数理解析研究所講究録
992巻 1997年 134-137

On Product Formula of Tree Expressions

井口修一　　河原康雄
九州大学大学院システム情報科学研究科情報理学専攻
{inokuchi,kawahara}@i.kyushu-u.ac.jp

1　はじめに

1次元有限セルオートマトンの挙動解析を行なう場合において，その挙動をある部分を境にして2つに分けることが出来るセルオートマトンがある [1]．逆にいえば，2つの挙動を組み合わせることにより，より多くのセルをもつセルオートマトンの挙動を表すことができる．

例えば，CA-12(m) では，以下の性質がわかっている．

補題 1 c を様相，$d=\delta(c)$ とすると，*CA-12(m)* では

$$c_i c_{i+1} = 01 \text{ならば，} d_i d_{i+1} = 01$$

である．

この性質より，CA-12(m) では 01 となる 2 つのセルを境にしてその挙動を 2 つに分けることができる．そうすることにより，以下の定理を導き出すことができる．

定理 1 境界条件 *1-0* 型 *CA-12(m)* では，以下の公式が成り立つ．

$$C(m) = \langle 1+[m]\rangle + \sum_{k=0}^{m-2} \langle 1+[k]\rangle \times C(m-k-2)$$

ただし，*1-0* 型 *CA-12(m)* を $C(m)$ と略記する．

以上のように有限力学系を考える場合，ある 2 つの力学系の挙動の直積を考えることにより，新たな力学系の挙動を与えることができる．しかし，上に紹介した定理の中に現れる演算子'×' は，高さが定数の木どうしの直積であって，一般の力学系については使うことができない．

このように，その挙動を 2 つに分けることができる力学系は他にも多くあると思われ，その力学系の直積などは非常に特殊な力学系 [2] を除き，あまり研究されていない．そこで，本稿では，木の構造をもった力学系に着目し，それらの直積について考察した

2　正規木

この章では，木構造をもつ力学系を代数式で表現した正規木について定義する．

定義 1 m を正整数，N^* を正整数の有限列からなる集合全体，$N^+ = N^* - \{\varepsilon\}$ とする．このとき，部分関数 $\mu : N^+ \to N^+$ と $\mu_m : N^+ \to N^+$ を次のように定義する．($x \in N^*, j \in N, 1 \leq i \leq m, \varepsilon$: 空列)

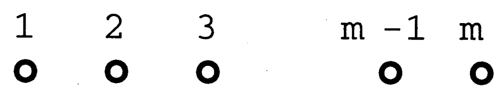
$$\mu(xj) = \begin{cases} x & if \quad x \in N^+ \\ undefined & if \quad x = \varepsilon \end{cases}$$

$$\mu_m(ix) = \begin{cases} \mu(ix) & if \quad x \in N^+ \\ i-1 & if \quad x = \varepsilon, 2 \le i \le m \\ m & if \quad x = \varepsilon, i = 1 \\ undefined & otherwise \end{cases}$$

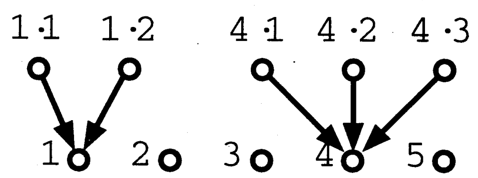
定義 2 m を正整数とし，$[m] = \{1, 2, \cdots, m\}, [0] = \phi$ とし，正規木を以下のように定義する．

1. m が非負整数ならば，$[m] = ([m], \mu)$ は正規部分木である．
2. m が正整数，$E_1, \cdots, E_m$ が正規部分木ならば，$[m + E_1 + \cdots + E_m] = ([m] + \sum_{i=1}^{m} iE_i, \mu)$ は正規部分木である．
3. m が正整数，$E_1, \cdots, E_m$ が正規部分木ならば，$\langle\ m + E_1 + \cdots + E_k\ \rangle = (\{1, 2, \cdots, m\} + \sum_{i=1}^{m} iE_i, \mu_m)$ は正規木である．

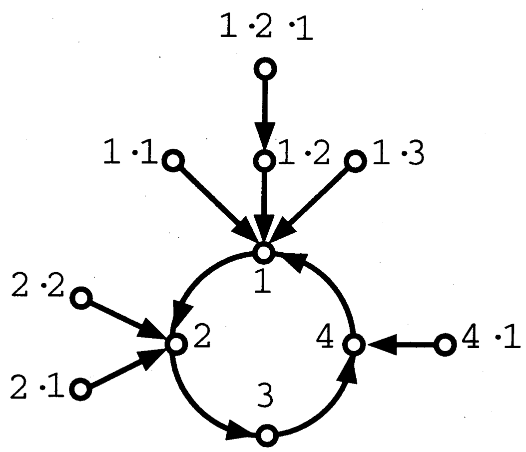
今後，$E_k, D_h, E(a, b), D(s, t)$ 等は正規部分木を表すものとする．



図：$[m]$



図：$[5 + [2] + [3]]$



図：$\langle\ 4 + [3 + [1]] + [2] + [0] + [1]\ \rangle$

3 正規木の直積と積公式

この章では，正規木の直積について考る．正規木の直積

$$\langle\ p+[m_1+E(1,1)+\cdots+E(1,k_1)]+\cdots+[m_p+E(p,1)+\cdots+E(p,k_p)]\ \rangle \times \langle\ l+[n_1+D(1,1)+\cdots+D(1,h_1)]+\cdots+[n_l+D(l,1)+\cdots+D(l,h_l)]\ \rangle$$

がどのような正規木と同型になるのか考察する．$p=1,l=1$ の場合，つまり，ともに不動点に収束するような正規木どうしの直積の場合については次の定理が得られている．

定理 2 正規木の直積について，以下の公式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\langle\ 1+[m_1+E(1,1)+\cdots+E(1,k_1)]\ \rangle\times\langle\ 1+[n_1+D(1,1)+\cdots+D(1,h_1)]\ \rangle=\\ &\quad\langle\ 1+[m_1+n_1+m_1n_1+\textstyle\sum_{i=1}^{k_1}E(1,i)\otimes_R\langle\ 1+[n_1+D(1,1)+\cdots+D(1,h_1)]\ \rangle\\ &\quad+\textstyle\sum_{s=1}^{h_1}\langle\ 1+[m+E(1,1)+\cdots+E(1,k_1)]\ \rangle\otimes_L D(1,s)+\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{s=1}^{h_1}E(1,i)\otimes_D D(1,s)]\ \rangle\end{aligned}$$

但し，

- $[m+E_1+\cdots+E_k]\otimes_D[n+D_1+\cdots+D_h]=[mn+\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{h}E_i\otimes_D D_s]$
- $[m+E_1+\cdots+E_k]\otimes_R\langle\ 1+[n+D_1+\cdots+D_h]\ \rangle=$
  $[m+mn+\sum_{i=1}^{k}E_i\otimes_R\langle\ 1+[n+D_1+\cdots+D_h]\ \rangle+\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{h}E_i\otimes_D D_s]$
- $\langle\ 1+[m+E_1+\cdots+E_k]\ \rangle\otimes_L[n+D_1+\cdots+D_h]=$
  $[n+mn+\sum_{s=1}^{h}\langle\ 1+[m+E_1+\cdots+E_k]\ \rangle\otimes_L D_s+\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{h_1}E_i\otimes_D D_s]$

補題 2 $[m+E_1+\cdots+E_k]\otimes_D[n+D_1+\cdots+D_h]=[mn+\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{h}E_i\otimes_D D_s]$ とすると，

$$[m+E_1+\cdots+E_k]\otimes_D[n+D_1+\cdots+D_h]\cong\{(x,y)|\ |x|=|y|,x\in[m+E_1+\cdots+E_k],y\in[n+D_1+\cdots+D_h]\}$$

である．

補題 3 $[m+E_1+\cdots+E_k]\otimes_R\langle\ 1+[n+D_1+\cdots+D_h]\ \rangle=$
$[m+mn+\sum_{i=1}^{k}E_i\otimes_R\langle\ 1+[n+D_1+\cdots+D_h]\ \rangle+\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{h}E_i\otimes_D D_s]$ とすると，

$$[m+E_1+\cdots+E_k]\otimes_R\langle\ 1+[n+D_1+\cdots+D_h]\ \rangle\cong\{(x,y)|\ |x|+1\geq|y|,x\in[m+E_1+\cdots+E_k],y\in\langle\ 1+[n+D_1+\cdots+D_h]\ \rangle\}$$

である．

補題 4 $\langle\ 1+[m+E_1+\cdots+E_k]\ \rangle\otimes_L[n+D_1+\cdots+D_h]=$
$[n+mn+\sum_{s=1}^{h}\langle\ 1+[m+E_1+\cdots+E_k]\ \rangle\otimes_L D_s+\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{h_1}E_i\otimes_D D_s]$ とすると，

$$\langle\ 1+[m+E_1+\cdots+E_k]\ \rangle\otimes_L[n+D_1+\cdots+D_h]\cong\{(x,y)|\ |x|\leq|y|+1,x\in\langle\ 1+[m+E_1+\cdots+E_k]\ \rangle,y\in[n+D_1+\cdots+D_h]\}$$

である．

証明． (定理 1 の証明の概略)

$$\begin{aligned}&\langle\ 1+[m_1+E(1,1)+\cdots+E(1,k_1)]\ \rangle\times\langle\ 1+[n_1+D(1,1)+\cdots+D(1,h_1)]\ \rangle\\ &=\{(x,y)|x\in\langle\ 1+[m_1+E(1,1)+\cdots+E(1,k_1)]\ \rangle,y\in\langle\ 1+[n_1+D(1,1)+\cdots+D(1,h_1)]\ \rangle\}\\ &=\{(1,1)\}\cup\{\ (1x,1y)\mid x\in[m_1],y\in[n_1]\ \}\\ &\qquad\cup\{\ (1x,1)\mid x\in[m_1]\ \}\\ &\qquad\cup\{\ (x,1y)\mid y\in[n_1]\ \}\\ &\qquad\cup\textstyle\bigsqcup_{i=1}^{k_1}\bigsqcup_{j=1}^{h_1}\{\ (1ix,1jy)\mid|x|=|y|,x\in E(1,i),y\in D(1,j)\ \}\end{aligned}$$

$$\cup \bigsqcup_{i=1}^{k_1} \{\ (1ix, y) \mid |x| + 1 \geq |y|, x \in E(1,i), y \in \langle\ 1 + [n_1 + D(1,1) + \cdots + D(1,h_1)]\ \rangle\ \}$$
$$\cup \bigsqcup_{j=1}^{h_1} \{\ (x, 1jy) \mid |x| \leq |y| + 1, x \in \langle\ 1 + [m_1 + E(1,1) + \cdots + E(1,k_1)]\ \rangle, y \in D(1,j)\ \}$$
$$\cong \langle\ 1 + [m_1 + n_1 + m_1 n_1 + \textstyle\sum_{i=1}^{k_1} E(1,i) \otimes_R \langle\ 1 + [n_1 + D(1,1) + \cdots + D(1,h_1)]\ \rangle$$
$$+ \textstyle\sum_{s=1}^{h_1} \langle\ 1 + [m + E(1,1) + \cdots + E(1,k_1)]\ \rangle \otimes_L D(1,s) + \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{s=1}^{h_1} E(1,i) \otimes_D D(1,s)]\ \rangle$$

(補題1，補題2，補題3より) □

また，$p = 1$の場合，つまり，一方のみ不動点に収束するような正規木の直積については，以下の定理が予測されている．

定理 3 正規木の直積について，以下の公式が成り立つ．

$$\langle\ 1 + [m_1 + E(1,1) + \cdots + E(1,k_1)]\ \rangle \times \langle\ l + [n_1 + D(1,1) + \cdots + D(1,h_1)] + \cdots + [n_l + D(l,1) + \cdots + D(l,h_l)]\ \rangle =$$
$$\langle\ l + \textstyle\sum_{j=1}^{l} [m_1 + n_j + m_1 n_j + \sum_{i=1}^{k} E(1,i) \otimes_R \langle\ 1 + [n_t + D(t,1) + \cdots + D(t,h_t)]\ \rangle$$
$$+ \textstyle\sum_{s=1}^{h_j} \langle\ 1 + [m_1 + E(1,1) + \cdots + E(1,k_1)]\ \rangle \otimes_L D(j,s) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{h_j} E(1,j) \otimes_D D(j,s)]\ \rangle$$

但し，

- $t = (j \ mod \ l) + 1$.
- $[m + E_1 + \cdots + E_k] \otimes_D [n + D_1 + \cdots + D_h] = [mn + \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{h} E_i \otimes_D D_s]$
- $[m + E_1 + \cdots + E_k] \otimes_R \langle\ 1 + [n_j + D(j,1) + \cdots + D(j,h_j)]\ \rangle =$
  $[m + mn_j + \sum_{i=1}^{k} E_i \otimes_R \langle\ 1 + [n_t + D(t,1) + \cdots + D(t,h_t)]\ \rangle + \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{h_j} E_i \otimes_D D(j,s)]$
- $\langle\ 1 + [m + E_1 + \cdots + E_k]\ \rangle \otimes_L [n + D_1 + \cdots + D_h] = [n + mn + \sum_{s=1}^{h} \langle\ 1 + [m + E_1 + \cdots + E_k]\ \rangle \otimes_L D_s + \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{h_j} E_i \otimes_D D_s]$

4 まとめ

本稿では，木を代数式で表現した正規木を提案し，その直積について考察した．共に不動点に収束する正規木については，それらの直積と同型な正規木を公式として与えた．しかし，一方のみ不動点に収束するような正規木の直積については，それと同型な正規木を予測したのみで，理論的な証明は行なっていない．一般的な正規木どうしの直積については，それと同型な正規木の予測さえついてない．これらのやり残しを今後の課題としたい．

参考文献

[1] H.Lee and Y.Kawahara: *Transition Diagrams of Finite Cellular Automata*, Bull. Inform. Cybernet. 28(1996)47-69

[2] S. Kumamoto and M. Nohmi: *On Transition Diagrams of Integral Affine Dynamical Systems*, in submitting