

非一様な気体中における三角波と鋸歯状波の伝播

北大・工 井上 良紀 (Yoshinori Inoue)

北大・工 吉本 恵 (Megumi Yoshimoto)

§1. はじめに

非一様な媒質中を伝播する波動の研究は、波動論の上でも極めて重要なものであり、古い歴史をもつ。例えば、Rayleigh (1887) は前世紀に成層圏内での波の伝播をすでに解析している。このような研究のなかでも、とりわけ線形波に対する JWKB 法 (1924, 1926) と呼ばれる数学的技法を駆使して短波長の波の伝播を近似的に解くアプローチは、大きな研究成果をあげた。近年は、非一様な媒質中の非線形波動伝播に注目が集まり、多くの研究がなされてきている。

遠方場において、弱い非一様性の効果が、弱い非線形効果と弱い散逸性効果を競合しているような波動現象は、一般化された Burgers 方程式によって記述される^[1]。著者達の知る限りにおいて、一般化された Burgers 方程式に対する初期-境界値問題を厳密に解いた例はない。そこで、まずこの研究においては、音響 Reynolds 数が極めて大きいという条件のもとに、初期-境界値問題を設定し、波の漸近的な振る舞いを厳密に調べる。このような条件下においても、波がもつ多くの興味ある一般的性質を導出することができる。

ここでは、初期の静止状態において、気体は x^* 軸の方向にベキ法則に従う密度分布 $\bar{\rho} = (1 + \alpha x)^{-n}$ (α と n は定数) をもつと仮定する。このとき、 $x = 0$ にある音源から右方の半空間に正弦的な平面波が放射されるものとする。この波の非線形伝播過程を解析することが本研究の目的である。もしも媒質が一様であるとすれば、必ず衝撃波が形成され、遠方では、先頭波は三角波に、後継する波列は鋸歯状波へと発展し、無限遠方では波は消滅する。以下で、非一様な媒質中の非線形波が、これとは全く異なる挙動を示すことが明らかにされるであろう。

§2. 一般化された Burgers 方程式

一般化された Burgers 方程式を導出する際に、以下のことが仮定されている。

(i) 弱非線形性: 音源での流速の最大値 u_0 が、音源での音速 c_0 に比べて十分小さい。つまり音響 Mach 数 M が、

$$0 < M \equiv \frac{u_0}{c_0} \ll 1$$

の条件を満たす。

(ii) 弱散逸性: 散逸性は弱いものの 2 次近似にはその効果が含まれるとすると、音響 Reynolds 数 Re に関しては

$$Re = \frac{(\gamma + 1)c_0 u_0}{\delta \omega} \gtrsim 1$$

となる。ここで、 γ は理想気体の比熱比、 δ は音の拡散率、 ω は音源の角振動数である。

(iii) 非一様性: 非一様性は弱く、弱非線形性と釣り合っているものとすれば、例えば先の密度分布に対しては、

$$\alpha = O(M)$$

でなければならない。

一般化された Burgers 方程式は次の形に書くことができる^[1]。

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\sqrt{\bar{c}(\sigma)}}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \quad (1)$$

$$U = \frac{u^*}{u_0 \sqrt{\bar{c}(x)}}, \quad \sigma = \frac{M(\gamma + 1)}{2} \int_0^x \frac{dx}{[\bar{c}(x)]^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau = t - \int_0^x \frac{dx}{\bar{c}(x)} \quad (2)$$

ただし、時刻 t^* と音源からの距離 x^* は、 $t^* = \omega t$, $x^* = k_0 x$ ($k_0 = \omega/c_0$) のように無次元化してある。 u^* は流速、 $\bar{c}(x)$ は c_0 で無次元化された局所音速を表す。明らかに、無次元化された初期密度分布と温度分布をそれぞれ $\bar{\rho}(x)$, $\bar{T}(x)$ ($\bar{\rho}(0) = \bar{T}(0) = 1$) とすれば、 $\bar{c}^2(x) = 1/\bar{\rho}(x) = \bar{T}(x)$ の関係が成り立つ。特に、(1) と (2) において、 $\bar{c}(x) \equiv 1$ とすると、通常の Burgers 方程式になることを注意しておく。

§3. $Re \rightarrow \infty$ の場合の厳密解に関する一般論

通常 Burgers 方程式は、Cole-Hopf 変換によって、熱伝導方程式を解く問題に帰着され、解析的に厳密な解が得られる。しかし、一般化された Burgers 方程式に対しては、このような一般的な解法は、まだ知られていない。ここでは、 $Re \rightarrow \infty$ という制約された条件のもとに厳密な解を求めることにしよう^[2]。

衝撃波が形成される以前であれば、式 (1) の右辺は無視できて、

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \quad (3)$$

となる。

式 (3) は、一様媒質中の弱非線形進行波の伝播を記述する単一波の方程式と同じ形をしており、

$$\text{境界条件 } U(0, \tau) = \sin \tau, (\tau \geq 0) \quad ; \quad \text{初期条件 } U(\sigma, 0) = 0, (\sigma \geq 0) \quad (4)$$

を満足する厳密解は容易に得られ、パラメータ ξ を用いた表示で

$$U = \sin \xi, \quad \xi = \tau + \sigma \sin \xi \quad (\sigma \geq 0, \xi \geq 0) \quad (5)$$

のように表せる。周知のように、衝撃波形成距離は $\sigma = 1$ である。しかし次節でみるように、 $\sigma = 1$ が実際の物理空間で実現され得ないときには、衝撃波は形成されない。

衝撃波が形成される時、 $\sigma > 1$ で解 (5) は多価となるが、この場合には、これに等面積則を適用すると衝撃波形成後の波動伝播を簡単に解析できる^{[3][4]}。最先端をゆく波の正の位相をもつ部分について、衝撃波の振幅 U_s と波の長さ l は、

$$U_s = 2\sqrt{\sigma-1}/\sigma, \quad l = 2 \left(\sqrt{\sigma-1} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right) \quad (6)$$

となる。 σ が十分に大きな値をとり得る場合には、波のこの部分はいわゆる“三角波” (triangular wave) に漸近する。そうでない場合には、波は三角波へと成長する途中の段階でその伝播過程を終了する。(6) から明らかに、 $\sigma \rightarrow \infty$ で、 $U_s \rightarrow 2/\sqrt{\sigma}$, $l \rightarrow 2\sqrt{\sigma}$ 。

また、後続の波列は、 σ が十分大きな値をとり得るとき、

$$U = \begin{cases} \frac{\pi - \bar{\tau}}{1 + \sigma} & (0 \leq \bar{\tau} < \pi) \\ -\frac{\pi + \bar{\tau}}{1 + \sigma} & (-\pi \leq \bar{\tau} < 0) \quad (\bar{\tau} = \tau - 2\pi) \end{cases} \quad (7)$$

で与えられる“鋸歯状波” (sawtooth wave) となる^[5]。このとき、 $\tau = t - z$ ($z \equiv \int_0^x dx/\bar{c}(x)$) であるから、座標 z に関して、衝撃波は 2π の間隔で並ぶ。このことは、もちろん実空間座標 x に関する等間隔性を意味しない。したがって、場合によっては、有限個の衝撃波しか現われないこともある。また、 $\sigma \rightarrow \infty$ のとき、 u^* は音源における速度振幅 u_0 には依存しなくなり、いわゆる飽和現象が起こる。また、(7) から $\sigma \rightarrow \infty$ のとき、 $U_s \rightarrow 2\pi/\sigma$ となり、音源から十分離れたところでは、速度振幅に関しては、鋸歯状波に対して三角波が卓越することがわかる。

§4. 密度分布が代数関数である媒質中での波動伝播

波の伝播過程を正確に把握するために、初期の密度分布が $\bar{\rho} = (1 + \alpha x)^{-n}$ のような簡単な形で与えられるものと仮定する^[6]。

まず、一様媒質中の波動伝播とは異なり

$$\begin{aligned} & \frac{M(\gamma+1)}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{[\bar{c}(x)]^{3/2}} \\ & = \frac{1}{\nu} [(1 + \alpha x)^m - 1] \leq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

の場合には衝撃波は形成されないことを注意しておく (図 2, 図 3 の斜線部)。ただし、 $\nu = [\alpha(4 - 3n)]/[2M(\gamma+1)]$, $m = (4 - 3n)/4$ 。

次に、 σ が大きな値をとり得る場合について、三角波と鋸歯状波の $\sigma \rightarrow \infty$ における漸近的なふるまいを調べよう。三角波の衝撃波における速度の跳びの量は

$$\frac{u_s}{M} \rightarrow 2\sigma^{\frac{5n-4}{2(4-3n)}} \quad (\sigma \rightarrow \infty) \quad (9)$$

で与えられる。一方、鋸歯状波に関しては

$$\frac{u_s}{M} \rightarrow 2\pi\nu^{\frac{n}{4-3n}} \sigma^{\frac{4(n-1)}{4-3n}} \quad (\sigma \rightarrow \infty) \quad (10)$$

となる。(9),(10) にもとづき波の漸近的なふるまいを調べた結果を表1に記す。ただし、 $\alpha > 0$ の場合は、 $x \rightarrow \infty$ 、 $\alpha < 0$ の場合は $x \rightarrow 1/|\alpha|$ のような極限を考えている。

$\alpha > 0 (x \rightarrow \infty)$

n	u_{s1}	u_{s2}	全体の波のふるまい
$n > \frac{4}{3}$	$+\infty$	$+\infty$	三角波, 鋸歯状波に 発達せず終わり得る
$1 < n \leq \frac{4}{3}$			三角波が鋸歯状波に 対して卓越する
$n = 1$		$2\pi M \nu_2$	
$\frac{4}{5} < n < 1$		0	三角波のみが存在する
$n = \frac{4}{5}$	$2M\sqrt{\nu_1}$		
$n < \frac{4}{5}$	0		三角波が鋸歯状波に 対して卓越する

$$\nu_1 = \frac{4\alpha}{5M(\gamma+1)}, \quad \nu_2 = \frac{\alpha}{2M(\gamma+1)}$$

$\alpha < 0 (x \rightarrow 1/|\alpha|)$

n	u_{s1}	u_{s2}	全体の波のふるまい
$n > \frac{4}{3}$	0	0	三角波が鋸歯状波に 対して卓越する
$0 < n \leq \frac{4}{3}$			三角波, 鋸歯状波に 発達せず終わる
$n < 0$	∞	∞	

表1 n, α による速度振幅の漸近的挙動
 u_{s1} :先頭波の速度振幅 (衝撃波における跳びの量)
 u_{s2} :後続波の速度振幅 (衝撃波における跳びの量)

衝撃波の速度に関する跳びの量 u_s が伝播距離とともにどのように変化するかを知るためには、若干複雑な計算を行わねばならない。結果は図1に示すように、その発展過程を5つのタイプに分類できる。パラメータ平面 (n, ϵ) における各々のタイプの波の存在領域が図2、図3に示されている。先頭波（後続波）の場合、タイプIVは、 $n = 4/5, \epsilon < 5$ ($n = 1, \epsilon < 8$)、タイプVは、 $n = 4/5, \epsilon \geq 5$ ($n = 1, \epsilon \geq 8$) において現れる。

図4-図7に、等面積則にしたがって計算した、パラメータ (α, n) による速度波形の発展の相違を示す。

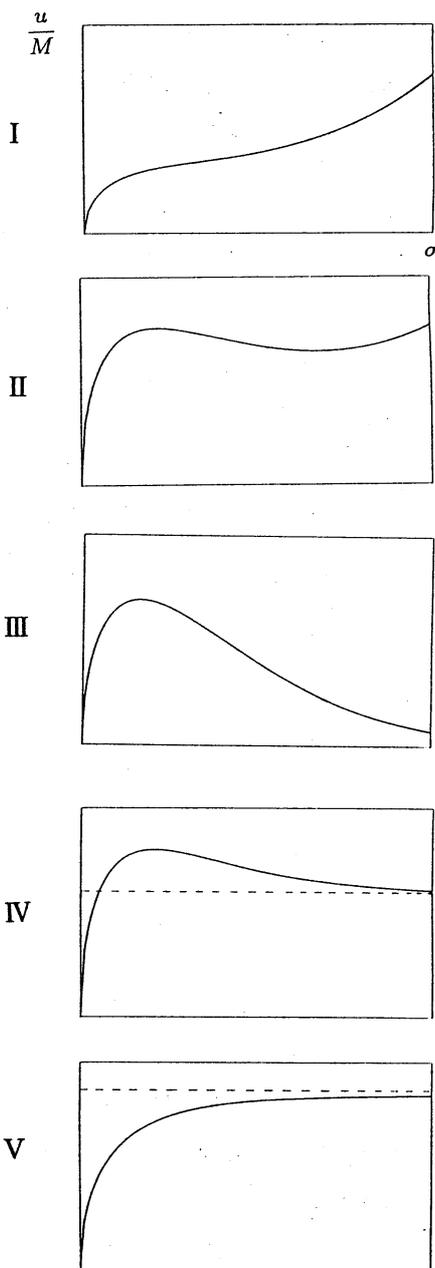


図1.
伝播に伴う u_s の変化の違いにより分類した5つのタイプの波

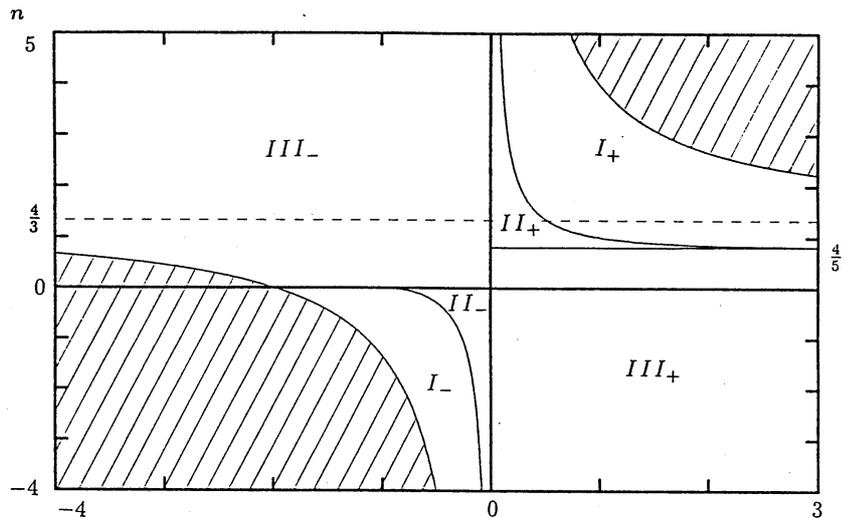


図2.
 (ϵ, n) 平面における各タイプの波の存在領域
(先頭波)
斜線部では衝撃波は形成されない。
 $\epsilon = 4\alpha / M(\gamma + 1)$

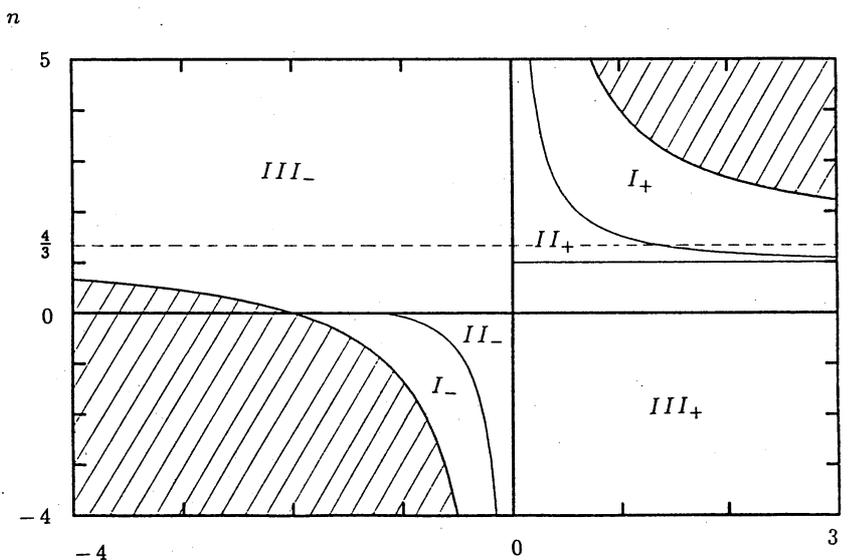


図3.
 (ϵ, n) 平面における各タイプの波の存在領域
(後続波)

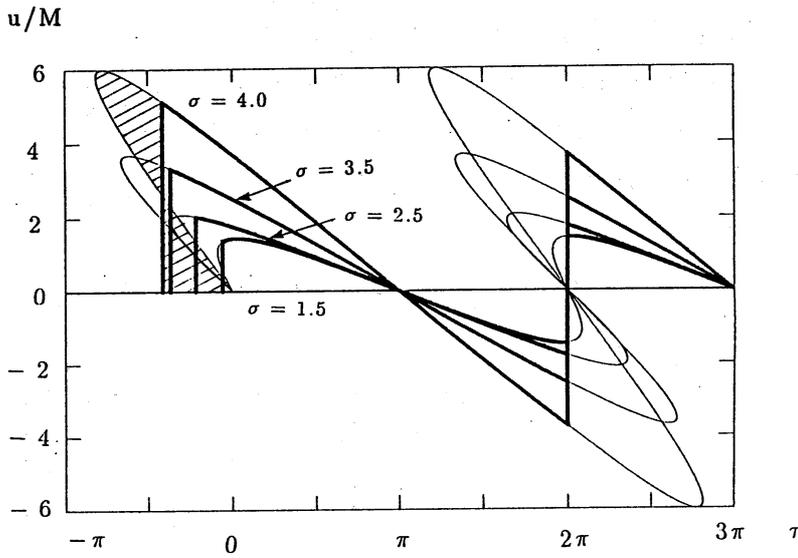


図4.

衝撃波形成後の等面積則による波形の決定(三角波と鋸歯状波)

$$u = u^* / c_0,$$

$$\bar{\rho} = (1 + \alpha x)^{-2}, M = 0.01,$$

$$\alpha = 0.005, \gamma = 1.4$$

細線は式(3)の多価の解を, 太線は等面積則により決まる速度波形を表わす. 等面積則とは, 例えば波の伝播距離が $\sigma = 4$ の図で, 二つの斜線部の面積が等しくなるように縦線を引くと, それが不連続面としての衝撃波面を与える法則をいう.

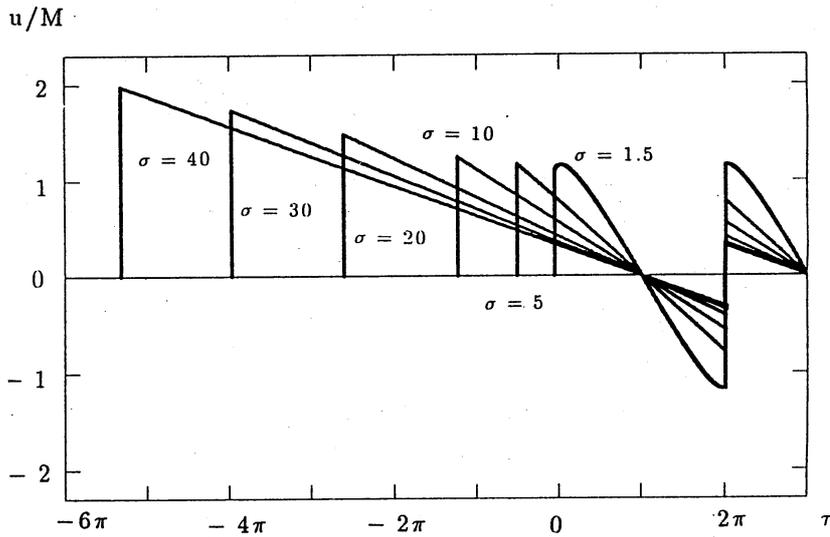


図5.

$$\bar{\rho} = (1 + \alpha x)^{-0.9}, M = 0.01,$$

$$\alpha = 0.006, \gamma = 1.4$$

音源から非常に離れたところでは, 速度波形に関しては, 実質上三角波のみが存在する.

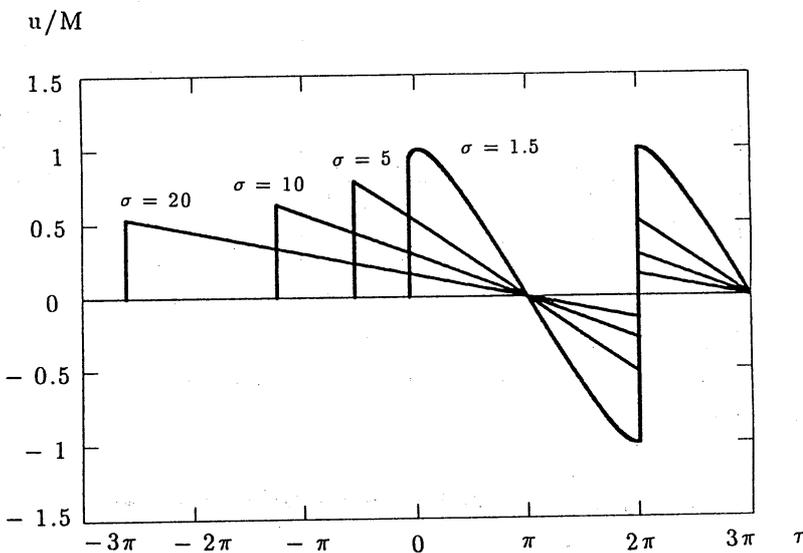


図6.

$$\bar{\rho} = (1 + \alpha x)^{-0.5}, M = 0.01,$$

$$\alpha = 0.006, \gamma = 1.4$$

σ の大きいところで, 速度波形に関しては, 三角波, 鋸歯状波ともに減衰するが, 鋸歯状波に対し三角波が卓越する.

$\sigma \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) で, 速度 u は消滅する.

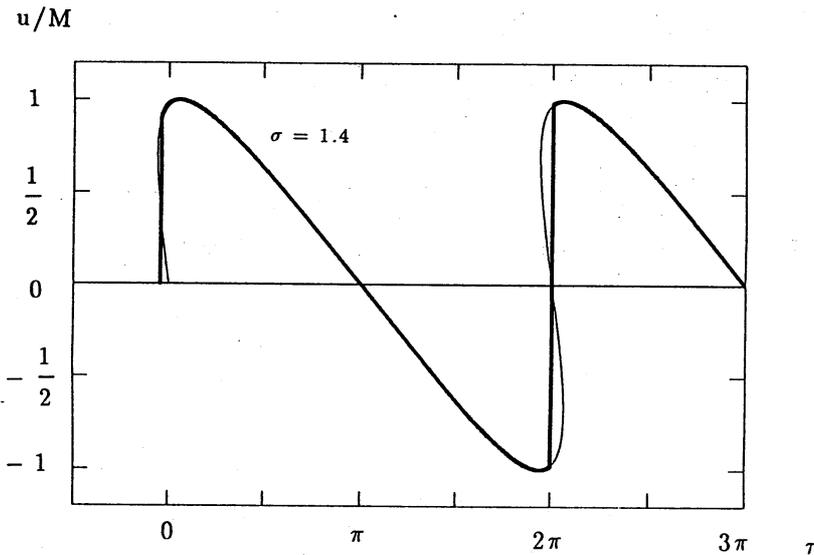


図7.

$$\bar{\rho} = (1 + \alpha x)^{-20}, M = 0.01$$

$$\alpha = 0.0006, \gamma = 1.4$$

σ が十分に大きな値をとり得ないために三角波へと成長する途中の段階で伝播過程を終了する。 $\sigma = 1.48$ が $x = \infty$ に対応する。

§5. 結論と考察

密度分布が代数的な非一様性をもつ気体中に、音源から平面正弦波が放射されたときの弱非線形伝播を解析することがこの研究の目的である。今回は、音響 Reynolds 数 $Re \rightarrow \infty$ の極限を考えることによって、一般化された Burgers 方程式の解析的に厳密な解を得ることができた。主な結果をまとめると以下のようなになる。

- (1) 一様な媒質中の伝播とは異なり、音源で与える擾乱の速度振幅と初期密度分布によっては、衝撃波が形成されない場合がある。また、衝撃波が形成されるような場合においても、波が三角波と鋸歯状波に十分に発達せずに伝播過程を終えることもある。
- (2) 非一様な媒質中の三角波と鋸歯状波は、一様な媒質中の三角波と鋸歯状波とは異なるふるまいをする。例えば、鋸歯状波に関しては、衝撃波の間隔は伝播とともに増大する場合もあれば、減少してゆく場合もある。また、非一様性が強い場合には、衝撃波の速度振幅が増大することもある。
- (3) 鋸歯状波の速度振幅は、音源から十分離れたところでは、初期の速度振幅には依存しない、いわゆる飽和現象を起こす。
- (4) $x \rightarrow \infty$ ($\alpha > 0$), $x \rightarrow 1/|\alpha|$ ($\alpha < 0$) のときに、衝撃波の速度振幅が発散するか、ゼロでない有限値になるか、あるいはゼロになるかは、密度分布関数のべき指標 n によって決まる。
- (5) 先頭を進む正の位相をもつ波あるいは後続の波列を、衝撃波形成の有無と衝撃波の速度振幅の変化の仕方により、6つのタイプに分類できる (図1参照)。波がいずれのタイプに属するかは、パラメータ n と $\varepsilon (= 4\alpha/M(\gamma+1))$ によって決まる (図2, 図3参照)。ここで、 ε は非一様性と非線形性の強さの比を表す一つのパラメータである。

(6) パラメータ α が正のとき, 先頭の波面が有限の時間で無限遠に達する場合がある. α が負のときは, $n \geq 2$ であれば, 点 $x = 1/|\alpha|$ に達するのに無限の時間がかかるのに対して, $n < 2$ であれば有限の時間でその点に到達するので, そこで波は反射する.

最後に得られた解の有効性について考察しておこう. 一般化された Burgers 方程式を導出するにあたり, 我々は最低次の摂動解 $U(x, t)$ が波動方程式に従うことを前提とした. このためには,

$$\left| \frac{d\bar{c}}{dx} \right| = O(M), \quad \frac{1}{\sqrt{\bar{c}}} = O(1)$$

が満足されなければならない. これらの条件は, 一般に, $\alpha > 0$ のときは, 波が無限遠点に近づいたとき, $\alpha < 0$ のときは, 波が $x = 1/|\alpha|$ に近づいたときに, 破綻する. ただし, $\alpha > 0$, $0 \leq n \leq 2$ であれば, 上の二つの条件はいたるところで満足される. しかし, $0 < n \leq 2$ ($\alpha > 0$) に対しては, $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{c}(x) = \infty$ であり, 無限遠点で流速 u^* も発散する. したがって, 無限遠点あるいは点 $x = 1/|\alpha|$ の近傍ではいずれの摂動解も有効ではなくなることを注意しておく.

参考文献

- [1] Y. Inoue, N. Kubo, and M. Yoshimoto: (unpublished)
- [2] 井上良紀: 非一様な気体中における弱非線形波動の伝播: 数理解析研究所講義録 949 (1996)98.
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1987) 2nd ed.
- [4] G. B. Whitham: *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York, 1974).
- [5] O. V. Rudenko and S. I. Soluyan: *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (Consultants Bureau, New York, 1977).
- [6] Y. Inoue, N. Kubo, and M. Yoshimoto: *Weakly nonlinear propagation of plane waves in a non-uniform gas. In Nonlinear Acoustics in Perspective* (ed. R.J.Wei), pp.76-81. Nanjing University Press.