数理解析研究所講究録
990 巻 1997 年 224-234

A priori 誤差評価定数の計算機による数値評価について

中尾 充宏　　山本 野人
Mitsuhiro T. Nakao　　Nobito Yamamoto
九州大学大学院数理学研究科

1. はじめに

非線形偏微分方程式の解に対する数値的検証法では, 基礎となる単純な線形問題の Ritz-Galerkin 近似解（有限要素解）に対する構成的誤差評価が本質的役割を果たす. そのためには, a priori 誤差評価定数を数値として決定することが必要となるが, その決定を純粋に理論的に行なうのはしばしば困難を伴う. そのような場合に, 計算機を用いた固有値評価による数値評価法を補助的に用いる方法を提案する. 具体例としては, Stokes 方程式の a priori 誤差評価を行なうために必要な定数の算定に適用して, 数値例を挙げる.

2. 問題と解の検証条件

まず, 解の存在に関する数値的検証法の概要を述べることにしよう.

次の非線形変分問題を考える：

find $\exists u \in V \quad s.t.$

$$a(u,v) = (f(u),v), \quad \forall v \in V, \tag{1}$$

ここに,

V, H は $V \subset H$ なるヒルベルト空間で, $a(\cdot,\cdot)$ は $V \times V$ 上の連続な双 1 次形式. また, $f : V \longrightarrow H$ は有界連続な非線形写像で, $(\cdot,\cdot)$ は H 上の内積を意味する.

(1) は次のように V 上のコンパクト作用素 F の不動点形式に書けるとしよう ([1]).

$$u = Fu \tag{2}$$

このとき, Schauder の不動点定理から, ある空でない有界凸閉集合 $U \subset V$ があって,

$$FU \subset U \tag{3}$$

を満たせばUの中に不動点（解）が存在することがいえる. しかしながら, Fが一般に無限次元の逆作用素を含むため, 与えられた集合 U に対して計算機内で FU を直接計算することは困難である. そこで, Ritz-Galerkin 近似解とその誤差評価を用いて, (3) に代わる検証条件を導き出すことにする.

まず, $a(\cdot,\cdot)$ について次の仮定を追加しておく：

f の値域に属する任意の $g \in H$ に対して

$$a(\phi, v) = (g, v), \quad \forall v \in V \tag{4}$$

を満たす $\phi \in V$ が存在するものとし, 対応 $g \mapsto \phi$ を $\phi = Bg$ で表す. このとき上述のコンパクト作用素 F は $F(u) = Bf(u)$ と書ける. また B の値域に属する ϕ に対しては, $g = A\phi$ と書くことにする.

次に V_h を V のパラメータ h $(0 < h < 1)$ に依存する有限次元部分空間として, projection $P_h : V \longrightarrow V_h$ を

$$a(u - P_h u, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h \tag{5}$$

で定める. この projection は問題 (4) に対する近似解 $P_h\phi$ を与えるが, これは

$$a(P_h\phi, v_h) = (g, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \tag{6}$$

を満たすことを注意しておく.

さて, ϕ と $P_h\phi$ に対して, 次の誤差評価:

$$\|\phi - P_h\phi\|_V \quad \leq \quad C(h)\|g\|_H \tag{7}$$

が成り立つことを仮定しよう. ここで, $C(h)$ は $h \longrightarrow 0$ のとき $C(h) \longrightarrow 0$ となるような正定数である.

このとき一般に, 与えられた集合 $U \subset V$ に対し,

$$P_h(FU) : \text{計算可能（包み込み可能）}$$

であり, また, 誤差 : $(I - P_h)FU$ は次の形で評価される :

$$\|(I - P_h)FU\|_V \leq C(h)\|f(U)\|_H. \tag{8}$$

したがって, (3) の代わりに

$$\begin{cases} P_h(FU) & \subset \quad P_hU \\ C(h)\|f(U)\|_H & \leq \quad \|(I - P_h)U\|_V \end{cases} \tag{9}$$

を検証条件とすることができ, このとき集合 U の中に求める解（不動点）が存在する. 条件 (9) は U の形を適当に与えることにより計算機内でチェックできる（計算可能）ものである.

3. $C(h)$ の算定法

(7) を満たす $C(h)$ はいくつかの場合, 理論的考察により効率良く評価・決定されるが, 理論的な評価が困難, あるいは非効率的（値が大きすぎるなど）な場合もある. このようなときは, 以下に述べるような数値的方法を用いて, 理論的な評価を補うことを考える. なお本稿では $P_h\phi$ が A の定義域に含まれる場合について述べることにする. そうでない場合に関しては, 参考文献 [5], [6] を参照されたい.

前提として, 理論的な評価法によって

$$\|\phi - P_h\phi\|_V \quad \leq \quad C_1(h)\|A\phi - AP_h\phi\|_H \tag{10}$$

を満たす $C_1(h)$ が算定可能であることを仮定しておく. これは $A\phi(=g)$ で直接評価するのに比べてたやすいことが多いが, 後述の適用例のように, これに対しても数値的手法を援用しなくてはならないこともある. 上式の右辺を $\|g\|_H$ で評価する問題は, 以下に述べるように有限次元の固有値問題となるために, 数値的取り扱いが可能となる.

まず, H から V_h への projection P_0 を

$$(P_0 g, v_h) = (g, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \tag{11}$$

で定めておく. P_0 については, その定義より, 各 $g \in H$ に対して以下をみたすθ が存在する:

$$\|P_0 g\|_H \leq \|g\|_H \sin\theta, \tag{12}$$

$$\|g - P_0 g\|_H \leq \|g\|_H \cos\theta. \tag{13}$$

また, $P_h\phi$ の定義 (6) から, V_h 上の線形作用素 B_h が存在して,

$$P_h\phi = B_h P_0 g. \tag{14}$$

以上のことから,

$$\begin{aligned}\|A\phi - AP_h\phi\|_H &\leq \|g - P_0 g\|_H + \|P_0 g - AP_h\phi\|_H \\ &\leq \|g\|_H \cos\theta + \|(I - AB_h)P_0 g\|_H \\ &\leq \|g\|_H \cos\theta + \Lambda\|g\|_H \sin\theta \\ &\leq \sqrt{1+\Lambda^2}\|g\|_H,\end{aligned}$$

すなわち

$$C(h) = C_1(h)\sqrt{1+\Lambda^2} \tag{15}$$

を得る. ただし Λ は, 次を満たす正の定数である:

$$\Lambda^2 = \sup_{g \in H} \frac{\|(I - AB_h)P_0 g\|_H^2}{\|P_0 g\|_H^2} \tag{16}$$

ここで

$$\begin{aligned}(AB_h P_0 g, P_0 g) &= a(P_h\phi, P_0 g) \\ &= \|P_0 g\|_H^2\end{aligned}$$

を用いれば, 結局

$$1 + \Lambda^2 = \sup_{v_h \in V_h} \frac{\|AB_h v_h\|_H^2}{\|v_h\|_H^2} \tag{17}$$

と取ればよいことがわかる. これは次の形の有限次元固有値問題（最大固有値）に帰着される.

$$\sup_{\mathbf{x} \in R^n} \frac{\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T L \mathbf{x}} \tag{18}$$

ここに, 一般に Q は対称, L は正定値対称行列である.

4. 適用例：Stokes 方程式に対する有限要素解の誤差評価

4.1 Stokes 方程式と近似空間の設定

Ω を $\mathbf{R}^2$ 内の凸多角形領域として, 次の同次境界条件をもつ Stokes 方程式を考える:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f & \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{19}$$

ただし, $u(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y))^T$ および $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))^T \in [L^2(\Omega)]^2$ はそれぞれ $(x,y) \in \Omega$ における流体の流速, および外力を表す 2 次元ベクトル値関数である (T は転置記号). $p(x,y)$ は $(x,y) \in \Omega$ における流体への圧力を表すものとする. ν は流体の粘性係数であるが, 一般性を失うことなく $\nu = 1$ にとることができるので, 以後 $\nu = 1$ として考えることにする.

流速および圧力の関数空間をそれぞれ $H_0^1(\Omega)$, $L_0^2(\Omega)$ とする. ただし

$$L_0^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \int_\Omega v\,dxdy = 0\}$$

また $(\cdot,\cdot)$ を Ω 上の L^2-内積とし, $\|\cdot\|_0$ を L^2-norm, $|\cdot|_1$ を H_0^1-seminorm （すなわち $|v|_1 = \|\nabla v\|_0$ ）とする. このとき問題 (19) は, 次の weak formulation と同値である:

$$\text{find} \quad [u,p] \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega) \quad \text{such that}$$

$$\begin{cases} (\nabla u, \nabla v) - (p, \operatorname{div} v) = (f, v), & \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^2, \\ (q, \operatorname{div} u) = 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \tag{20}$$

よく知られているように, (20) は次の連続 inf-sup condition のもとで一意解をもつ.

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in [H_0^1(\Omega)]^2} \frac{(\operatorname{div} v, q)}{|v|_1 \|q\|_0} \geq \beta. \tag{21}$$

β は領域にのみ依存する正定数で, 特定の領域であれば評価可能な定数である (cf. [2, 5]).

ここでは [4] で提案されている内近似の手法により連続 inf-sup condition の定数を回避した構成的な誤差評価を与えることを考える.

いま, [4] に従って次のような関数空間 V を定義する.

$$V \equiv \{(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x})^T; \psi \in H_0^2(\Omega)\} \tag{22}$$

ただし,

$$H_0^2(\Omega) \equiv \{\psi \in H^2(\Omega);\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \text{ and } \left.\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$\dfrac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}}$ は, ψ の $\partial\Omega$ における法線方向微分とする.

このように V を構成すると, $V \subset [H_0^1(\Omega)]^2$ かつ V の任意の元 v について $\operatorname{div} v = 0$ (divergence-free) となる.

さらに V の有限次元部分空間 V_h を定義する. まず $H_0^2(\Omega)$ のある有限次元部分空間 $S_h(\subset H_0^2(\Omega)\cap C^2(\bar{\Omega}))$ を導入し, これを用いて V_h を次のように構成する.

$$V_h \equiv \{(\frac{\partial\psi_h}{\partial y}, -\frac{\partial\psi_h}{\partial x})^T; \psi_h \in S_h\} \tag{23}$$

V, V_h の構成方法および $S_h \subset H_0^2(\Omega)$ であることより, $V_h \subset V$ である. また V_h の任意の元 v_h について真に $\operatorname{div} v_h = 0$ である.

ここで (20) において, 解空間として $H_0^1(\Omega)$ の代わりに V を用いることにより, V の任意の元は divergence-free であることから, (20) は次の同値な問題に書き換えることができる:

$$\begin{aligned}&\text{find } u \in V \text{ such that}\\&(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \qquad \forall v \in V.\end{aligned} \tag{24}$$

これに対して V_h を用いた近似解の構成は次式による：

$$\begin{aligned}&\text{find } u_h \in V_h \text{ such that}\\&(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \qquad \forall v_h \in V_h.\end{aligned} \tag{25}$$

さらに (24), (25) より近似解 $u_h \in V_h$ は真の解 $u \in V$ の V_h への H_0^1-projection であることが分かる.

$$(\nabla(u - u_h), \nabla v_h) = 0, \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{26}$$

4.2 構成的 H^1 評価

前節で述べた内近似による近似解について, 構成的な誤差評価を与えることを考えるのだが, 本稿では数値的手法がどのように役立つかに焦点を当て, その他の部分は概略を述べるに留めることにしよう. 以下に記す定理・補題の証明の詳細については文献 [7] を見られたい。

(24) はそれ自体が線形方程式であるので, (4) に相当するものと考えてよい. **2** および **3** 節で述べたことから, これに対する構成的誤差評価は, Navie-Stokes 方程式の解の数値的検証法の基礎を与えるものとなる.

求めたい誤差評価の定数 $C(h)$ は, (19) の外力 $f \in [L^2(\Omega)]^2$ に依存しない正数であって, 次を満たす：

$$\|\nabla(u - u_h)\|_0 \;\; \leq \;\; C(h)\|f\|_0, \tag{27}$$

3 節の議論に従えば, $C(h)$ を算定するためには, まず以下の評価式の定数を決めなくてはならない：

$$\|\nabla(u - u_h)\|_0 \;\; \leq \;\; C_1(h)\|f + \Delta u_h\|_0 \tag{28}$$

ここで **3** 節の作用素 A に相当するものは $-\Delta$ であり, $-\Delta u \in [H^{-1}(\Omega)]^2$ については、

$$< -\Delta u, v > \;\; = \;\; (f, v) \qquad \forall v \in V \tag{29}$$

の意味で $-\Delta u = f$ とみなし得ること（ただし $<\cdot,\cdot>$ は $[H_0^1(\Omega)]^2$ の双対内積），および，S_h を C^2 級としたことから，$\Delta u_h \in [L^2(\Omega)]^2$ となることに注意したい．

理論的な考察により，定数 $C_1(h)$ としては，次の不等式を満たすものを取ればよいことがわかる：

$$\|\nabla(\phi - P_h\phi)\|_0 \le C_1(h)\|\Delta\phi\|_0 \qquad \forall\phi \in H_0^2(\Omega). \tag{30}$$

ここで P_h は $H_0^1(\Omega)$ から S_h への $H_0^1(\Omega)$-projection とする．すなわち，任意の $\phi \in H_0^1(\Omega)$ に対して $P_h\phi \in S_h$ は次式を満たすものとして定義する．

$$(\nabla(\phi - P_h\phi), \nabla\phi_h) = 0, \qquad \forall\phi_h \in S_h. \tag{31}$$

(30) を満たす定数を算定する問題は，現在まだ理論的には解けていない．そこで $C_1(h)$ の算定についても 3 節の議論を適用し，数値的手法を組み合わせて対処することになるが，これについては後で述べよう．

いったん $C_1(h)$ が求まれば，あとは

$$\|f + \Delta u_h\|_0 \le K_1\|f\|_0, \qquad \forall f \in [L^2(\Omega)]^2 \tag{32}$$

を満たす定数 K_1 を決定する．これは 3 節の $\sqrt{1+\Lambda^2}$ に相当するものである．この K_1 と $C_1(h)$ を用いて誤差評価に関する定理を述べておこう：

Theorem 1 (24) の弱解 u と，(25) を満たす流速の近似解 u_h に対し，次の a priori 誤差評価が成り立つ．

$$\|\nabla(u - u_h)\|_0 \;\; \le \;\; K_1 \cdot C_1(h)\|f\|_0. \tag{33}$$

4.3 K_1 の算定について

では，K_1 の具体的な評価方法について述べよう．$f = (f_1, f_2)^T \in [L^2(\Omega)]^2$ に対し，$P_0f = (P_0f_1, P_0f_2)^T \in V_h$ を成分ごとの L^2-projection として次のように定義する．

$$(P_0f, v_h) = (f, v_h), \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{34}$$

すると，次の補題が成り立つ．

Lemma 1 次式を満たすような f に依存しない定数 K_1 が算定可能であるとする．

$$\|\Delta u_h\|_0 \le K_1\|P_0f\|_0, \qquad \forall f \in [L^2(\Omega)]^2. \tag{35}$$

このとき次のことが成り立つ．

$$\|f + \Delta u_h\|_0 \le K_1\|f\|_0, \qquad \forall f \in [L^2(\Omega)]^2.$$

証明は 3 節の $1 + \Lambda^2$ に関する議論と同様である．

さて，(35) から K_1 を決定する方法を述べよう．以後簡単のために，領域 Ω を $(0,1) \times (0,1)$ の正方領域とする．正方領域 Ω は矩形要素に等分割し．x, y 軸方向の分割数をいず

れも N として, 分割幅の parameter h は $h=1/N$ とする. 今 $I=[0,1]$ および I を N 等分した分割に対し, I 上の cubic spline の空間 $S_h(I)$ を次で定義する:

$$S_h(I) \equiv \{s_h(x) \in C^2(I) : \text{cubic spline}\,; s_h(0)=s_h(1)=0, s_h'(0)=s_h'(1)=0\}. \qquad (36)$$

この $S_h(I)$ を用いて $H_0^2(\Omega)$ の有限要素部分空間 $S_h(\subset H_0^2(\Omega))$ を, 次のように cubic spline のテンソル積で定義する.

$$S_h \equiv S_h(I_x) \otimes S_h(I_y) \subset H_0^2(\Omega). \qquad (37)$$

ただし I_x, I_y は, それぞれ x, y 方向の区間 $[0,1]$ とする.

このようにして定めた有限要素空間 S_h の次元を n とし, S_h の基底を $\{\psi_j\}_{1\le j\le n}$ とおく. また, この基底を用いて次式で定義される $\{\phi_j\}_{1\le j\le n}$ は V_h の基底である.

$$\phi_j = (\frac{\partial \psi_j}{\partial y}, -\frac{\partial \psi_j}{\partial x})^T, \qquad 1 \le j \le n$$

このとき実係数 $\{a_j\}_{1\le j\le n}$によって, 流速の有限要素近似解 $u_h \in V_h$ は

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i.$$

と一意に表される. よって (25) は

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) = (f, \phi_j), \qquad 1 \le j \le n. \qquad (38)$$

を満たす $\{a_j\}$ を求めることと同値となる.

ここで (38) に対して, n 次元ベクトルを次のように定義する:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T,\\ \mathbf{f} &= ((f,\phi_1),(f,\phi_2),\ldots,(f,\phi_n))^T.\end{aligned}$$

また, $n\times n$ 行列を次のように定義する:

$$\begin{aligned}(L)_{ij} &= (\phi_i, \phi_j)_{n\times n},\\ (D)_{ij} &= (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)_{n\times n},\\ (E)_{ij} &= (\Delta\phi_i, \Delta\phi_j)_{n\times n},\end{aligned}$$

定義から明らかに, これらの行列は対称行列である. また $\{\phi_j\}_{1\le j\le n}$ が基底であることから, 行列 L, D は正定値で, 正則である.

以上の定義を用いることにより, (35) の各 L^2-norm $\|P_0 f\|_0, \|\Delta u_h\|_0$ を行列の 2 次形式で表現すると K_1 について次の補題が成立する.

Lemma 2 $n\times n$ 行列 L, D, E およびベクトル $\mathbf{g}$ の定義により (35) について次式が成立する.

$$\frac{\|\Delta u_h\|_0{}^2}{\|P_0 f\|_0{}^2} = \frac{\mathbf{f}^T D^{-1} E D^{-1} \mathbf{f}}{\mathbf{f}^T L^{-1} \mathbf{f}}.$$

したがって K_1 は次で評価される:

$$K_1 \le \left(\sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n} \frac{\mathbf{x}^T D^{-1} E D^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T L^{-1}\mathbf{x}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{39}$$

(39) の評価は, 次のような一般固有値問題の最大固有値を求める問題に帰着される.

$$Ax = \lambda Bx.$$

ただし, A は対称行列, B は対称正定値行列とする. さらに, [6] で提案されている手法により, これらの値は数値的に評価可能である. 数値例については後の節を参照のこと.

4.4 $C_1(h)$ の評価法

評価式 (30) を満たす定数 $C_1(h)$ の算定法を述べることにしよう.

任意の $\phi \in H_0^2(\Omega)$ および $P_h\phi \in S_h$ について, 次式を満たすような ϕ に依存しない正数 K_2 が算定可能であると仮定する.

$$\|\Delta(\phi - P_h\phi)\|_0 \le K_2 \|\Delta\phi\|_0. \tag{40}$$

このとき次の補題が成り立つ.

Lemma 3 (40) をみたす正数 K_2 が算定可能であれば, $C_1(h) = \frac{\sqrt{2K_2}}{\pi}h$ とおけば, (30) が成り立つ.

証明は S_h がテンソル積で構成されることを利用するが, 詳細は略す.

定数 K_2 の算定は, $-\Delta\phi = g$ と置き, ϕ と g をそれぞれ K_1 の評価における u と f と同様に扱うことで行なう.

5. 数値例および K_2 の評価の改良について

表 1 に前節で述べた方法で計算した K_2 および $C_1(h)$ の値を示す.

分割数 $N(=1/h)$	K_2	$C_1(h)$
5	1.912641	1.228886
10	2.698721	0.729867
15	3.288521	0.537123
20	3.788426	0.432378
概算の order	$O(h^{-0.50})$	$O(h^{0.75})$

表 1: K_2 および $C_1(h)$ の数値例 (改良前)

この表に見られるように, K_2 が h に関して逆オーダーをもつため $C_1(h)$ について期待された order ($O(h)$) は得られなかった. そこで K_2 の改良を試みたところ, order が若干改善され, K_2 自体も小さくなるという結果 (表 2) が得られているので, その改良の方法について紹介する.

まず次の補題を掲げる.

Lemma 4 Ω 上の調和関数全体からなる集合を $\mathcal{H}(\Omega)$ とおく. すなわち

$$\mathcal{H}(\Omega) \equiv \{\eta \in H^2(\Omega)\,;\, \Delta\eta = 0 \text{ on } \Omega\}.$$

$g \in L^2(\Omega)$ に対して, 次の問題を考える:

$$\begin{cases} -\Delta\phi &= g \text{ in } \Omega \\ \phi &= 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \tag{41}$$

このとき, (41) の解 ϕ が $H_0^2(\Omega)$ に属することと, g が $\mathcal{H}(\Omega)$ の任意の元と L^2 直交することとは同値である. すなわち次のことが成り立つ.

$$\phi \in H_0^2(\Omega) \Longleftrightarrow \forall\eta \in \mathcal{H}(\Omega),\ \ (g,\eta) = 0. \tag{42}$$

証明は略す. K_2 の評価を行う際に $\phi \in H_0^2(\Omega)$ に対し $g = -\Delta\phi$ とおいたが, このLemma から, g は $L^2(\Omega)$ より狭い $L^2(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega)^\perp$ の元であることが分かる. しかし前節で述べた評価法に従って g の S_h への L^2-projection を扱うだけでは, $\mathcal{H}(\Omega)$ と直交するという g の性質が取り込まれていない. それが原因で order が上がらない可能性があると考え, 以下では g が $\mathcal{H}(\Omega)$ と直交するという性質を取り込んだ有限次元空間への projection を考えることにする.

$\mathcal{H}(\Omega)$ の有限次元部分空間で, 次元が r であるものを $\mathcal{H}^r$ で表すことにする. さらに $L^2(\Omega)$ の部分空間 $\bar{S_h}$ を $\bar{S_h} = S_h + \mathcal{H}^r$ で定義する. このとき $\bar{S_h}$ は $L^2(\Omega)$ の意味で S_h と $\mathcal{H}^r$ の直和で表される. なぜならば $v \in S_h \cap \mathcal{H}^r$ であるとすると

$$\|\nabla v\|_0{}^2 = (\nabla v, \nabla v) = -(\Delta v, v) = 0,$$

であるから, $v \in S_h \subset H_0^1(\Omega)$ より $v = 0$. よって $S_h \cap \mathcal{H}^r = \{0\}$, すなわち $\bar{S_h} = S_h \oplus \mathcal{H}^r$ である.

g^* を g の $\bar{S_h}$ への L^2-projection とする. $\bar{S_h} = S_h \oplus \mathcal{H}^r$ であることより g^* は次式を満たす $\bar{S_h}$ の元である.

$$\begin{cases} (g^*, \psi_h) = (g, \psi_h) & & \forall\psi_h \in S_h, \\ (g^*, \eta_h) = (g, \eta_h) & (=0) & \forall\eta_h \in \mathcal{H}^r. \end{cases} \tag{43}$$

(43) の第 2 式から分かるように, $g^* \in \mathcal{H}^{r\perp}$ である. この projection を利用して g^* に, $\mathcal{H}(\Omega)$ と直交する性質を部分的に取り込み, これを用いて前節と同様の評価を行うことにする.

実際に数値計算をするにあたり, $\mathcal{H}^r$ の基底は以下のようにして定めた.

複素数 $z = x + iy$ に対して z^k は正則関数であるので z^k の実部および虚部は x, y に関する調和関数である. このことより $r = 2k+1$ として, $\mathcal{H}^r$ の基底を次のように定義した.

$$\eta_1 = 1,\ \eta_2 = \mathrm{Re}\, z(=x),\ \eta_3 = \mathrm{Im}\, z(=y), \ldots, \eta_{2k} = \mathrm{Re}(z^k),\ \eta_{2k+1} = \mathrm{Im}(z^k)$$

表 2は, この基底を直交化したものを改めて $\{\eta_i\}_{1\le i\le r}$ として, $1 \le r \le 17 (0 \le k \le 8)$ の場合について, 数値的に行列の固有値評価を行った結果である. また, 基底数 0 の結果は表 1 の結果である.

$\mathcal{H}^r$ の基底数	$N=5$	$N=10$	$N=15$	$N=20$	$\bar{K}_2$ の order
0	1.912641	2.698721	3.288521	3.788426	$O(h^{-0.50})$
1	1.466710	1.965225	2.371945	2.719447	$O(h^{-0.48})$
3	1.321308	1.714062	2.051578	2.342885	$O(h^{-0.47})$
5	1.174985	1.485988	1.758935	1.997633	$O(h^{-0.45})$
7	1.164838	1.471137	1.732042	1.962105	$O(h^{-0.44})$
9	1.105008	1.325198	1.542206	1.736862	$O(h^{-0.42})$
11	1.105008	1.308546	1.542206	1.702270	$O(h^{-0.40})$
13	1.076343	1.225133	1.402603	1.566810	$O(h^{-0.39})$
15	1.076343	1.213358	1.382403	1.540264	$O(h^{-0.38})$
17	1.053945	1.162026	1.309098	1.450628	$O(h^{-0.36})$

表 2: 改良後の $\bar{K}_2$

表 2の結果から, $\mathcal{H}^r$ の次元が高くなるにしたがい, $\bar{K}_2$ の値が小さくなり, order も若干改善されることが分かる. これは, $\mathcal{H}^r$ の次元が高くなることが, 調和関数の Taylor 展開の次数が上がることに相当し, g^* が $\mathcal{H}(\Omega)$ と直交する性質を取り込んだ, より良い近似となるためであると思われる.

最後に, 改良後の K_2 の値に対して $C_1(h)$ を計算した結果を, K_1, $C(h)=K_1C_1(h)$ の値とともに表 3に掲げる.

$N(=1/h)$	K_2	$C_1(h)$	K_1	$C(h)$
5	1.053945	0.0924281	1.186351	0.10965217
10	1.162026	0.0485258	1.229639	0.05966922
15	1.309098	0.0343368	1.257111	0.04316517
20	1.450628	0.0271090	1.268680	0.03439265

表 3: $K_2, C_1(h), K_1, C(h)$

K_1 は (32) を満たす正数で, 行列の一般固有値問題を適用して数値的に求めたものである. N が増えるにしたがって値が増大しているが, 極限では一定値に収束するものと考えている.

また K_2 は (40) を満足する正数であるが, 前述の改良法を用いて行列の固有値を計算したもので, 結果は改良後の表 2 の $r=17$ の値を示した. K_2 の改良を行う際に $\mathcal{H}^r$ を構成するが, このとき多項式の積分値を用いるので, 可能なかぎり *Mathematica* で有理数演算を行い, その後 4 倍精度浮動小数点数に丸めることで丸め誤差を小さくするように配慮した.

なお数値計算は, ベクトル計算機 FUJITSU M-1800/20U, 言語は Fortran, コンパイラは FORTRAN77 EX/VP V12, 精度は倍精度 (一部 4 倍精度) で行った. また, 一部有理数演算および基底の直交化を行う際に, 数式処理ソフトウェア *Mathematica* を DEC ALPHA

STATION $200^{4/233}$ 上で使用した.

参考文献

[1] Girault, V., Raviart, P. A. : *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes equations*, Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1986).

[2] Nakao, M, T., Yamamoto, N., Watanabe, Y. : Guranteed Error Bounds for Finite Element Solutions of the Stokes Problems, *in Scientific Computing and Validated Numerics* (eds G. Alefeld et al.), Proceeding of SCAN-95, Akademie Verlag, Berlin, 258-264 (1996).

[3] Schultz, M. H. : *Spline Analisys*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jergey (1973).

[4] Temam, R. : *Navier-Stokes equations*, Studies in Mathematics and its Applications vol.2 (Revised edition). North-Holland (1984).

[5] Watanabe, Y. : Guranteed Error Bounds for Finite Element Solutions of the Stokes Equations, dissertation, Kyushu University, 35pages (1996).

[6] Yamamoto, N., Nakao, M, T. : Numerical Verifications of Solutions for Elliptic Equations in Nonconvex Polygonal Domains, *Numer. Math.*, **65**, 503-521 (1993).

[7] 花岡 秀信 : Stokes 方程式の内近似による有限要素解とその構成的誤差評価, 修士論文, 九州大学数理学研究科, (1997).