^{lk} = \left(\frac{b}{2} - c\,s_1 s_2\right)\mathrm{ATANCR} - {s_1}^2\,\mathrm{LN21R} + \frac{(z_1 s_1 - z_2 s_2)}{2\,{R_1}^2}$$
$$H_{1211}^{lk} = -\frac{c}{2}\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right)\mathrm{ATANCR} - s_1 s_2 \mathrm{LN21R} + \frac{(z_1 s_2 + z_2 s_1)}{2\,{R_1}^2}$$
$$H_{1212}^{lk} = c^2\,\mathrm{ATANCR} + b\,\mathrm{LN21R} - 1$$
$$H_{1222}^{lk} = \left(\frac{b}{2} + c\,s_1 s_2\right)\mathrm{ATANCR} - {s_2}^2\,\mathrm{LN21R} - \frac{(z_1 s_1 - z_2 s_2)}{2\,{R_1}^2}$$
$$H_{2111}^{lk} = -a\,\mathrm{ATANCR} + \mathrm{LN21R}$$
$$H_{2112}^{lk} = -\left(\frac{a}{2} - c\,s_1 s_2\right)\mathrm{ATANCR} + {s_1}^2\,\mathrm{LN21R} + \frac{\left(b\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) - 2\,c\,s_1 s_2\right)}{2\,{R_2}^2}$$
$$H_{2211}^{lk} = \frac{c}{2}\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right)\mathrm{ATANCR} + s_1 s_2 \mathrm{LN21R} - \frac{\left(2\,b\,s_1 s_2 + c\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right)\right)}{2\,{R_2}^2}$$
$$H_{2212}^{lk} = -c^2\,\mathrm{ATANCR} - a\,\mathrm{LN21R} + 1$$
$$H_{2222}^{lk} = -\left(\frac{a}{2} + c\,s_1 s_2\right)\mathrm{ATANCR} + {s_2}^2\,\mathrm{LN21R} - \frac{\left(b\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) - 2\,c\,s_1 s_2\right)}{2\,{R_2}^2}$$

G_{ijmn}^{lk} は次のように表される。ただし，$k \neq l, l-1$ である。

$$G_{1111}^{lk} = \frac{\rho}{4}\left(3 - \ln\left({R_2}^2\right)\right) + \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\left(a\,(b+\rho) - c^2\right)\mathrm{LN21R} - b\,c^2\,\mathrm{ATANCR}$$
$$G_{1112}^{lk} = c^2\left(b\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) + 2\,c\,s_1 s_2\right)\mathrm{ATANCR} + \frac{\rho}{2}{s_1}^2 - 2\,c\,s_1 s_2$$
$$+c\left(2\,b\,s_1 s_2 - c\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right)\right)\mathrm{LN21R}$$
$$G_{121}^{lk} = c^2\left(c\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) - 2\,b\,s_1 s_2\right)\mathrm{ATANCR} + \frac{\rho}{2}s_1 s_2 - c\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right)$$
$$+c\left(b\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) + 2\,c\,s_1 s_2\right)\mathrm{LN21R}$$

$$G^{lk}_{1222} = -c^2 \left(b\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) + 2\,c\,s_1 s_2\right)\mathrm{ATANCR} + \frac{\rho}{2}{s_2}^2 + 2\,c\,s_1 s_2$$
$$-c\left(2\,b\,s_1 s_2 - c\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right)\right)\mathrm{LN21R}$$
$$G^{lk}_{2111} = \frac{\rho}{4}\left(1 - \ln\left({R_2}^2\right)\right) - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left(a^2 - c^2\right)\mathrm{LN21R} + a\,c^2\,\mathrm{ATANCR}$$
$$G^{lk}_{2112} = -c^2 \left(a\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) + 2\,c\,s_1 s_2\right)\mathrm{ATANCR} + \frac{\rho}{2}{s_1}^2 + 2\,c\,s_1 s_2$$
$$+c\left(c\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) - 2\,a\,s_1 s_2\right)\mathrm{LN21R}$$
$$G^{lk}_{221} = c^2 \left(2\,a\,s_1 s_2 - c\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right)\right)\mathrm{ATANCR} + \frac{\rho}{2}s_1 s_2 + c\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right)$$
$$-c\left(a\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) + 2\,c\,s_1 s_2\right)\mathrm{LN21R}$$
$$G^{lk}_{2222} = c^2 \left(a\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) + 2\,c\,s_1 s_2\right)\mathrm{ATANCR} + \frac{\rho}{2}{s_2}^2 - 2\,c\,s_1 s_2$$
$$-c\left(c\left({s_2}^2 - {s_1}^2\right) - 2\,a\,s_1 s_2\right)\mathrm{LN21R}$$

$k = l$ のとき G^{lk}_{ijmn} は次のようになる。

$$G^{ll}_{1111} = \frac{\rho}{4}\left(3 - 2\ln\rho\right)), \quad G^{ll}_{1112} = \frac{\rho}{2}{s_1}^2, \quad G^{ll}_{121} = \frac{\rho}{2}s_1 s_2, \quad G^{ll}_{1222} = \frac{\rho}{2}{s_2}^2$$
$$G^{ll}_{2111} = \frac{\rho}{4}\left(1 - 2\ln\rho\right), \quad G^{ll}_{2112} = \frac{\rho}{2}{s_1}^2, \quad G^{ll}_{221} = \frac{\rho}{2}s_1 s_2, \quad G^{ll}_{2222} = \frac{\rho}{2}{s_2}^2$$

$k = l - 1$ のとき G^{lk}_{ijmn} は次のようになる。

$$G^{l,l-1}_{1111} = \frac{\rho}{4}\left(1 - 2\ln\rho\right)), \quad G^{l,l-1}_{1112} = \frac{\rho}{2}{s_1}^2, \quad G^{l,l-1}_{121} = \frac{\rho}{2}s_1 s_2, \quad G^{l,l-1}_{1222} = \frac{\rho}{2}{s_2}^2$$
$$G^{l,l-1}_{2111} = \frac{\rho}{4}\left(3 - 2\ln\rho\right)), \quad G^{l,l-1}_{2112} = \frac{\rho}{2}{s_1}^2, \quad G^{l,l-1}_{221} = \frac{\rho}{2}s_1 s_2, \quad G^{l,l-1}_{2222} = \frac{\rho}{2}{s_2}^2$$

4. おわりに

2次元静弾性問題に関して，線形要素を用いた場合の境界積分を解析的に実行し，一連の公式を得た。今後の課題としては，次の諸点を中心に検討を進めてゆく予定である。1. 数値積分による方法と解析的な公式を使う方法との効率の比較を，特に計算精度の面に注目しつつ行うこと。2. 熱応力解析のための積分公式を導出すること。3. 形状最適化問題へ応用できるように，更に公式の拡充を行うこと。

参考文献

[1] Espiga,F., Gracia,L. and Doblare,M. : Shape optimization of elastic homogeneous 2D bodies by the boundary element method, Computers & Structures, 33, pp. 1233-1241 (1989).

[2] Guiggiani,M. and Casalini,P. : Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements, Int. J. Num. Meth. Eng., 24, pp. 1711-1720 (1987).

[3] Kane,J.H. and Saigal,S. : Design sensitivity analysis of solids using BEM, ASCE J. Eng. Mech., 114, pp. 1703-1722 (1988).

[4] Sandgren,E. and Wu,S.J. : Shape optimization using the boundary element method with substructuring, Int. J. Num. Meth. Eng., 26, pp. 1913-1924 (1988).

[5] 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行：境界要素法, 培風館.