数理解析研究所講究録
993巻 1997年 122-133

スパイク集合状磁性流体自由表面波の記述様式

北大工学部　水　田　　洋　(Yo Mizuta)

1　はじめに

磁性流体の自由表面は，強い磁場のもとでスパイク集合状に特異な変形をする．その様子は，磁場の増加と共に不連続的に変化し，ある種の分岐現象と見なせそうであるが [1, 2, 3]，極めて非線形性・多価性が強いことが一瞥されるため，その解析は線形理論，弱非線形理論のままにとどまっている．

定常的な自由表面形状は，表面張力，表面磁気力，重力がつりあうように決めることになるが，自由表面の変形自身が周辺の磁場，すなわち表面磁気力を変えてしまうことが問題を複雑にする．しかし磁場の調和性は，様々な解析の方法を利用可能にしている．特に2次元解析については，複素解析の等角写像法が非線形性・多価性に制限されない解析を可能にすることを示した [4]．

本稿では，これまでに行ってきた線形解析と複素解析のあらましを述べた後，界面両側の媒質の透磁率が有限であることを考慮したより詳しい解析を行って，それらの相互関係を調べることにする．

2　物理的設定

磁性流体のある下層（領域１）と真空の上層（領域２）にまたがる解析領域を考える．磁性流体を渦なし・非粘性と仮定すれば，自由表面上では密度・速度ポテンシャル・流速・重力加速度・表面変位・圧力・表面張力・表

面磁気力を ρ, ϕ, $\boldsymbol{v} = -\nabla\phi$, g, η, p, p_{t}, T_{m} として，次の Bernoulli 方程式が成り立つ [5].

$$\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + g\eta\right) + p + p_{\mathrm{t}} + T_{\mathrm{m}} = \mathrm{const.} \tag{1}$$

一様な大気圧下の定常問題では，$\phi = 0$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, $p = 0$ である．したがって Bernoulli 方程式は，重力・表面張力・表面磁気力のつりあいを表している．このうち重力の寄与は，強磁場のもとでは相対的に小さい．

表面張力には，水平座標と表面張力係数を x, Γ として$-\Gamma\partial^2\eta/\partial x^2$ が近似的によく使われるが，今は大きな表面変位を扱うので，厳密な曲率の表式を用いる（後述）．

表面磁気力は，磁束密度の法線成分 b_{n} と磁場の接線成分 h_{s} で

$$T_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{\mu}\right]b_{\mathrm{n}}^2 - [\mu]h_{\mathrm{s}}^2\right) = \frac{[\mu]}{2}\left(\frac{b_{\mathrm{n}}^2}{\mu_1\mu_2} + h_{\mathrm{s}}^2\right) \tag{2}$$

と表される．ただし磁束密度は磁場 $\boldsymbol{h}$ と透磁率 μ で $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{h}$ と表されるものとする．真空の透磁率は $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$, 磁性流体の透磁率は $1.4\mu_0$ 程度である．また以降で $[\cdots]$ は，界面（自由表面）をはさむ上層量と下層量の差（上層－下層）を示す．

磁束の保存則から $\nabla\cdot\boldsymbol{b} = 0$ が成り立ち，無電流領域での Ampére の法則 $\nabla\times\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ より磁場は磁気ポテンシャル ψ で $\boldsymbol{h} = -\nabla\psi$ と表される．したがって ψ は，Laplace 方程式 $\nabla^2\psi = 0$ を満たすように決められる．このとき，次の界面条件を考慮する．

$$0 = [b_{\mathrm{n}}], \quad 0 = [h_{\mathrm{s}}]. \tag{3}$$

これらは，界面をはさんで b_{n} と h_{s} が連続で，上層・下層で共通に用いられることを述べており，式 (2) もこのような b_{n}, h_{s} で表されている．これと

は対照的に，磁束密度の接線成分 b_{s} と磁場の法線成分 h_{n} は，界面において次の値だけ不連続になる．

$$[b_{\mathrm{s}}] = [\mu] h_{\mathrm{s}}, \quad [h_{\mathrm{n}}] = [1/\mu] b_{\mathrm{n}}. \tag{4}$$

自由表面が変形していないときの磁場は一様一定とするが，法線成分・接線成分が共にあっても構わない．ただし実際の実験装置では，透磁率の極めて大きな磁極を有限間隔離し，この間の領域で発生した一様な磁場を利用する [6]．このような状況にあわせて上層・下層の厚さを有限とした解析も行ったが [7, 8]，本稿では簡単のため，上層・下層の厚さは無限とする．

3　線形解析

線形解析では，通常通り表面変位を小さいとして全ての量と方程式を 1 次の微小量まで展開し，未定係数を決めていく [9]．上層・下層それぞれの磁気ポテンシャルを ψ_2, ψ_1 とすれば，Laplace 方程式を満たし，上方または下方の無限遠で 0 となる解を

$$\begin{cases} \psi_2(x,y) &= a_2 e^{ikx} e^{-ky}, \\ \psi_1(x,y) &= a_1 e^{ikx} e^{ky} \end{cases} \tag{5}$$

と仮定できる．ただし定数（波数）k は正である．

表面変位を小さいとして，水平方向単位ベクトル $\boldsymbol{x}$，鉛直方向単位ベクトル $\boldsymbol{y}$，自由表面勾配 η' により，法線ベクトルと接線ベクトルを近似的に

$$\boldsymbol{n} \simeq \boldsymbol{y} - \eta' \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{s} \simeq -\boldsymbol{x} - \eta' \boldsymbol{y} \tag{6}$$

と表し，さらに磁束密度と磁場を $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{b}^1$, $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^0 + \boldsymbol{h}^1$ のように 0 次量

と1次量に分ければ，磁束密度の法線成分と磁場の接線成分を

$$\begin{cases} b_{\mathrm{n}} &= \quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} \;\simeq\; b_y^0 + b_y^1 - \eta' b_x^0, \\ -h_{\mathrm{s}} &= -\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{s} \;\simeq\; h_x^0 + h_x^1 + \eta' h_y^0 \end{cases} \tag{7}$$

と表すことができる．これらを式(3)に代入すれば，ψ に対する界面条件

$$\begin{cases} \eta'[b_x^0] \;\simeq\; [b_y^1] &= \left[-\mu\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right], \\ -\eta'[h_y^0] \;\simeq\; [h_x^1] &= \left[-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right] \end{cases} \tag{8}$$

が導かれる．ただしここでは，0次量もまた式(3)を満たすことを使った．

以下で式(5),(8)のψは，磁気ポテンシャルを $\psi=\psi^0+\psi^1$ と分けたときの ψ^1 とみなす．界面条件を満たすように未定係数 a_1, a_2 を定めれば，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_1+\mu_2}\begin{pmatrix} 1 & \mu_2 \\ 1 & -\mu_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\eta'[b_x^0]}{k} \\ -\eta[h_y^0] \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる．ところで，上層・下層各々を添え字 $i,j=1,2$ で表せば，$b_{\mathrm{n}i}=b_{\mathrm{n}j}=b_{\mathrm{n}}$, $h_{\mathrm{s}i}=h_{\mathrm{s}j}=h_{\mathrm{s}}$ でこれは0次量についても同様であることと，$b_x^0=\mu h_x^0$, $h_y^0=b_y^0/\mu$ に注意して，式(7)により表面磁気力(2)を線形化すると，

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{m}} &= \frac{[\mu]}{2}\left(\frac{b_{\mathrm{n}i}^2}{\mu_1\mu_2}+h_{\mathrm{s}j}^2\right) \\ &= \frac{[\mu]}{2}\left(\frac{(b_y^0)^2}{\mu_1\mu_2}+(h_x^0)^2\right)+[\mu]\left(\frac{b_y^0}{\mu_1\mu_2}b_{yi}^1+h_x^0 h_{xj}^1\right) \qquad (10) \\ &\equiv T_{\mathrm{m}}^0+T_{\mathrm{m}}^1 \qquad (11) \end{aligned}$$

を得る．ここで，式(5)および(9)による磁気ポテンシャルで b_{yi}^1, h_{xj}^1 を表せば，以下の表式が導かれる．

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{m}}^1 &= -[h_y^0]b_{yi}^1+[b_x^0]h_{xj}^1 \\ &= [h_y^0]\left(\mu_i\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\right)_{y=0}-[b_x^0]\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial x}\right)_{y=0} \end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{[h_y^0]^2}{\mu_1^{-1}+\mu_2^{-1}} - \frac{[b_x^0]^2}{\mu_1+\mu_2}\right)k\eta \tag{12}$$

この表面磁気力は，磁性流体自由表面の安定性や波動の線形解析の際に必ず出会うもので [6, 9, 10]，0 次の磁束密度の法線成分と磁場の接線成分の寄与が互いに逆になることを示している．

4　複素解析

磁束密度と磁場が $\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0$ および $\nabla\times\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$ を満たすことを 2節で述べたが，2 次元解析の場合，これらの成分表示

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} = -\frac{\partial b_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial h_y}{\partial x} = \frac{\partial h_x}{\partial y} \tag{13}$$

を Cauchy-Riemann の関係と見て，複素解析を展開できる [4].

磁場の分布を求めるには，まず，自由表面が平らな Flat space $Z=X+iY$ で既知の分布を与えておき，これを写像変換で Real space $x+iy$ に写す．ここで $Y=0$ が自由表面にあたる．写像変換は，Flat space における微小要素 $\mathrm{d}Z$ が角度 θ だけ回転し，$e^{-\tau}$ だけ収縮して Real space の要素 $\mathrm{d}z$ に写るとして，

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}Z = e^{\{-\tau(Z)+i\theta(Z)\}} \tag{14}$$

で与える．これとその逆変換 $\mathrm{d}Z/\mathrm{d}z = e^{\tau-i\theta}$ からは，

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial y}{\partial Y} = e^{-\tau}\cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{\partial x}{\partial Y} = e^{-\tau}\sin\theta \tag{15}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = e^{\tau}\cos\theta, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} = -e^{\tau}\sin\theta \tag{16}$$

という変換関係が得られる．自由表面形状は，$\theta(Z)$ と $\tau(Z)$ を求めた後，(15) の X微分式を $Y=0$ に固定して X で積分し，媒介変数表示 $x=$

$x(X)$, $y=y(X)$ の形に求める．また，(16) と自由表面に沿う単位ベクトル $(s_x,\ s_y)=(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ からは，次のような接線方向微分が作られる．

$$\frac{\partial X}{\partial s}=s_x\frac{\partial X}{\partial x}+s_y\frac{\partial X}{\partial y}=-e^{\tau},\quad \frac{\partial Y}{\partial s}=s_x\frac{\partial Y}{\partial x}+s_y\frac{\partial Y}{\partial y}=0. \tag{17}$$

さて，Flat space における磁場は自由表面変形前の一様な磁場で与えるとし，磁場の水平成分 H_X と磁束密度の鉛直成分 B_Y で表す．これらは界面をはさんで連続である．このとき，スカラーポテンシャル $\Psi=-H_XX-(B_Y\mu)Y$ とベクトルポテンシャル (の z成分) $A=-B_YX+(\mu H_X)Y$ は，もとの磁場を

$$H_X=-\frac{\partial\Psi}{\partial X}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial Y},\quad B_Y=-\mu\frac{\partial\Psi}{\partial Y}=-\frac{\partial A}{\partial X} \tag{18}$$

のように与える．Real space におけるポテンシャルとの間に $\psi(s,\ n)=\Psi(X(s,n),\ Y(s,n))$, $a(s,\ n)=A(X(s,n),\ Y(s,n))$ のような関数関係を考えると，Real space における自由表面上で磁場の接線成分と磁束密度の法線成分を以下のように求めることができる．

$$\begin{cases} -h_{\mathrm{s}} &=& \dfrac{\partial\psi}{\partial s} &=& \dfrac{\partial X}{\partial s}\dfrac{\partial\Psi}{\partial X}+\dfrac{\partial Y}{\partial s}\dfrac{\partial\Psi}{\partial Y} &=& e^{\tau}H_X, \\ b_{\mathrm{n}} &=& \dfrac{\partial a}{\partial s} &=& \dfrac{\partial X}{\partial s}\dfrac{\partial A}{\partial X}+\dfrac{\partial Y}{\partial s}\dfrac{\partial A}{\partial Y} &=& e^{\tau}B_Y. \end{cases} \tag{19}$$

これより，界面をはさんで τ が連続なら，界面条件 (3) が自然に満足されることがわかる．

次に，式 (19) を

$$\begin{cases} h_x = \dfrac{b_x}{\mu} = -h_{\mathrm{s}}\cos\theta-\dfrac{b_{\mathrm{n}}}{\mu}\sin\theta = e^{\tau}H_X\cos\theta-e^{\tau}\dfrac{B_Y}{\mu}\sin\theta, \\ h_y = \dfrac{b_y}{\mu} = -h_{\mathrm{s}}\sin\theta+\dfrac{b_{\mathrm{n}}}{\mu}\cos\theta = e^{\tau}H_X\sin\theta+e^{\tau}\dfrac{B_Y}{\mu}\cos\theta \end{cases} \tag{20}$$

のように用い，これを式 (13) に代入すると

$$0=\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}=\ e^{\tau}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)(\mu H_X\cos\theta-B_Y\sin\theta)$$

$$-e^{\tau}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)(\mu H_X\sin\theta+B_Y\cos\theta), \tag{21}$$

$$\begin{aligned}0=\frac{\partial h_y}{\partial x}-\frac{\partial h_x}{\partial y}= &\ e^{\tau}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)(H_X\sin\theta+\frac{B_Y}{\mu}\cos\theta)\\ &+e^{\tau}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)(H_X\cos\theta-\frac{B_Y}{\mu}\sin\theta)\end{aligned} \tag{22}$$

が導かれ，これらが任意の H_X, B_Y および θ について成り立つことから θ と τ の間にも Cauchy-Riemann の関係が要請されることになる．さらに (16) から Cauchy-Riemann の関係は，$\dfrac{\partial\tau}{\partial X}=-\dfrac{\partial\theta}{\partial Y}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial X}=\dfrac{\partial\tau}{\partial Y}$ のように (x, y) を (X, Y) に代えても成り立つ．すなわち，θ, τ は Flat space でも Real space でも調和的である．この調和性が，無限遠で $\theta, \tau\to 0$ となるまで成り立つと仮定すれば，θ と τ は Hilbert 変換

$$\tau(X)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(X')}{X'-X}\mathrm{d}X'. \tag{23}$$

で関係づけられる．

Bernoulli 方程式 (1) における表面張力は，表面変位が小さいと仮定する前は $p_\mathrm{t}=\Gamma(\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y})/(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}$ (Γ: 表面張力係数，$(\dot{x})\equiv\partial x/\partial X$ など) であるが，式 (15) を用いると簡単に $p_\mathrm{t}=-\Gamma e^{\tau}\dot{\theta}$ と書き換えられる．また表面磁気力は，式 (19) により，

$$T_\mathrm{m}=\frac{[\mu]e^{2\tau}}{2}\left(\frac{B_Y^2}{\mu_1\mu_2}+H_X^2\right) \tag{24}$$

のように表され，H_X, B_Y の正負にかかわらず $[\mu]$ に一致した定符号となる．以上により，X で偏微分した Bernoulli 方程式からは，

$$e^{-\tau}\sin\theta-\frac{\Gamma}{\rho g}\frac{\partial}{\partial X}\left(e^{\tau}\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)+\frac{[\mu]}{2\rho g}\frac{\partial}{\partial X}e^{2\tau}\left(\frac{B_Y^2}{\mu_1\mu_2}+H_X^2\right)=0 \tag{25}$$

のような $\theta(X)$ と $\tau(X)$ の方程式が導かれ，Hilbert 変換を併用すれば，これを解いて $\theta(X)$ と $\tau(X)$ を求めることができる．

5　複素解析と線形解析の関係

前の2つの節で紹介した線形解析と複素解析の関係をもう少し詳しく調べてみよう．複素解析を定常波の解析，導体や絶縁体と接する領域の電場解析，透磁率無限大の媒質と接する領域の磁場解析に適用するときは，流線，等ポテンシャル線，電気力線などが境界と一致しているため，複素解析の威力が充分発揮される．しかし今の問題では，界面両側の媒質の透磁率がいずれも有限なため，界面を横切る磁束線は折れ曲がり，両領域の等値なポテンシャル線は，界面上で相互に交わる．逆に言うと，Real space の界面に写像される線が，両領域の Flat space それぞれに存在する．したがって，ポテンシャルの Flat space における座標 (X, Y)，Real space におけるそれらの傾斜角と収縮を表す (θ, τ) なども両領域で区別しておく必要があり，添字 $i = 1, 2$ をつける．また界面の傾斜角 γ を θ_i とは区別する．以上により，界面における磁場と磁束密度は，次の2通りに表される．

$$h_{xi} = -h_\mathrm{s} \cos\gamma - \frac{b_\mathrm{n}}{\mu_i} \sin\gamma \quad = e^{\tau_i}\left(H_X \cos\theta_i - \frac{B_Y}{\mu_i} \sin\theta_i\right), \tag{26}$$

$$b_{yi} = -\mu_i h_\mathrm{s} \sin\gamma + b_\mathrm{n} \cos\gamma = e^{\tau_i}(\mu_i H_X \sin\theta_i + B_Y \cos\theta_i). \tag{27}$$

これら，およびその両辺に μ_i あるいは $1/\mu_i$ をかけたものについて両領域間で差をとり，界面条件 (3) を考慮すると，

$$-\left[\frac{1}{\mu}\right] b_\mathrm{n} \sin\gamma = [H_X e^\tau \cos\theta] - \left[\frac{B_Y}{\mu} e^\tau \sin\theta\right], \tag{28}$$

$$-[\mu]\, h_\mathrm{s} \cos\gamma = [\mu H_X e^\tau \cos\theta] - [B_Y e^\tau \sin\theta], \tag{29}$$

$$-[\mu]\, h_\mathrm{s} \sin\gamma = [\mu H_X e^\tau \sin\theta] + [B_Y e^\tau \cos\theta], \tag{30}$$

$$\left[\frac{1}{\mu}\right] b_\mathrm{n} \cos\gamma = [H_X e^\tau \sin\theta] + \left[\frac{B_Y}{\mu} e^\tau \cos\theta\right] \tag{31}$$

が得られるが，これらを組み合わせて

$$0 = [H_X\alpha] - [B_Y\beta/\mu], \tag{32}$$

$$0 = [\mu H_X\beta] + [B_Y\alpha], \tag{33}$$

$$[1/\mu]b_{\rm n} = [H_X\beta] + [B_Y\alpha/\mu], \tag{34}$$

$$-[\mu]h_{\rm s} = [\mu H_X\alpha] - [B_Y\beta] \tag{35}$$

を導くことができる．ただし$\alpha_i \equiv e^{\tau_i}\cos(\theta_i - \gamma) = \dfrac{\partial Y_i}{\partial n} = -\dfrac{\partial X_i}{\partial s}$, $\beta_i \equiv e^{\tau_i}\sin(\theta_i - \gamma) = \dfrac{\partial Y_i}{\partial s} = \dfrac{\partial X_i}{\partial n}$ と定義した．特に β_i は，法線方向から界面に近づくときの磁束線の曲がり具合，あるいは界面からの $Y = 0$ のずれを表すパラメータであるが，これを α_i で表す

$$\beta_i = -\frac{[\alpha]/[\mu]}{\mu_1 + \mu_2}\mu_i\left(\frac{B_Y}{H_X} + \mu_j^2\frac{H_X}{B_Y}\right), \ [\beta] = \frac{[\alpha]}{\mu_1 + \mu_2}\left(\mu_1\mu_2\frac{H_X}{B_Y} - \frac{B_Y}{H_X}\right) \tag{36}$$

を式 (32), (33) より導くことができる．ここで添え字 j は，i とは逆の領域を示す．また式 (34), (35) より，$b_{\rm n}, h_{\rm s}$ を α_i で

$$b_{\rm n} = \frac{H_X[\beta] + B_Y[\alpha/\mu]}{[1/\mu]} = \frac{-\mu_1^2 S_2\alpha_2 + \mu_2^2 S_1\alpha_1}{(\mu_2^2 - \mu_1^2)B_Y}, \tag{37}$$

$$-h_{\rm s} = \frac{H_X[\mu\alpha] - B_Y[\beta]}{[\mu]} = \frac{S_2\alpha_2 - S_1\alpha_1}{(\mu_2^2 - \mu_1^2)H_X} \tag{38}$$

と表すこともできる．ただし，$S_i \equiv B_Y^2 + \mu_i^2 H_X^2$ を定義した．式 (37), (38) により，表面磁気力は以下のようになる．

$$T_{\rm m} = \frac{[\mu]e^{\tau_1+\tau_2}}{2}\left\{\left(\frac{B_Y^2}{\mu_1\mu_2} + H_X^2\right)\cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{[\mu]B_Y H_X}{\mu_1\mu_2}\sin(\theta_2 - \theta_1)\right\}. \tag{39}$$

式 (26), (27) において γ, θ, τ が小さいとする線形化を行えば，

$$h_{xi}^0 + h_{xi}^1 = -h_{\rm s}^0 - h_{\rm s}^1 - \frac{b_{\rm n}^0}{\mu_i}\gamma = H_X + H_X\tau_i - \frac{B_Y}{\mu_i}\theta_i, \tag{40}$$

$$b_{yi}^0 + b_{yi}^1 = -\mu_i h_{\rm s}^0\gamma + b_{\rm n}^0 + b_{\rm n}^1 = \mu_i H_X\theta_i + B_Y + B_Y\tau_i \tag{41}$$

を得るが，$\gamma \simeq \eta'$, $h^0_{xi} = -h^0_{\mathrm{s}}$, $b^0_{\mathrm{n}}/\mu_i = h^0_{yi}$, $b^0_{yi} = b^0_{\mathrm{n}}$, $-\mu_i h^0_{\mathrm{s}} = b^0_{xi}$ より第1辺と第2辺の関係は明らかに式 (7) そのものである．ここで，3節で求めた磁気ポテンシャル (5) とその未定係数 (9) から磁場と磁束密度の各成分を計算しておくと，

$$h^1_{xi} = -\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = [\mu]\frac{\pm(b^0_y/\mu_i)\eta' + h^0_x k\eta}{\mu_1 + \mu_2}, \tag{42}$$

$$b^1_{yi} = -\mu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = [\mu]\frac{\pm\mu_i h^0_x \eta' - b^0_y k\eta}{\mu_1 + \mu_2}, \tag{43}$$

$$-h^1_{\mathrm{s}} = h^1_{xi} + h^0_{yi}\eta' = h^0_x \frac{2(b^0_y/h^0_x)\eta' + [\mu]k\eta}{\mu_1 + \mu_2}, \tag{44}$$

$$b^1_{\mathrm{n}} = b^1_{yi} - b^0_{xi}\eta' = b^0_y \frac{-2\mu_1\mu_2(h^0_x/b^0_y)\eta' - [\mu]k\eta}{\mu_1 + \mu_2} \tag{45}$$

となる．ただし複号は上が上層，下が下層に対応する．

式 (37), (38) までの解析は，$[\alpha] \to 0$，すなわち，α を連続とする極限で前節の複素解析にもどる．このとき式 (36) で $\beta_i \to 0$ が示すように，$Y = 0$ は界面に一致し，$X = \mathrm{const.}$ は界面と直交するようになる．また $\alpha_1 = \alpha_2 = e^\tau$ とおけば，式 (37), (38) は (19) に，また表面磁気力 (39) は (24) にもどる．複素解析では，(θ, τ) を未知量として，これらを調和性と Bernoulli 方程式から求めていた．

ところでこの極限はとらないで，$h^0_{xi} = H_X$, $b^0_{yi} = B_Y$ として式 (40), (41) の第1辺と第3辺を比較すると，これらは (θ_i, τ_i) で (h^1_{xi}, b^1_{yi}) を表す式となっている．したがってもし (θ_i, τ_i) が求められれば，式 (42), (43) の妥当性をチェックできることになるが，ここでは (θ_i, τ_i) の調和性が h^1_{xi}, b^1_{yi} の間の Cauchy-Riemann の関係を保証していることを指摘するにとどめ，式 (40), (41) を (θ_i, τ_i) について逆に解いた結果を示す．

$$\theta_i = [\mu]\frac{\pm(\mu_i^2 H_X^2 - B_Y^2)\eta' - 2\mu_i H_X B_Y k\eta}{S_i(\mu_1 + \mu_2)}, \tag{46}$$

$$\tau_i = [\mu]\frac{\pm 2\mu_i H_X B_Y \eta' + (\mu_i^2 H_X^2 - B_Y^2)k\eta}{S_i(\mu_1 + \mu_2)}. \tag{47}$$

すなわち線形解析では，複素解析における θ, τ の連続性は仮定していない．

6　おわりに

これまで行ってきた磁性流体自由表面波の線形解析と複素解析の関係を調べるため，界面両側の媒質の透磁率を有限としてより詳しく解析した．複素解析では，Flat space の $Y = 0$ という線を Real space の界面に対応させることで，界面を横切って θ, τ を連続にした．これは折れ曲がった磁束線を真っ直ぐにし，表面磁気力分布をならして緩やかにすることにあたる．一方，線形解析は界面が水平な状態を基本として，微小な表面変位について界面条件，表面磁気力を線形化する．それ以上の仮定はしていないため，磁束線の折れ曲がりの効果は取り込まれている．

4節の複素解析の代わりに，5節で述べた方法による解析は可能であろうか？　今度は，Flat space から Real space への写像変換が上層・下層それぞれにあり，界面の傾斜角は写像変換の傾斜角と必ずしも一致しないので，未知量は $\theta_{1,2}$, $\tau_{1,2}$, γ，または $\alpha_i - i\beta_i = e^{\tau_i - i\theta_i + i\gamma}$ より $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, γ となる．$\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ は，$\theta_{1,2}$, $\tau_{1,2}$ と同様にそれぞれの領域で調和的なので，α_i, β_i 間の Hilbert 変換と，界面条件から導いた式 (32), (33) によって，界面形状の関数として決められる．一方，磁束密度の法線成分と磁場の接線成分は，式 (34), (35) のように$\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ で表されているので，表面磁気力 (39) を Bernoulli 方程式に使う．表面張力 $p_{\mathrm{t}} = -\Gamma e^{\tau}\dot{\theta}$ の $\theta = \gamma, \tau$ については，磁場とは別に，複素解析で用いた Hilbert 変換で θ と τ を関係づける．こうして方程式を閉じ，これを解いて $\theta(X)$, $\tau(X)$ を求めれば，式 (15) の積分によって

自由表面形状が得られる．前節の方法による解析を記述すると一応以上のようになるが，具体的にはつっこんだ検討を要する点もあるため，現状では，複素解析を用いるのが適当であるように思われる．

参考文献

[1] A.Gailitis: Formation of the hexagonal pattern on the surface of a magnetic fluid in an magnetic field; J. Fluid Mech., **82**, pp.401–413 (1977).

[2] E.Twombly and J.W.Thomas: Mathematical theory of non-linear waves on the surface of a magnetic fluid; IEEE Trans. Magn., **MAG-16**, pp.214–220 (1980).

[3] E.E.Twombly and J.W.Thomas: Bifurcating instability of the free surface of a ferrofluid; SIAM J. Math. Anal., **14**, pp.736–766 (1983).

[4] 水田　洋: 強磁場における磁性流体表面波の解析; 京都大学数理解析研究所講究録「波の非線形現象の数理とその応用」, **949**, pp.40–50 (1996).

[5] R.E.Rosensweig: Ferrohydrodynamics (Cambridge University Press, Cambridge) Chap.4, Chap.5 (1985).

[6] R.E.Zelazo and J.R.Melcher: Dynamics and stability of ferrofluids: surface interactions; J. Fluid. Mech., **39**, pp.1–24 (1969).

[7] 水田　洋: 表面と界面のある磁性流体の理論解析; 京都大学数理解析研究所講究録「流体における波動現象の数理とその応用」, **830**, pp.226–235 (1993).

[8] 水田　洋: 二層磁性流体における表面波と界面波の相互作用; 京都大学数理解析研究所講究録「流体における波動現象の数理とその応用」, **866**, pp.263–276 (1994).

[9] R.E.Rosensweig: Ferrohydrodynamics (Cambridge University Press, Cambridge) Chap.7 (1985).

[10] M.D.Cowley and R.E.Rosensweig: The interfacial stability of a ferromagnetic fluid; J. Fluid. Mech., **30**, pp.671–688 (1967).