数理解析研究所講究録
994巻 1997年 155-167

$\mathcal{H}_{-2}$–construction and Hamiltonians with interactions of various type

学習院大学理学部　長谷　浩　(Hiroshi Nagatani)
学習院大学理学部　黒田成俊　(S. T. Kuroda)

1　はじめに

例として，形式的に

$$H=-\frac{d^2}{dx^2}+\delta(x) \quad \text{または} \quad H'=-\frac{d^2}{dx^2}+\delta'(x)$$

と表されるようなハミルトニアンを考えよう．HはFormの理論によって扱うことが出来るが，H'はそうはいかない．このように，形式的には

(1.1) $$H=H_0+V$$

と表されるHamiltonianで，VがH_0に関してhighly singularな場合を扱う一つの方法として，Kiselev–Simon（[3]）は，H_0に準拠するHilbert空間のスケール$\mathcal{H}_s$を用いる方法を提案し，それを$\mathcal{H}_{-2}$–constructionと呼んでいる．

(1.1)が成り立つ場合，Hのレゾルベント$R(z)$は

(1.2) $$R(z)=R_0(z)-R_0(z)(1+VR_0(z))^{-1}VR_0(z),$$

(1.3) $$R(z)=(H-z)^{-1}, \qquad R_0(z)=(H_0-z)^{-1}$$

を満たす．ここで，$c\in\mathbf{C}$を固定して(1.2)を次ぎのように変形する．

(1.4) $$\begin{aligned}R(z)&=R_0(z)-R_0(z)\{1+VR_0(c)+V(R_0(z)-R_0(c))\}^{-1}VR_0(z)\\&=R_0(z)-R_0(z)\{1+T(R_0(z)-R_0(c))\}^{-1}TR_0(z),\end{aligned}$$

(1.5) $$T=(1+VR_0(c))^{-1}V.$$

ここで，H_0が定める空間のスケール$\mathcal{H}_s$を考えよう．($\mathcal{H}_s$については次節で述べるが，$s\geq 0$ならば$\mathcal{H}_s=\mathcal{D}(|H_0|^{s/2})$である.) (1.2)で，作用素$1+VR_0(z)$が考えられるためには，すなわち$VR_0(z)$がある$\mathcal{H}_s$の中の作用素であるためには，$R_0$によって空間の

スケールが 2 あがるから，Vがスケールを 2 以上下げないことが必要である．これは，additive perturbation の定式化が出来るためには，$V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_0)$ が必要であることに相当している．ところが，(1.4) では，$T(R_0(z)-R_0(c))=(z-c)TR_0(z)R_0(c)$ であって，$R_0(z)R_0(c)$ はスケールを 4 上げるから，Tはスケールを 4 まで下げることが許される．そこで $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_{-2})$ として，(1.4) によってレゾルベント $R(z)$ を定義すれば，Hamiltonian with highly singular perturbation の定義が出来るであろう，というのが Kiselev–Simon のアイデアの我々の受け止め方である．

Kiselev–Simon は $H_0 \geq 0$, $c=-1$, かつ Tが rank 1 の場合だけを扱っているが，この方式はかなりの一般性を持つもののように見受けられ，rank 1 で留まるのは惜しいように感じられる．そこで，(1.4) による構成法がどのくらいの一般性を持つものかを調べてみようというのが，この研究の動機である．この報告では，成る可く一般にということで，Tを $\mathcal{H}_2$から $\mathcal{H}_{-2}$への有界作用素とする．なお，研究集会の講演では H_0, H共に自己共役の場合だけを扱ったが，空間のスケールを考えるから H_0を自己共役とするのは順当として，Hは閉作用素としても構成法の基本の所は変わらない．この報告ではHは自己共役に限らないことにする．

第 2 節では，Tが仮定 2.4を満たすというだけの条件の下で，(1.5) を使って閉作用素 $H=H(T)$ を定義する（一般 $\mathcal{H}_2$- construction）．この定義でどの程度の Hが出てくるのかが問題であるが，実はこの定義は，一般的な性格のもので，c をレゾルベント集合の中に含む，という条件を満たすすべての閉作用素が出てくることが分かる（定理 3.3）．これは，一般 $\mathcal{H}_2$–construction がある意味では一般的すぎるということかもしれないが，Hの色々な性質を Tの性質に翻訳して考えたい，というのがこのアプローチの最初の目的だから，沢山の Hが出てくることは一向に構わないようにも思われる．

定理 3.4で $H(T)$ が自己共役になるための Tに関する条件を与える．定理 4.3では，$\mathcal{D}(H(T))=\mathcal{D}(H_0)$ (additive perturbation) となる為の条件を考える．さらに，定理 4.5 では，$H(T)$ が $H|_{\mathcal{N}}$ （$\mathcal{N}$は $\mathcal{D}$の部分空間）の拡張であることの必要十分条件は，Tの零空間が $\mathcal{N}$を含むことに注意する．このことは，応用の可能性が一番多そうに思える．

2 $\mathcal{H}_{-2}$–construction

2.1 空間のスケール

基本的な定義から始める．Banach 空間 X から Y への有界作用素の全体を $\mathcal{L}(X,Y)$ で表し，$\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X,X)$ とする．また，作用素 A のレゾルベント集合を$\rho(A)$ で表わす．$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，$\mathcal{H}$ のノルムを $\|\cdot\|$, 内積を $(\cdot,\cdot)$ と書く．

H_0を $\mathcal{H}$の自己共役作用素とする．H_0が定める **Hilbert 空間のスケール** $\{\mathcal{H}_s\}_{s\in\mathbf{R}}$とは，ノルム

(2.1) $$\|u\|_s = \|(|H_0|+1)^{s/2}u\|$$

によって定められる空間の族のことをいう．詳しく云うと，$s \geq 0$ ならば，$\mathcal{H}_s$は $\mathcal{D}(|H_0|^s)$ ($\mathcal{D}$は作用素の定義域を表す) に (2.1) のノルムを入れたものであり，$s < 0$ のときは，$\mathcal{H}_s$は $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$の (2.1) のノルムによる完備化である．このとき，$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$，$H_0 - z$ は自然な方法で $R_0(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s+2})$, $H_0 - z \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s-2})$ とみなせる．

$s \geq 0$ のとき，関係

$$(u, \varphi)_{s,-s} = (u, \varphi), \quad \forall u \in \mathcal{H}_s, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{-s}$$

により $\mathcal{H}_{-s} = \mathcal{H}_s^*$, $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{-s}^*$とみなすことは，いつもの通りである．

ここで，(1.4) に現れたスケールを 4 上げる作用素を，改めて

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{aligned} W(z, w) &= (z - w)R_0(z)R_0(w) \\ &= (z - w)R_0(w)R_0(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s+4}), \quad z,\ w \in \rho(H_0), \end{aligned}$$

と定義する．レゾルベント方程式によれば，形式的には $W(z, w) = R_0(z) - R_0(w)$ であるが，$W(z, w)$ を $\mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s+4})$ の要素と見るときには，このようにレゾルベントの差の形に書くことは出来ない．一方，$W(z, w)$ を $\mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s+2})$ の要素と見ることもできるが，そのときには

$$\text{(2.3)} \qquad W(z, w) = R_0(z) - R_0(w) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s+2})$$

が成り立つ．実際，$u \in \mathcal{H}_{\max\{s,0\}}$に対して $W(z, w)u = R_0(z)u - R_0(w)u$ が成り立つが，$s \geq 0$ ならこれは (2.3) を意味する．$s < 0$ のときは，稠密性の議論を用いればよい．

(2.3) によれば，

$$\text{(2.4)} \qquad W(z, w) - W(z', w') = W(z, z') - W(w, w')$$

は $\mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s+4})$ における関係として成り立つことが分かる．

今後出てくる Wは，特に注意しない限り $W(z, w) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{-2}, \mathcal{H}_2)$ である．

2.2 $R_T(z)$, $H(T)$ の定義

以下，$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_{-2})$ が与えられたとし，$c \in \rho(H_0)$ を一つ選んで，これも固定する．

定義 2.1 ρ_T, $R_T(z)$ を次ぎのように定義する．

$$\text{(2.5)} \qquad \rho_T = \{z \in \rho(H_0) \mid \exists (1 + TW(z, c))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{-2})\},$$

$$\text{(2.6)} \qquad \begin{aligned} R_T(z) &= R_0(z) - R_0(z)(1 + TW(z, c))^{-1}TR_0(z) \\ &= R_0(z) - R_0(z)T(1 + W(z, c)T)^{-1}R_0(z), \qquad z \in \rho_T. \end{aligned}$$

ただし，(2.6) において，$W(z, c) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{-2}, \mathcal{H}_2)$ とし，従って $(1+TW(z, c))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{-2})$，$R_T(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ である．

$W(c,c)=0$ だから，$c\in\rho_T$であり，従ってρ_Tは空でない開集合である．

命題 2.2 $R_T(z)$ はレゾルベント方程式を満たす．すなわち，

$$R_T(z)-R_T(w)=(z-w)R_T(w)R_T(z),\quad z,\ w\in\rho_T, \tag{2.7}$$

が成り立つ．(このとき $R_T(z)$ は pseudo レゾルベントであると云われる．)

＜証明＞　型どおりであるが，式の変形中に出てくる因子が作用する空間に注意する必要がある．$K(z)=(1+TW(z,c))^{-1}T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_{-2})$ とおけば，(2.6) により，

$$R_T(z)=R_0(z)-R_0(z)K(z)R_0(z)$$

である．故に，

$$\begin{aligned}(z-w)&R_T(z)R_T(w)\\ &=W(z,w)-W(z,w)K(w)R_0(w)-R_0(z)K(z)W(z,w)\\ &\quad+R_0(z)K(z)W(z,w)K(w)R_0(w).\end{aligned} \tag{2.8}$$

この式の右辺の第 1 項では $W\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$, 第 2 項では $W\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_{-2},\mathcal{H}_0)$, 第 3 項では $W\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_2)$ とみなせるから (2.3) を使って計算すれば

$$\begin{aligned}(z-w)&R_T(z)R_T(w)-\{R_T(z)-R_T(w)\}\\ &=R_0(z)\{K(z)-K(w)+K(z)W(z,w)K(w)\}R_0(w).\end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで，公式 $(1+A)^{-1}-(1+B)^{-1}=(1+A)^{-1}(B-A)(1+B)^{-1}$と (2.4) を用いれば，$K(z)-K(w)=K(z)\{W(w,c)-W(z,c)\}K(w)=-K(z)W(z,w)K(w)$ となるから，右辺は 0 である．　∎

周知のように（例えば [2], §VIII.1)），pseudo レゾルベント $R_T(z)$ に対して，$\mathcal{N}=\mathcal{N}(R_T(z))$, $\mathcal{R}=\mathcal{R}(R_T(z))$ ($\mathcal{N}$, $\mathcal{R}$ はそれぞれ零空間，値域を表す）は zに無関係であり，$R_T(z)$ がある閉作用素 $H(T)$ の レゾルベントである為の必要十分条件は，$\mathcal{N}=\{0\}$ であることである．そのとき，$R_T(z)$ は逆をもち

$$R_T(z)=(H(T)-z)^{-1},\qquad H(T)=z+R_T(z)^{-1}. \tag{2.10}$$

が成り立つ．

補題 2.3 $\mathcal{N}=\{0\}$ の必要十分条件は

$$u-TR_0(c)u=0,\quad u\in\mathcal{H}_0\Longrightarrow u=0. \tag{2.11}$$

が成り立つことである．

＜証明＞ (2.6) で $z=c$ とし，$W(c,c)=0$ に注意すればよい． ∎

仮定 2.4 Tに対して関係 (2.10) が成り立つ．

以下，本稿を通じてTは仮定2.4を満たすものとし，$H(T)$ は (2.10) によって定まる閉作用素であるとする．定義から明らかなように

$$\rho_T \subset \rho(H) \cap \rho(H_0) \tag{2.12}$$

であり（実は後に示すように等号が成り立つ），特にかつ

$$c \in \rho(H(T)), \qquad (H(T)-c)^{-1} = R_0(c) - R_0(c)TR_0(c) \tag{2.13}$$

が成り立つ．

以上のようにして $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_{-2})$ から $H(T)$ を構成することを，[3] にならい，$\mathcal{H}_{-2}$ construction と呼ぶことにする．

3 対応 $H \mapsto H(T)$

3.1 一つの公式

H_0を自己共役作用素，$\{\mathcal{H}_s\}_{s\in\mathbf{R}}$を H_0が定める **Hilbert** 空間のスケールとする．また，Hを $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0$における閉作用素で

$$\rho(H) \cap \rho(H_0) \neq \emptyset$$

を満たすものとする．$R(z)$, $R_0(z)$ は (1.3) の通りとして

$$\begin{aligned}(3.1)\quad K(z) &= K(z; H_0, H) \\ &= (H_0 - z)(R(z) - R_0(z))(H_0 - z) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_{-2}), \qquad z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)\end{aligned}$$

とおく．この式の右辺で，右側の $H_0 - z$は $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_0)$ の要素，$R(z) - R_0(z)$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ の要素，左側の $H_0 - z$は $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_{-2})$ の要素とみなすのである．

次ぎの公式は有用である．

命題 3.1

$$K(z_1) - K(z_2) = K(z_1)W(z_1, z_2)K(z_2), \qquad z_1,\ z_2 \in \rho(H) \cap \rho(H_0). \tag{3.2}$$

が成り立つ．

＜証明＞　$\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ における関係として $(H_0-z_1)W(z_1,z_2)(H_0-z_2)=z_1-z_2$ が成り立つから

$$\text{RHS}=(z_1-z_2)(H_0-z_1)\{R(z_1)-R_0(z_1)\}\{R(z_2)-R_0(z_2)\}(H_0-z_2). \tag{3.3}$$

一方，

$$\begin{aligned}\text{LHS}&=(H_0-z_1)\{(R(z_1)-R_0(z_1))(H_0-z_1)R_0(z_2)\\&\qquad -R_0(z_1)(H_0-z_2)(R(z_2)-R_0(z_2))\}(H_0-z_2)\\&=(H_0-z_1)\{(R(z_1)-R_0(z_1))(1+(z_1-z_2)R_0(z_2))\\&\qquad -(1+(z_1-z_2)R_0(z_1))(R(z_2)-R_0(z_2))\}(H_0-z_2).\end{aligned} \tag{3.4}$$

この右辺を展開して，$R(z_1)-R(z_2)=(z_1-z_2)R(z_1)R(z_2)$, $R_0(z_1)-R_0(z_2)=(z_1-z_2)R_0(z_1)R_0(z_2)$ を用いて整理すれば，(3.4) の右辺が (3.3) の右辺に等しいことが分かる． ∎

系 3.2

$$\frac{d}{dz}K(z)=K(z)R_0(z)^2K(z),\qquad z\in\rho(H)\cap\rho(H_0).$$

が成り立つ．

＜証明＞　(3.2) で $z_1=z+h$, $z_2=z$ とした式を h で割って，$h\to 0$ の極限を取ればよい． ∎

3.2　T と $H(T)$ の関係

H_0 を自己共役とし，$c\in\rho(H_0)$ を固定する．そして，

$$\mathcal{V}(c)=\{\,T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_{-2})\mid T\text{は仮定 2.4 を満たす}\,\} \tag{3.5}$$

$$\mathcal{C}(c)=\{\,H\text{は }\mathcal{H}\text{の閉作用素}\mid c\in\rho(H)\,\} \tag{3.6}$$

とおく．

$T\in\mathcal{V}(c)$ から $\mathcal{H}_2$–construction によって $H(T)$ を構成するとき，$c\in\rho(H(T))$ だから ((2.13) 参照)，$H(T)\in\mathcal{C}(c)$ である．次ぎの問題は，$H(T)$ と書ける作用素の $\mathcal{C}(c)$ におけるを特徴づけを与えることであるが，実は $\mathcal{C}(c)$ の作用素が全部出てくるのである．

定理 3.3 写像 $T\longrightarrow H(T)$ は $\mathcal{V}(c)$ から $\mathcal{C}(c)$ の上への 1 対 1 の写像である．ρ_T は (2.5) で，$R_T(z)$ は (2.6) で与えられるとし，$R(T)=(H(T)-z)^{-1}$ と書くと，T と $H(T)$ の間に関係

$$\rho_T=\rho(H(T))\cap\rho(H_0), \tag{3.7}$$

$$(3.8)\qquad R(z) = R_T(z), \qquad z \in \rho(H) \cap \rho(H_0),$$

$$(3.9)\qquad T = -K(c) = -(H_0 - c)(R(c) - R_0(c))(H_0 - c).$$

$$(3.10)\qquad (1 + TW(z,c))^{-1} = 1 + K(z)W(z,c)$$

が成り立つ．

＜証明＞ 任意の $H \in \mathcal{C}(c)$ が $H = H(T), T \in \mathcal{V}(c)$ と表されることを示そう．そのために $R(z) = (H - z)^{-1}$として $K(z)$ を (3.1) で定義し, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_{-2})$ を (3.9) で定義する．まず，Tが仮定 2.4を満たすことを示す．(3.9) の両辺に左から $R_0(c) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{-2}, \mathcal{H}_0)$, 右から $R_0(c) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_2)$ をかければ，$\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ での関係として

$$(3.11)\qquad R(c) = R_0(c) - R_0(c)TR_0(c)$$

が成り立つことが分かる．$u \in \mathcal{H}_0$が $u - TR_0(c)u=0$ を満たすとき，(3.11) を u に作用させて $R(c)u = R_0(c)u - R_0(c)u = 0$ が得られるが，$R(c)$ は 1 対 1 だから $u = 0$, したがって Tは仮定 2.4を満たす．故に，$T \in \mathcal{V}(c)$ であり $H(T)$ が定義される．そのとき，$(H(T) - z)^{-1} = R_T(z)$ だから，(2.6) で $z = c$ として

$$(3.12)\qquad (H(T) - c)^{-1} = R_0(c) - R_0(c)TR_0(c)$$

が得られる．これと，(3.11) から $H = H(T)$ であることが分かる．逆に，$H = H(T)$ なら (3.12)，したがって (3.9) が成り立ち，特に，写像 $T \longrightarrow H(T)$ は 1 対 1 である．

残っているのは (3.7), (3.10) の証明であるが，包含関係$\subset$は既に見た ((2.12))．逆の包含関係を示すため，$z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$ とする．(3.2) で $z_1 = z, z_2 = c$ とすれば，$K(c) = -T$ に注意して，$K(z) + T = -K(z)W(z,c)T$が得られる．これに右から Wを掛けて整理すれば，暫く変数を略して $KW + TW + KWTW = 0$. 故に，$(1 + KW)(1 + TW) = 1$ が成り立つ．同様に，(3.2) で $z_1 = c, z_2 = z$とすることにより，$(1 + TW)(1 + KW) = 1$ が得られる．すなわち，$1 + KW = (1 + TW)^{-1}$ であり，$z \in \rho_T$が示された．(3.10) は上に見たとおりである． ∎

3.3 自己共役性の条件

次ぎの問題は，$H(T)$ が自己共役作用素になるための条件を調べることである．

定理 3.4 次の (i) – (iv) は同値である．

(i) $H(T)$ は自己共役である．

(ii) $R_T(z)$ は次の (3.13) を満たす．

$$(3.13)\qquad \begin{aligned} R_T(z)^* - R_T(z) &= (\overline{z} - z)R_T(z)R_T(z)^* \\ &= (\overline{z} - z)R_T(z)^*R_T(z), \quad \forall z \in \rho_T \end{aligned}$$

(iii) (3.13) がある $z \in \rho_T$に対して成り立つ.

(iv) Tは次の (3.14) を満たす.

$$T - T^* = TW(\bar{c}, c)T^* = T^*W(\bar{c}, c)T. \tag{3.14}$$

<証明>　(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らか.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) の証明. 最初に, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(R(z))$ は $z \in \rho_T$に関係せず, $\mathcal{N}(R_T(z)) = \{0\}$ であることを思い出しておく.

さて, (3.13) によれば $\mathcal{R}(R_T(z)) = \mathcal{R}(R_T(z)^*)$ であるから,

$$\mathcal{R}^\perp = \mathcal{R}(R_T(z)^*)^\perp = \mathcal{N}(R_T(z)) = \{0\}.$$

故に, $\mathcal{R} = \mathcal{D}(H(T))$ は $\mathcal{H}$で稠密である. さらに, $R_T(z)^{-1*}$ が定義できて, $(R_T(z)^{-1})^* = R_T(z)^{*-1}$が成り立つ. 以上と (2.10) により

$$H(T)^* = \bar{z} + R(z)^{*-1}, \quad \mathcal{D}(H(T)^*) = \mathcal{R} = \mathcal{D}(H(T))$$

であることが分かった. そして, 任意の $u \in \mathcal{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
H(T)u - H(T)^*u &= (z - \bar{z})u + (R_T(z)^{-1} - R_T(z)^{*-1})u \\
&= (z - \bar{z})u + R_T(z)^{-1}(R_T(z)^* - R_T(z))R_T(z)^{*-1}u \\
&= (z - \bar{z})u + R_T(z)^{-1}(\bar{z} - z)R_T(z)R_T(z)^*R_T(z)^{*-1}u \quad [(3.13) による] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

以上で, $H(T)^* = H(T)$ が証明された.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) の証明. $R_0(z)$ を $\mathcal{L}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s+2})$ の要素と見たときの共役作用素は, $R_0(\bar{z}) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{-(s+2), \mathcal{H}_{-s}})$ であることは容易に分かる. 従って,

$$W(z, c)^* = (\bar{z} - \bar{c})R_0(\bar{c})R_0(\bar{z}) = W(\bar{z}, \bar{c})$$

であり, 命題 2.2の証明と同様に $K(z) = (1 + TW(z, c))^{-1}T$ とおけば, $K(z)^* = T^*(1 + W(\bar{z}, \bar{c})T^*)^{-1}$となる. そして,

$$R_T(z) = R_0(z) - R_0(z)K(z)R_0(z), \quad R_T(z)^* = R_0(\bar{z}) - R_0(\bar{z})K(z)^*R_0(\bar{z})$$

だから, (2.8) と同様に

$$\begin{aligned}
&(\bar{z} - z)R_T(z)R_T(z)^* \\
&\quad = W(\bar{z}, z) - W(\bar{z}, z)K(z)^*R_0(\bar{z}) - R_0(z)K(z)W(\bar{z}, z) \\
&\qquad + R_0(z)K(z)W(\bar{z}, z)K(z)^*R_0(\bar{z}).
\end{aligned}$$

前と同様の理由で，$W(\overline{z},z)$ を差の形に書くことが出来て，

$$\begin{aligned}&(\overline{z}-z)R_T(z)R_T(z)^*-\{R_T(z)^*-R_T(z)\}\\&\quad=R_0(z)\{K(z)^*-K(z)+K(z)W(\overline{z},z)K(z)^*\}R_0(\overline{z})\end{aligned}$$

が得られる．ここで，公式 $C(1+A)^{-1}-(1+B)^{-1}D=(1+B)^{-1}(C-D+BC-DA)(1+A)^{-1}$ と (2.4) を用いて計算すれば，

$$\begin{aligned}K(z)^*-K(z)&=(1+TW(z,c))^{-1}(T^*-T)(1+W(\overline{z},\overline{c})T^*)^{-1}\\&\quad+K(z)\{W(\overline{c},c)-W(\overline{z},z)\}K(z)^*.\end{aligned}$$

故に，

$$\begin{aligned}&(\overline{z}-z)R_T(z)R_T(z)^*-\{R_T(z)^*-R_T(z)\}\\&\quad=R_0(z)(1+TW(z,c))^{-1}(T^*-T+TW(\overline{c},c)T^*)(1+W(\overline{z},\overline{c})T^*)^{-1}R_0(\overline{z})\end{aligned}$$

故に，$(\overline{z}-z)R_T(z)R_T(z)^*=R_T(z)^*-R_T(z)$ は，$T-T^*=TW(\overline{c},c)T^*$ と同値であることが分かった．同様にして，$(\overline{z}-z)R_T(z)^*R_T(z)=R_T(z)^*-R_T(z)$ は $T-T^*=T^*W(\overline{c},c)T$ と同値であることが分かる． ∎

言葉だけの言い替えであるが，この定理を次ぎのように述べることも出来る．

仮定 3.5 T は (3.14) を満たす．

定義 3.6 仮定 2.4, 3.5を満たす $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_{-2})$ の全体を，$\mathcal{V}_{\mathrm{sa}}(c)$ とおく．また，$\mathcal{H}_0$ における自己共役作用素 H で，$c\in\rho(H)$ を満たすものの全体を $\mathcal{C}_{\mathrm{sa}}(c)$ とおく．

系 3.7 $T\longrightarrow H(T)$ により，$\mathcal{V}_{\mathrm{sa}}(c)$ と $\mathcal{C}_{\mathrm{sa}}(c)$ とは 1 対 1 に対応する．特に，$\mathrm{Im}\,c\neq 0$ のときには，$\mathcal{V}_{\mathrm{sa}}(c)$ と $\mathcal{H}_0$ の自己共役作用素の全体とが 1 対 1 に対応する．

注意 3.8 $\rho(H_0)\cap\mathbf{R}\neq\emptyset$ のときには，実数の c を選ぶことができる．そうすると，自己共役性の条件 (3.14) は $T^*=T$ となり，定理 3.4の証明はかなり簡単になる．その代わり，$H(T)$ としては，c が $\rho(H(T))$ となる自己共役作用素しか出てこない．したがって，たとえ H_0 が半有界作用素である場合でも，実でない c を取って考える方が具合がよいのである．

4 $H(T)$ と H_0 の関係

4.1 値域空間の間の関係

この節では，$T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_{-2})$ は仮定 2.4を満たすとし，$H(T)$ は $\mathcal{H}_{-2}$-costruction で構成される閉作用素とする．そして，$R(z)=(H(T)-z)^{-1}$ と書く．T の性質が $H(T)$ の性

質に反映することを示す最も簡単な主張として，Tと $H(T)$ の関係から直ぐに出てくる定理を一つ述べておく．

定理 4.1 $0 \leq s \leq 2$ とする．そのとき，

$$\mathcal{D}(H(T)) \subset \mathcal{H}_s \iff \mathcal{R}(T) \subset \mathcal{H}_{-2+s}$$

が成り立つ．

＜証明＞ (3.9) または (2.6) で $z = c$ としたものより，

$$R(c) = R_0(c) - R_0(c)TR_0(c)$$

である．右辺で $\mathcal{R}(R_0(c)) = \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_s$, $0 \leq s \leq 2$ だから，

$$\mathcal{D}(H(T)) \subset \mathcal{H}_s \iff \mathcal{R}(R_0(c)TR_0(c)) \subset \mathcal{H}_s$$

であるが，$R_0(c)$ は $\mathcal{H}_{s-2}$から $\mathcal{H}_s$の上への同型写像だから，これは $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}_{s-2}$と同値である．■

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_{-2})$ かつ $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{H}_s$, $s \geq -2$ ならば，$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_s)$ である（閉グラフ定理）．これに注意した上で，$s = 0$ の場合を系として書いておく．

系 4.2 $\mathcal{D}(H(T)) \subset \mathcal{D}(H_0) \iff T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_0)$ が成り立つ．

4.2 Additive pertubation の場合

$\mathcal{D}(H(T)) \subset \mathcal{D}(H_0)$ において，等号が成り立つときが，いわゆる additive perturbation である．これについては，次ぎの定理が成り立つ．

定理 4.3 $\mathcal{D}(H(T)) = \mathcal{D}(H_0)$ は

$$\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{H}_0 \quad \text{かつ} \quad 1 \in \rho(TR_0(c)) \tag{4.15}$$

と同値である[1]．

$$H(T) = H_0 + V, \qquad V = H(T) - H_0, \quad \mathcal{D}(V) = \mathcal{D}(H_0)$$

と書くとき，Tと Vの間には次ぎの関係がある．

$$V = (1 - TR_0(c))^{-1}T = T(1 - R_0(c)T)^{-1}, \tag{4.16}$$

$$T = (1 + VR_0(c))^{-1}V = V(1 + R_0(c)V)^{-1}. \tag{4.17}$$

---

[1]この定理は研究集会の予稿の定理 3.1 であるが，予稿では条件 (4.15) の中の $1 \in \rho(TR_0(c))$ が抜けていた．$1 \in \rho(TR_0(c))$ は仮定 2.4から は出ないから，予稿を訂正する．

注意 4.4 $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_0)$ であるが，Vを $\mathcal{H}_0$における作用素とみるときには，閉作用素とは限らない．例えば，$H(T) = H_0$のときには，$V = T = 0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_0)$ であるが，$\mathcal{H}_0$の作用素としては，Vは零作用素を $\mathcal{D}(H_0)$ 上に制限したものになる．

＜定理 4.3の証明＞　十分性．Tが仮定 2.4を満たすことは (4.15) より明らか．次ぎに $z \in \rho_T$とする．$1 + TW(z, c)$ を $\mathcal{H}_0$上に制限して考えると，$1 + TW(z, c) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ であり，かつ $\exists (1 + TW(z, c))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ である．そして，$\mathcal{H}_0$上では $W(z, c)$ を差の形に書いてよいから，仮定 $1 \in \rho(TR_0(c))$ も用いて，

$$
\begin{aligned}
1 + TW(z, c) &= (1 - TR_0(c))\{(1 + (1 - TR_0(c))^{-1}TR_0(z))\} \\
&= (1 - TR_0(c))(1 + VR_0(z))
\end{aligned}
$$

が得られる．ただし，Vは (4.16) で定義するものとする．左辺及び右辺の左側の因子は $\mathcal{H}_0$から $\mathcal{H}_0$上への両連続同型対応だから，$1 + VR_0(z)$ も同様である．そして，

$$
\begin{aligned}
R(z) &= R_0(z) - R_0(z)(1 + VR_0(z))^{-1}(1 - TR_0(c))^{-1}TR_0(z) \\
&= R_0(z) - R_0(z)(1 + VR_0(z))^{-1}VR_0(z) \\
&= R_0(z)(1 + VR_0(z))^{-1}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

が成り立つ．故に，$\mathcal{D}(H(T)) = \mathcal{D}(H_0)$ である．また，(4.18) を $v \in \mathcal{H}_0$に作用させ，$u = R_0(z)v$とおけば，$Hu = H_0u + Vu$ が出るから，$H = H_0 + V$である．

必要性．$\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{H}_0$は既知（定理 4.1）だから，$1 \in \rho(TR_0(c))$ だけを示せばよい．$H = H_0 + V$に対して成り立つ式

$$
R(z) = R_0(z)(1 + VR_0(z))^{-1}, \qquad z \in \rho(H) \cap \rho(H_0)
$$

の右辺で $z = c$としたものを，(3.9) に代入して計算すれば $T = (1 + VR_0(c))^{-1}V$, したがって $1 - TR_0(c) = (1 + VR_0(c)^{-1}$が得られるから，$(1 - TR_0(c))^{-1} = 1 + VR_0(c) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ である．

(4.16), (4.17) は上の証明から明らか．■

4.3　作用素の拡大との関係

定理 4.5 (i) $\mathcal{D}(H(T)) \supset \mathcal{N}(T)$ であり，$H(T)$ は H_0の $\mathcal{N}(T)$ 上への制限 $H_0|_{\mathcal{N}(T)}$の閉拡大である．

(ii) $\mathcal{N}$を $\mathcal{H}_2$の部分空間とする．$H(T)$ が $H_0|_{\mathcal{N}}$の閉拡大であるならば $\mathcal{N}(T) \supset \mathcal{N}$である．

$H(T)$ が自己共役の場合に着目すれば，次ぎの系が得られる．

系 4.6 $\mathcal{N}$を$\mathcal{H}_2$の部分空間とするとき，

$$H_0|_{\mathcal{N}} \text{の自己共役拡大の全体} = \{H(T)\,|\,T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_{-2}),\ T\text{は仮定 2.4, 3.5 を満たし，かつ}\ \mathcal{N}(T) \supset \mathcal{N}\}$$

<定理の証明>　(i) (3.9) により $Tu = 0$ ならば $R(c)(H_0 - c)u - u = 0$. 故に，$u = R(c)(H_0 u - c)U \in \mathcal{D}(H(T))$ であり，この式に $H(T) - c$ を作用させれば，$H(T)u = H_0 u$ であることが分かる．

(ii) $u \in \mathcal{N}$とする．(3.9) を u に作用させ，さらに $R_0(c)$ を掛ければ，$R_0(c)Tu = -R(c)(H_0 - c)u + u$. これにさらに，$H_0 - c$ を作用させる．仮定により $H(T)u = H_0 u$ だから $(H - c)R_0(c)Tu = -(H_0 - c)u + (H_0 - c)u = 0$. 故に，$Tu = 0$ であり，$\mathcal{N} \subset \mathcal{N}(T)$ が示された． ∎

5　結語

以上述べたことは，一般的な枠組みだけで，応用を論じるのはこれからの問題である．ここでは，断片的に 2, 3 のことに言及するだけに止める．

1. 系 4.6の応用．

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{in} \quad L^2(\mathbf{R})$$

とすれば，$\mathcal{H}_s = H^s(\mathbf{R})$（ソボレフ空間）である．$\mathcal{N} = C_0^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ とすると，$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_{-2})$ で $\mathcal{N}(T) \supset \mathcal{N}$なる条件は，$\delta$と$\delta'$が $\mathcal{H}_{-2} \ominus \mathcal{N}$ の基底であることを考慮すれば

$$Tf = (c_{11}(f, \delta) + c_{12}(f, \delta'))\delta + (c_{21}(f, \delta) + c_{22}(f, \delta'))\delta'$$

とかける．c_{ij}の作る 2 行 2 列行列を C_Tとすると，$H(T)$ が $H_{00} \equiv H_0|_{\mathcal{N}}$の自己共役拡大である条件を C_Tの条件として表し，$H(T)$ の定義域が $x = 0$ における境界条件（接続条件）で表されることを系統的に調べられるが，それは後日にゆずる．ここでは，試算の結果の次ぎの例だけを挙げておく．

$c = i$ と取り，C_Tにおいて $c_{11} = \sqrt{2}(i + e^{it})$, $t \in \mathbf{R}$, 他は 0 とする．そのとき $H(T)$ は H_{00}の自己共役拡大である．$\mathcal{D}(H(T))$ を決める条件は $t = \pi$ならば Dirichlet decoupling, その他の t に対しては

$$f'(0+) - f'(0-) = \rho(t)f(0), \qquad \rho(t) = \sqrt{2}\frac{1 + \sin t + \cos t}{1 + \cos t}$$

となる．(t が $\mathbf{R} \setminus \{\pi\}$ を一巡するとき，$\rho(t)$ は $\mathbf{R}$ を一巡することに注意.)

2. (2.6) を見ると，$H(T)$ と H_0のレゾルベントの差がコンパクトである（或いはトレース族に入る）ことは，Tが同様の性質を持つことと同値であることが分かる．しからば，H_0, $H(T)$ の間の摂動論，散乱理論をTの方で扱うことは出来ないであろうか．

一例として，surface interaction（例えば [1]）を考える．$\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^3)$ とし $H_0 = -\Delta$ とする．この時，$\mathcal{H}_s$はソボレフ空間 $H^2(\mathbf{R}^3)$ と一致する．$\mathbf{R}^2$が $\mathbf{R}^3$に埋め込まれているとして，$\mathcal{N} = C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{R}^2)$ とし，$\mathcal{N}(T) \supset \mathcal{N}$ を満たす T に対し $H(T)$ を構成すれば，これが $\mathbf{R}^2$上の surface interaction をもつハミルトニアンの一般形とみなすことが出来るであろう．実際，$H(T)$ の $\mathcal{N}$ 上への制限は$-\Delta$ と一致する．

このような，T としては，例えば次のようなものがある．

$H^2(\mathbf{R}^3)$ から $H^{\frac{3}{2}}(\mathbf{R}^2)$ への trace operator を γで表わす．$t(x) \in L^1(\mathbf{R}^2)$ とすると，$T = \gamma^* t(x) \gamma$ は，$\mathcal{L}(\mathcal{H}_{+2,}, \mathcal{H}_{-2})$ の元とみなすことが出来る．簡単の為 c を実軸上から選べば，この Tは仮定 2.4, 3.5を満たすことが示せる．ここで trace class method を用いれば，H_0 と $H(T)$ の wave operator $\Omega_\pm(H(T), H_0)$ の存在，完全性が容易に示される．ただし，$H(T)$ が $\mathbf{R}^2$上の境界条件（接続条件）を用いてどのように表されるかは，別に調べねばならない問題であるが，**1** で言及した常微分の場合ほど簡単ではないだろう．今後の課題である．

References

[1] T. Ikebe and S. Shimada, Spectral and scattering theroy of Schrödinger operators with penetrable wall potentials, J. Math. Kyoto Univ. **31**(1991), 219–258.

[2] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, 2nd ed., 1976, Springer.

[3] A. Kiselev and B. Simon, Rank one perturbations with infinitesimal coupling, J. Functional Anal. **130**(1995), 345–356.