

## $GL(n, q)$ と $SL(n, q)$ の中間群 における McKay numbers

阪大理 鋤崎 英記 (Hideki Sukizaki)

有限群  $G$ , 素数  $p$ , 整数  $k > 0$ ,  $G$  の  $p$ -block  $B$  に対して,  
 $B$  に属する既約通常指標で次数が  $p$  でちょうど  $k$  回割り切れる  
ものの数を  $m_p(k, G, B)$  で表す.

$m_p(k, G) = \sum_B m_p(k, G, B)$  は McKay number と呼ばれている.

有限体  $GF(q)$  上での, 次数  $n$  の一般線型群  $GL(n, q)$  の部分群  
 $L_k$  を次のように定める.

$$L_k = L_k(n, q) = \{x \in GL(n, q) \mid \det(x) \in U_k\}$$

ただし,  $U_k$  は  $GF(q)$  の乗法群の位数  $k$  なる部分群とする.

特に  $L_{q-1} = GL(n, q)$ ,  $L_1 = SL(n, q)$  であり, 一般に

$$GL(n, q) = L_{q-1} \supseteq L_k \supseteq L_1 = SL(n, q)$$

となる.

ここでは  $q = p^e$  として  $m_p(k, L_k, B)$  について考える.

なお,  $m_p(k, GL(n, q))$  は中村[N],  $m_p(k, GL(n, q), B)$  は Olsson-宇野[OU] で求められている。

$L_R$  の  $p$ -block は defect 0 のものが  $k$  個, defect  $\frac{e(n-1)}{2}$  のものが  $(q-1, nR)$  個ある [D], defect 0 の  $p$ -block は 1 個の既約指標しか持たず, その次数は  $p^{\frac{e(n-1)}{2}}$  で割り切れる。

defect  $\frac{e(n-1)}{2}$  の  $p$ -block は  $U_{\gcd(q-1, nR)}$  でパラメトライズできる。  $a \in U_{\gcd(q-1, nR)}$  に対応する  $p$ -block を  $B_a$  で表す。このとき, 次のを得た。

定理 1 [S]  $0 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$  ならば,

$$m_p(eR, L_R, B_a) = \sum' m(\mu, a)$$

ここで  $\sum'$  は  $n$  の分割  $\mu = (a_1^{l_1}, a_2^{l_2}, \dots, a_s^{l_s})$  (但し,  $a_1 > a_2 > \dots > a_s$ ,  $l_i$  は  $a_i$  の重複度) のうち,  $\sum_i \binom{a_i}{2} l_i = k$  をみたすものについての和であり,

$$m(\mu, a) =$$

$$k \left\{ q^{l(\mu) - s(\mu)} + \sum_{g | \gcd(t(\mu), \frac{q-1}{R})} g^2 \prod(g) q^{\frac{l(\mu)}{g} - s(\mu)} \right\} (q-1)^{s(\mu)-2} \beta\left(\frac{(q-1)m(\mu)}{\gcd(q-1, nR)}, S_0 a\right)$$

ただし,  $l(\mu) = \sum_i l_i$ ,  $s(\mu) = s$ ,  $m(\mu) = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_s)$ ,

$$t(\mu) = \gcd(l_1, l_2, \dots, l_g), \quad s_0 = (-1)^{\frac{(q-1)n}{\gcd(q-1, nr)}}$$

$\beta(m, a) : GF(q)$  における  $x^m = a$  の解の数

$$\pi(q) = \prod_{r|q \text{ なる素数 } r} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)$$

証明は, Lehrer [L] による  $L_n$  の既約指標のパラメトライズを用いる.

例

(i)  $n=6, k=2, \gcd\left(\frac{q-1}{k}, 6\right) = 2$  のとき

defect 0 でない  $p$ -block の数は  $\gcd(q-1, 6k) = 2k$ . また  $m_p(2e, L_k, Ba) = m(\mu, a)$  (但し  $\mu = (2^2, 1^2)$ ) となる.

このとき,  $l(\mu) = 4, s(\mu) = 2, m(\mu) = 1, t(\mu) = 2$ , また  $\pi(2) = \frac{3}{4}$  であるから,

$$\begin{aligned} m_p(2e, L_k, Ba) &= k(q^2 + 4\pi(2)) \beta\left(\frac{(q-1) \cdot 1}{\gcd(q-1, 6k)}, (-1)^{\frac{(q-1) \cdot 6}{\gcd(q-1, 6k)}} a\right) \\ &= k(q^2 + 3) \beta\left(\frac{q-1}{2k}, (-1)^{\frac{3q-1}{k}} a\right) \\ &= k(q^2 + 3) \frac{q-1}{2k} \end{aligned}$$

(ii)  $k=0$  のときは, defect 0 でない  $p$ -block すべてが同数の指標をもつので,  $m_p(0, L_k)$  を挙げる.

$n$ が素数のとき

$$m_p(0, L_n) = \begin{cases} h(q^{n-1} + n^2 - 1) \\ h q^{n-1} \end{cases}$$

$$\gcd(n, \frac{q-1}{h}) = n \text{ のとき}$$

$$\gcd(n, \frac{q-1}{h}) = 1 \text{ のとき}$$

$n=4$  のとき

$$m_p(0, L_n) = \begin{cases} h(q^3 + 3q + 12) \\ h(q^3 + 3q) \\ h q^3 \end{cases}$$

$$\gcd(4, \frac{q-1}{h}) = 4 \text{ のとき}$$

$$\gcd(4, \frac{q-1}{h}) = 2 \text{ のとき}$$

$$\gcd(4, \frac{q-1}{h}) = 1 \text{ のとき}$$

$n=6$  のとき

$$m_p(0, L_n) = \begin{cases} h(q^5 + 3q^2 + 8q + 24) \\ h(q^5 + 8q) \\ h(q^5 + 3q^2) \\ h q^5 \end{cases}$$

$$\gcd(6, \frac{q-1}{h}) = 6 \text{ のとき}$$

$$\gcd(6, \frac{q-1}{h}) = 3 \text{ のとき}$$

$$\gcd(6, \frac{q-1}{h}) = 2 \text{ のとき}$$

$$\gcd(6, \frac{q-1}{h}) = 1 \text{ のとき}$$

有限群  $G$  の  $p$ -block  $B$  の defect を  $d(B)$ ,  $B$  の defect 群を  $D$  とする. このとき,  $D$  の正規化群  $N_G(D)$  の  $p$ -block  $b$  で

$b^G = B$  となるものが存在する (Brauer の第 1 主定理).

$G, N_G(D)$  の位数の  $p$ -成分を  $p^\nu, p^{\nu'}$  とすると,  $\nu - d(B) = \nu' - d(b)$  である.

このとき, 次のような予想がある,

予想 [Alperin-McKay 予想 [A]]

$$m_p(v-d(B), G, B) = m_p(v'-d(b), N_G(D), b)$$

が成り立つ.

$G = L_n$  の場合は, defect  $\frac{en(n-1)}{2}$  の場合のみ考えればよい.  $L_n$  の defect  $\frac{en(n-1)}{2}$  の  $p$ -block  $B$  に対して, defect 群は Sylow  $p$ -部分群  $P$  であり,

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ * & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in L_n \right\} \text{ ととること} \text{ ができる. このとき.}$$

$$N_{L_n}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ * & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix} \in L_n \right\} \text{ となる (Borel 部分群),}$$

$N_{L_n}(P)$  の  $p$ -block  $b$  が  $b^{L_n} = B$  となるただひとつの  $p$ -block であるとす. このとき

$$\text{定理 2 [S]} \quad m_p(0, L_n, B) = m_p(0, N_{L_n}(P), b)$$

が成り立つ. 即ち,  $L_n$  は  $p$  が定義体の標数に等しいとき, Alperin-McKay 予想が成り立つ.

(証明の概要)  $m_p(0, L_n, B)$  は Lehrer [L] のパラメトライズ  $\epsilon$  を用いて数える.

一方,  $N_{L_n}(P)$  が  $L_n$  の上三角行列のなす部分である. このとき,  $N_{L_n}(P)$  の既約指標の次数が  $p$  で割り切れないものは,

その核に  $P$  の交換子群  $P'$  を含む。したがって  $N_{L_2}(P)/P'$  の既約指標を考えればよい。これについて、Clifford の定理を用いて  $\mathcal{M}_p(0, N_{L_2}(P), b)$  を数える。

- [A] J.L. Alperin, The main problem of block theory, Proc. of Conf. on Finite Groups (Univ. Utah Park City, UT, 1975), Academic Press, New York, 1976.
- [D] S.W. Dagger, On the block of Chevalley groups, J. London Math. Soc. (2) 3 (1971), 21-29
- [L] G.I. Lehrer, Character, Class, and Duality in Isogenous Groups, J. Algebra 36 (1975), 278-286.
- [N] H. Nakamura, On some generating functions for McKay number — prime power divisibilities of the hook products of Young diagrams, J. Math. Sci. Uni. Tokyo 1 (1994), 321-337.
- [S] H. Sukizaki, to appear.
- [OU] J.B. Olsson and K. Uno, Dade conjecture for general linear groups in the defining characteristic, Proc. London Math. Soc. (3) 72 (1996), 359-384.