

## Viscous fingering における分岐現象

愛媛大理 松岡千博 (Chihiro Matsuoka)

放射状 Hele-Shaw cell において、グリセリンや高分子溶液などの高粘性流体を空気で置換すると境界の分岐現象がおこる (Fig.1)。境界は Darcy 則によって与えられる速度に従って動く [1]。この速度は多孔質体を通過する浸透流の速度であり、Saffman-Taylor finger のように形を変えずに動く finger の場合には一定の値をとる [2]。

分岐が生じるような系では、空気のわき出し流量を一定に保っても finger が細くなるに従ってその速度が大きくなることが報告されている [3]。従って系は非定常であり、非平衡の状態にある。単位時間あたりのわき出し流量は一定であるから、この非定常非平衡性は source の性質によるものではなく、境界の不安定性のみに関係しているとみなすことができる。本研究では、境界における系のエネルギー変分を考察することによって、境界条件そのものの不安定性とそれによって生じる finger の分岐のメカニズムを明らかにする。

今、空気と粘性流体との境界面を変位させるのに要する全仕事を考える。変位以前の境界面に垂直方向の単位ベクトルを  $e_n$ 、この面を parametrize する  $\xi_1, \xi_2$  方向の基底ベクトルを  $e_1, e_2$  とすると (Fig.2)

$$e_i \cdot e_j = \gamma_{ij}, \quad e^i \cdot e^j = \gamma^{ij}, \quad e^i \cdot e_j = \gamma_j^i, \quad (1)$$

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} [e_1 \times e_2], \quad \gamma = \det \gamma_{ij}$$

なる関係が成り立つ。ここで上付き添え字は反変成分、 $[ \ ]$  はベクトル積を表す。計量因子  $\gamma_{ij}$  は物体計量と呼ばれ、これを用いると物体中の二近傍点間の距離  $ds$  は

$$ds^2 = \gamma_{ij}(\xi, t) d\xi^i d\xi^j \quad (2)$$

と書ける [4]。

物体計量テンソル  $\gamma_{ij}$  は物体の形を表し、形が変化する場合、その場合に限り変化する。 $d\xi^i$  は時間  $t$  に依存せず、 $\gamma_{ij}$  の方が時間とともに変化する。すなわち基底ベクトル  $e_i$  が時間に依存する。弾性体論等において通常用いられる空間計量テンソル  $g_{ij}$  を用いると  $ds$  は

$$ds^2 = g_{ij}(\boldsymbol{x}) dx^i dx^j \quad (3)$$

となる。 $g_{ij}$  は (1) 式と全く同様に基底ベクトルを用いて定義できるが、この場合  $g_{ij}$  (従って  $e_i$  も) は時間に依存せず、二つの物質点の占める位置の差  $dx^i$  が時間とともに変化する。 $\gamma_{ij}$  を用いても  $g_{ij}$  と同様にテンソル場が定義でき、微分幾何学的な諸量 (面積等) は空間計量を用いる場合と全く変わらない。この記述を採用する利点は系のレオロジー的性質を考察する際に現れる。以下の議論では物体計量テンソル  $\gamma_{ij}$  を用いる。

今、境界面がある無限小変位を行ったものとする。この変位に要する仕事  $\delta R$  は系の歪エネルギーの変化  $\delta W$  と表面積の変化  $\delta A$  とを用いて

$$\delta R = \delta W + \alpha \delta A \quad (4)$$

と書ける。ここで  $\alpha$  は表面張力係数である。 $\delta W$  は空気 (流体 1) と粘性流体 (流体 2) のそれぞれの歪エネルギー  $\delta W_1$ ,  $\delta W_2$  の和

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 \quad (5)$$

で与えられる。系の無限小変位  $\delta u_i$  に対して  $\delta W_k$  ( $k = 1, 2$ ) は

$$\delta W_k = \int \int_A \pi_k^{ij} n_j \delta u_i dA \quad (6)$$

である。ベクトル  $n_j$  は面  $dA$  の法線方向を向き、 $1 \rightarrow 2$  の方向を正にとると  $2 \rightarrow 1$  では  $-n_j$  となる。また応力テンソル  $\pi^{ij}$  は

$$\pi_k^{ij} = -p_k \gamma^{ij}(t) - \eta_k \frac{d\gamma^{ij}}{dt} \quad (7)$$

と書くことができる [4]。ここで  $p_k$ ,  $\eta_k$  はそれぞれの流体が境界面に及ぼす圧力、粘性係数である。 $\frac{d\gamma^{ij}}{dt}$  は空間計量  $g^{ij}$  に参照したときの歪速度テンソル  $e^{ij} = \frac{1}{2}(v^i|_j + v^j|_i)$  (の 2 倍) に

相当する。ここで  $v^i$  は流体の速度ベクトル、 $|^j$  はその共変微分を表す。(7) を空間計量で書きかえ、応力運動方程式と組み合わせると Navier-Stokes 方程式が得られる。

今、境界面  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi^i)$  が微小変位を行って

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\xi^i) + \epsilon w(\xi^i) \mathbf{e}_n(\xi^i) \quad (8)$$

なる曲面になったとする。ここで  $\epsilon > 0$  は十分小さい定数である。(8) 式より

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}' &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} + 2\epsilon w d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{e}_n + \epsilon^2 w^2 d\mathbf{e}_n \cdot d\mathbf{e}_n + \epsilon^2 dw^2 \\ &= \gamma_{ij} d\xi^i d\xi^j - 2\epsilon w H_{ij} d\xi^i d\xi^j + \epsilon^2 w^2 (2H H_{ij} - K \gamma_{ij}) d\xi^i d\xi^j \\ &\quad + \epsilon^2 w_{,i} w_{,j} d\xi^i d\xi^j \end{aligned} \quad (9)$$

ただし  $w_{,i} = \frac{\partial w}{\partial \xi^i}$  とする。 $H_{ij}, H, K$  はそれぞれ曲面の第二基本量、平均曲率、ガウス曲率である。従って変形後の曲面 (8) の計量テンソルを  $\gamma'_{ij}$  とすれば

$$\gamma'_{ij} = \gamma_{ij} - 2\epsilon w H_{ij} + \epsilon^2 [w^2 (2H H_{ij} - K \gamma_{ij}) + w_{,i} w_{,j}] \quad (10)$$

これより  $\gamma' = \det \gamma'_{ij}$  は

$$\begin{aligned} \gamma'_{11} \gamma'_{22} - \gamma'^2_{12} &= \gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2 [1 - 4\epsilon w H \\ &\quad + \epsilon^2 (4w^2 H^2 + 2w^2 K + \gamma^{ij} w_{,i} w_{,j}) + \dots] \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここで  $\dots$  は  $O(\epsilon^3)$  以上の微小量を表す。よって

$$\sqrt{\gamma'} = \sqrt{\gamma} \left[ 1 - 2\epsilon w H + \epsilon^2 (w^2 K + \frac{1}{2} \gamma^{ij} w_{,i} w_{,j}) + \dots \right] \quad (12)$$

変形前の境界面の面積を  $A$ 、変形後の面積を  $A'$  とすれば

$$A = \int \int \sqrt{\gamma} d\xi^1 d\xi^2, \quad A' = \int \int \sqrt{\gamma'} d\xi^1 d\xi^2, \quad (13)$$

で与えられるから

$$\begin{aligned} \delta A &= A' - A \\ &= \int \int \sqrt{\gamma} \left[ -2\epsilon w H + \epsilon^2 (w^2 K + \frac{1}{2} \gamma^{ij} w_{,i} w_{,j}) + \dots \right] d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \delta^{(1)} A + \delta^{(2)} A + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

(14) 式において  $O(\epsilon)$  の項が第一変分  $\delta^{(1)}A$ 、 $O(\epsilon^2)$  の項が第二変分  $\delta^{(2)}A$  に相当する。

$\xi^2$  方向 (平板に垂直方向) の厚さ  $b$  が非常に小さいという Hele-Shaw cell の性質を用いると

$$2H \equiv \kappa = \frac{w_{,ss}}{(1+w_{,s}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad K = 0 \quad (15)$$

となる。ここで  $\xi^1$  を境界の周長を parametrize する  $s$  という変数に書き換えた。また、(15) で用いた  $w$  は  $\xi^2$  方向に平均をとった  $\bar{w}$

$$\bar{w} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w(\xi^1, \xi^2) d\xi^2$$

を再び  $w$  とおいたものであることを注意しておく。(14)、(15) より

$$\delta^{(1)}A = -b \int \kappa ds \quad (16)$$

$$\delta^{(2)}A = \frac{b}{2} \int w_{,s}^2 ds \quad (17)$$

が得られる。

次に歪エネルギー  $W$  の変分  $\delta W$  を求める。その為に変形後の基底ベクトル  $e'_i$  を  $e_i$  で書いておく。(8) を  $\xi^i$  で微分すると

$$x'_{,i} = x_i + \epsilon(w_{,i}e_n + w e_{n,i})$$

これより

$$e'_i = e_i + \epsilon(w_{,i}e_n - w H_{ij}e_j)$$

ここで第二基本量の定義  $e_{n,i} = -H_{ij}e_j$  を用いた。今の場合には

$$\begin{aligned} e'_1 &= (1 - \epsilon w H_{11})e_1 + \epsilon w_{,s}e_n \\ e'_2 &= e_2 \\ e'_n &= \frac{1}{\sqrt{\gamma'}} [e'_1 \times e'_2] \\ &= -(\epsilon w_{,s} + 2\epsilon^2 w w_{,s} H)e_1 \\ &\quad + \left[ 1 + \epsilon w (2H - H_{11}) + \epsilon^2 \left( -2H H_{11} w^2 + \frac{1}{2} w_{,s}^2 \right) \right] e_n + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

$\delta W$ を求める際、応力 $\pi^{ij}$ は

$$\bar{\pi}^{ij} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \pi^{ij} d\xi^2$$

と $\xi^2$ 方向には平均をとり、改めて $\bar{\pi}^{ij} \rightarrow \pi^{ij}$ として議論する。

今、変分は $e_n$ 方向にとっているので、(6)における $\delta u_i = \epsilon w e_n$ である。空気(k=1)は理想流体とみなせるので、(7)式の第二項は0とおいてよい。 $p_1$ が $p_1 = p'_1 w + \frac{1}{2} p''_1 w^2 + \dots$ と展開できるものとする

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= - \int \int p_1 \gamma^{ij} n'_j \delta u_i dA \\ &= -\epsilon \int \int p'_1 w dA - \frac{\epsilon^2}{2} \int \int p''_1 w^2 dA + \dots \\ &= \delta^{(1)} W_1 + \delta^{(2)} W_1 + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、上付き添え字は(14)同様第一変分、第二変分等を表す。

粘性流体(k=2)では $p_2 = 0$ とおいてよい。(6)、(7)、(18)を用いると

$$\begin{aligned} \delta W_2 &= \eta_2 \int \int \dot{\gamma}^{3j} e'_j \epsilon w e_n dA \\ &= \eta_2 \epsilon \int \int \dot{\gamma}^{33} w dA + \epsilon^2 \eta_2 \int \int \dot{\gamma}^{31} w^2 w_{,s} dA + \dots \\ &= \delta^{(1)} W_2 + \delta^{(2)} W_2 + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

ここでドットは時間微分を表す。また、(20)式の $\dot{\gamma}^{ij}$ は厳密には変形後の面積要素に参照した応力成分であり、 $\dot{\gamma}^{31} = \dot{\gamma}^{13}$ が成り立つ。

(4)、(5)、(16)、(19)、(20)より、仮想仕事 $\delta R$ の第一変分 $\delta^{(1)} R = 0$ とおくことによって境界の平衡条件

$$p'_1 = \alpha \kappa + \eta_2 \dot{\gamma}^{33} \quad (21)$$

が得られる。ただし2から見た境界が凹であることから、 $\kappa$ の符号を逆転させてある。(21)式で $\alpha = 0$ とおき、右辺第二項を応力テンソル $\pi_2^{ij}$ で置き換えてやると Darcy 則における平衡条件式となる。

今、 $\delta^{(2)} R > 0$ であるならばよく知られた変分学の議論より [5]、二つの媒質の熱力学的平衡状態(21)は安定である。このとき境界面は(21)で決まる $\kappa$ なる曲率を保ち続ける。す

なわち境界面の変形は起こらない。 $\delta^{(2)}R \leq 0$  のときは、(21) で定まる曲面は不安定となり、非平衡非定常状態が実現する。これは(21) で定まった曲面が分岐することに対応する。Viscous fingering の分岐現象はこの場合であると考えられる。

分岐後の境界の様子を知るために、第二変分 $\delta^{(2)}R$ を極値化する。すなわち

$$\delta^{(1)}[\delta^{(2)}R] = 0$$

を考える。(17)、(19)、(20) より

$$w_{,ss} + \lambda w + Ew^2 = 0 \quad (22)$$

なる式が得られる。ここで $\lambda = \frac{P''}{\alpha}$ 、 $E = \frac{1/2 \gamma_s^{31}}{\alpha}$ である。(22) 式は $\lambda$ の値を固有値とする固有値問題であるとみなすことができるが、非線形であり、一般に $E$ が時間に依存するので厳密解を求めることは容易ではない。しかし、解の力学系としての性質を調べることによって、finger の分岐の定性的な様子は知ることができる。ここでは簡単にそれを述べておく。

(22) 式の phase portrait を Fig.3 に示す。矢印は flow の向きを表す。また $\lambda > 0, E < 0$  と仮定した。 $a$  点は $(w, w_{,s}) = (0, 0)$ 、 $b$  点は $(w, w_{,s}) = (-\frac{E}{\lambda}, 0)$  に相当する。 $b$  点は saddle point であり、今の場合 finger の分岐点に相当すると考えられる。ここで変位 $w = 0$ である。このまわりで摂動すると軌道が不安定になることから、第二変分を極値化して得られた境界は、いったん分岐した後もやはり非平衡状態にあり、さらなる分岐を繰り返すと考えられる。

本研究では、境界の熱力学的安定性を調べることによって viscous finger の分岐現象を論じた。ここで解析のモデルとしたのは、Fig.1 で与えられるようなニュートン流体である。非ニュートン流体では分岐の様子はさらに複雑であるが(Fig.4)、この場合でも同様の議論が展開できる。ただし、非ニュートン流体の場合は(7) で与えられるレオロジー状態方程式及び変位 $w$ の軌道を記述する(22) 式の表式がさらに複雑になる。

## 謝辞

著者は、写真掲載を快諾下さった三重大工学部の川口正美氏に感謝の意を表する。

## 参考文献

- [1 ] P. G. Saffman and G. I. Taylor, Proc. R. Soc. Lond. A **245**, 312 (1958).
- [2 ] P. G. Saffman, Q. J. Mech. Appl. Maths. **12**, 146 (1959).
- [3 ] K. Makino, M. Kawaguchi, K. Aoyama and T. Kato, Phys. Fluids **7**, 455 (1995).
- [4 ] A. S. Rodge, *Elastic Liquids* (Academic Press, New York, 1964).
- [5 ] M. Struwe, *Variational Methods*, (Springer-Verlag, Bellin Heidelberg, 1990)

## 図説明

- Fig.1 ニュートン流体における viscous fingering (写真提供 M. Kawaguchi)
- Fig.2 境界における座標系
- Fig.3 phase portrait
- Fig.4 ニュートン流体における viscous fingering (写真提供 M. Kawaguchi)

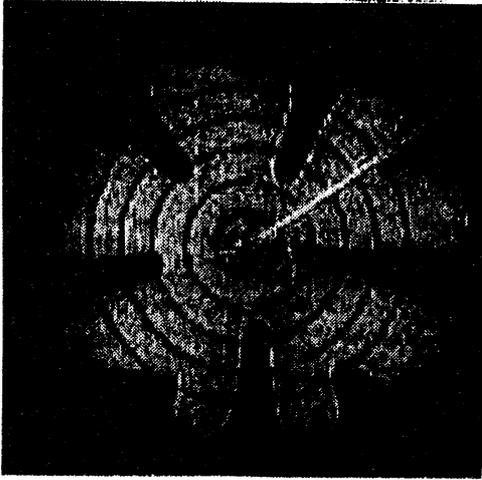


Fig.1

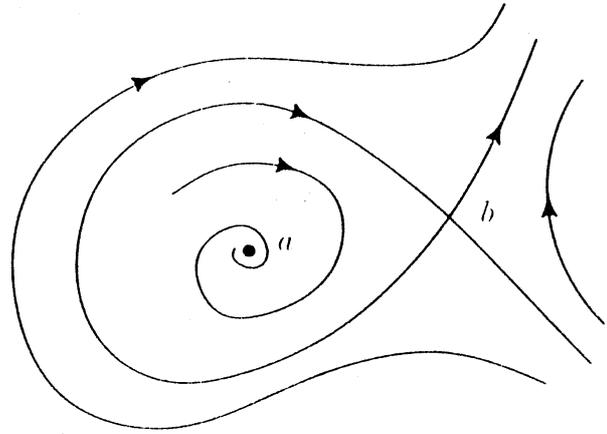


Fig.3

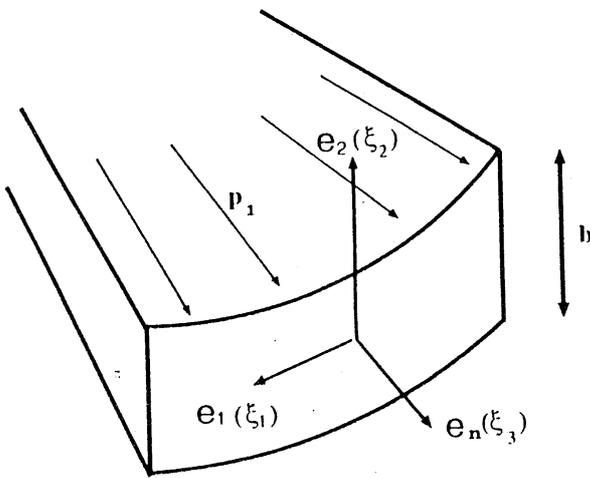


Fig.2

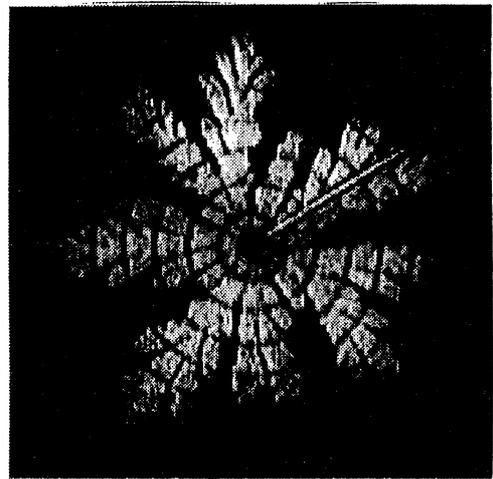


Fig.4