数理解析研究所講究録
994 巻 1997 年 94-103

LOW ENERGY RESOLVENT ESTIMATES FOR ACOUSTIC PROPAGATORS IN PERTURBED STRATIFIED MEDIA

門脇　光輝 (都立大非常勤)

§1 Intoduction.

Kikuchi-Tamura [1] は三次元中の摂動された三層媒質中の音響作用素の resolvent の low energy に関する評価を行なった。しかしそこではある条件の伝播速度を取り扱うことができなかった。ここではその場合を取り扱うことにする。

$n \geqq 3, x=(y,z) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ とする。ここでは次の作用素を考える。

$$L=-a(x)^2 \triangle, \tag{1.1}$$

ただし、 $a(x)$ は伝播速度そして

$$\triangle=\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

とする。 (1.1) を次の (1.2) の作用素の摂動と考える。

$$L_0=-a_0(z)^2 \triangle, \tag{1.2}$$

ただし

$$a_0(z)=\begin{cases} c_+ & (z \geqq h) \\ c_h & (0<z<h) \\ c_- & (z \leqq 0), \end{cases}$$

$c_\pm, c_h, h$ は正の定数とする。 $c_h<\min(c_+,c_-)$ のとき (1.2) によって生成される波動方程式の解で $0<z<h$ において伝播する波 (Guided waves) が現われる (cf. Wilcox [5] 又は Weder [3])。 Kikuchi-Tamura が取り扱った伝播速度の条件は
$c_h<\min(c_+,c_-), c_+ \neq c_-$ であった。ここでは $c_h<c_+=c_-$ の場合を取り扱う。Wilcox [5] 又は Weder [3] によると、ここでの場合を考えると low energy に Guided wave が現れるが Kikuchi-Tamura の場合においては low energy に Guided wave が現れない。

$a(x)$ に対しては次の条件を考える。 $a(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, ある正の定数 c_m, c_M に対して $0<c_m<a(x)<c_M$ そして、ある $\theta>0$ に対して

$$a(x)-a_0(z)=O(|x|^{-\theta-1}) \quad (|x| \to +\infty) \tag{1.3}$$

を満足するものとする。

今、$\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbf{R}^n; a_0^{-2}(z)dx)$ と $\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbf{R}^n; a^{-2}(x)dx)$ を次の内積を持つ Hilbert 空間とする

$$< u, v >_0 = \int_{\mathbf{R}^n} u(x)\overline{v(x)} a_0^{-2}(z)dx \quad \text{and} \quad < u, v >_1 = \int_{\mathbf{R}^n} u(x)\overline{v(x)} a^{-2}(x)dx$$

このとき L (resp. L_0) は $\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{H}_0$) 上で非負な本質的自己共役作用素となり、その定義域 $D(L)$ (resp. $D(L_0)$) は $H^2(\mathbf{R}^n)$ となる。ただし $H^s(\mathbf{R}^n)$ は $\mathbf{R}^n$ 上の s 階の Sobolev 空間とする。

結果を述べるために記号を準備する。$R(z; L)$ を L の $Imz \neq 0$ に対する resolvent $(L-z)^{-1}$ とする。A が $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上の有界作用素の時そのノルムを $\|A\|$ と書くことにする。

Weder [3] の L の極限吸収の原理と固有値の非存在に注意して次の結果を得ることができる

Theorem 1.1. $c_h < c_+ = c_-$ を仮定する。この時
(i) $n = 3$ に対してある $d, 0 < d < 1/2$ が存在して

$$\| < x >^{-1} R(\lambda \pm i0; L) < x >^{-1} \| = O(\lambda^{-d}) \quad (\lambda \to 0),$$

(ii) $n \geqq 4$ に対して

$$\| < x >^{-1} R(\lambda \pm i0; L) < x >^{-1} \| = O(1) \quad (\lambda \to 0).$$

ただし $< x > = (1 + |x|^2)^{1/2}$

これらを用いて極限振幅の原理 (cf. Kikuchi-Tamura [1]) とある意味での Local energy decay が得られる。
以下 $c_h < c_+ = c_- = 1$ として考えても一般性を失わない。$a^{-2}(x) - 1$ を Kikuchi-Tamura [1] 従って次のように分解する。十分に小さく固定された $\delta > 0$ に対して

$$a^{-2}(x) - 1 = V_1(x) + V_2(x)$$

ただし

$$\begin{cases} (1 + |x|)|V_1(x) - (a_0^{-2}(z) - 1)| \leqq \delta \\ V_2(x) \quad \text{compact support を持つ}, \end{cases}$$

このとき次のような $L^2(\mathbf{R}_x^n)$ 上の自己共役作用素 $L_1(\lambda)$ を考える

$$\begin{cases} L_1(\lambda) = -\triangle - \lambda V_1(x) \\ D(L_1(\lambda)) = H^2(\mathbf{R}_x^n) \end{cases}$$

ここで

$$R(\lambda \pm i\kappa; L) = Q(\lambda, \pm i\kappa)(Id - \lambda V_2 Q(\lambda, \pm i\kappa))^{-1} a(x)^{-2}$$

(ただし、$Q(\lambda, \pm i\kappa) = (L_1(\lambda) - \lambda \mp i\kappa a^{-2}(x))^{-1}$) に注意すると Theorem 1 は次の Lemma 2 からわかる。

Lemma 1.2. *(i)* $n=3$ に対してある $d, 0<d<1/2$ が存在して

$$\| <x>^{-1} Q(\lambda, \pm i\kappa) <x>^{-1} \| = O(\lambda^{-d}), \quad (\lambda \to 0)$$

(ii) $n \geqq 4$ に対して

$$\| <x>^{-1} Q(\lambda, \pm i\kappa) <x>^{-1} \| = O(1), \quad (\lambda \to 0),$$

uniformly in $0<\kappa<1$.

§2 Conjugate operator.

Kikuchi-Tamuta [1] は三次元の dailation の generator を Conjugate operator として Commutator method (cf. Mouure [2]) を用いて証明している。ここでも Commutator method を用いるが Conjugate operator は $L_0(\lambda) = -\Delta - \lambda(a_0^{-2}(z)-1)$ の一般化された Fourier 変換 (cf. Weder [3]) と n 次元、$n-1$ 次元の dailation の generator を用いて構成する。評価のポイントは Free Wave に関する一般固有関数を評価することである (Lemma 2.1)。

$k=(p,k_0) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ とする。Weder [3] によれば $L^2(\mathbf{R}^n_x)$ から $L^2(\mathbf{R}^n_k)$ の上への partially isometric operator $F_0(\lambda)$ と $L^2(\mathbf{R}^n_x)$ から $L^2(\mathbf{R}^{n-1}_p)$ の上への partially isometric operator $F_1(\lambda)$ が

$$F_0(\lambda)L_0(\lambda)u = |k|^2 F_0(\lambda)u, \quad F_1(\lambda)L_0(\lambda)u = (|p|^2 - \omega(\lambda)^2)F_1(\lambda)u.$$

成立するように構成できる。ただし $\omega(\lambda)^2 \in (0, \lambda(c_h^{-2}-1))$ 。また $F_0(\lambda)u, F_1(\lambda)u$ はそれぞれ Free Wave と Guide Wave に関する固有関数を用いて構成されている。これらの $F_0(\lambda), F_1(\lambda)$ を用いて Conjugate operator $D(\lambda)$ を次のように定義する

$$D(\lambda) = F_0(\lambda)^*(-D_n)F_0(\lambda) + F_1(\lambda)^*(-D_{n-1})F_1(\lambda),$$

ただし

$$D_n = \frac{1}{2i}(k \cdot \nabla_k + \nabla_k \cdot k), \quad D_{n-1} = \frac{1}{2i}(p \cdot \nabla_p + \nabla_p \cdot p).$$

このとき $H^2(\mathbf{R}^n) \cap D(D(\lambda)$ 上の form $i[L_0(\lambda), D(\lambda)]$ は部分積分により

$$i[L_0(\lambda), D(\lambda)] = 2(L_0(\lambda) + \omega(\lambda)^2 F_1(\lambda)^* F_1(\lambda))$$

となる。このことを用いて更に

$$i[L_1(\lambda), D(\lambda)] = 2(L_0(\lambda) + \omega(\lambda)^2 F_1(\lambda)^* F_1(\lambda)) + \lambda i[V, D(\lambda)] \tag{2.1}$$

を得る。ただし $V = V_1 - (a_0^{-2}(z)-1)$。

Free Wave に関する一般固有関数の $k_0=0$ における評価に注意すると次の Lemma を得る。

Lemma 2.1. $0<\lambda<<1$ に対して $D(D(\lambda))$ 上で定義された *form* $i[V, D(\lambda)]$ は $H^1(\mathbf{R}^n)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}^n)$ への有界作用素 $i[V, D(\lambda)]^0$ に拡張でき、

$$\|(-\Delta+1)^{-1/2} i[V, D(\lambda)]^0 (-\Delta+1)^{-1/2}\| = \delta O(1) \quad (\lambda \to 0)$$

なる評価を持つ。

proof. form $i[V, D(\lambda)]$ に対する式変形により

$$\begin{aligned}
&i[V, D(\lambda)]^0 \\
&= nV - \frac{1}{2}VF_1(\lambda)^*F_1(\lambda) - \frac{1}{2}F_1(\lambda)^*F_1(\lambda)V - Vy\cdot\nabla_y - \nabla_y^*\cdot yV \\
&- (\partial_{k_0}F_0(\lambda)V)^*k_0F_0(\lambda) - (k_0F_0(\lambda))^*(\partial_{k_0}F_0(\lambda)V)
\end{aligned}$$

と書ける。これより拡張作用素が $H^1(\mathbf{R}^n)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}^n)$ への有界作用素になることがわかる。さらに表現に注意して各項を評価する。このとき若干注意がいるのは第6、7項である。第6項と第7項の評価同じなので第6項のみを評価する。$F_0(\lambda)$ を構成する固有関数は $k_0 = 0$ においてある特異性を持つので次のように分解する

$$\begin{aligned}
&< (\partial_{k_0}F_0(\lambda)V)^*k_0F(\lambda)(-\triangle+1)^{-1/2}u, v >_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} \\
&=< F_0(\lambda)(-\triangle+1)^{-1/2}u, \chi_{|k_0|<1}k_0\partial_{k_0}F_0(\lambda)Vv, >_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} \\
&+ < k_0F_0(\lambda)(-\triangle+1)^{-1/2}u, \chi_{|k_0|>1}\partial_{k_0}F_0(\lambda)V >_{L^2(\mathbf{R}_x^n)},
\end{aligned}$$

そして固有関数を pointwise に評価することにより

$$\|\chi_{|k_0|>1}\partial_{k_0}F_0(\lambda)V\| = \delta O(1) \quad (\lambda \to 0)$$

$$\|\chi_{|k_0|<1}k_0\partial_{k_0}F_0(\lambda)V\| = \delta O(1) \quad (\lambda \to 0)$$

を得ることができるのでこの Lemma がわかる。

この結果より $i[L_1(\lambda), D(\lambda)]$ は $H^1(\mathbf{R}^n)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}^n)$ への有界作用素 $i[L_0(\lambda), D(\lambda)]^0$ に拡張できる。Lemma 2.1 の評価式を用いるとただちに Mourre estimate(Lemma 2.2) が得られる。

Lemma 2.2. $f_\lambda(r) \in C_0^\infty(\mathbf{R}), 0 \leqq f_\lambda \leqq 1$ *such that supp*$f_\lambda \in (\lambda/3, 3\lambda)$, $f_\lambda = 1$*on* $[\lambda/2, 2\lambda]$ なる f_λ に対して

$$f_\lambda(L_1(\lambda))i[L_1(\lambda), D(\lambda)]^0f_\lambda(L_1(\lambda)) \geqq C\lambda f_\lambda(L_1(\lambda))^2 \tag{2.2}$$

ただし、$C > 0$ は λ に無関係な定数。

proof. Lemma 2.1 から次がわかる

$$\|f_\lambda(L_1(\lambda))i[V, D(\lambda)]^0f_\lambda(L_1(\lambda))\| = \delta O(1) \quad (\lambda \to 0). \tag{2.3}$$

簡単のため $f_\lambda(L_1(\lambda))$ を f_λ と書く。$u \in L^2(\mathbf{R}_x^n)$ に対して (2.1) と (2.3) を用いると次がわかる

$$\begin{aligned}
&< f_\lambda i[L_1(\lambda), D(\lambda)]^0f_\lambda u, u >_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} \\
&= 2 < L_1(\lambda)f_\lambda u, f_\lambda u >_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} + 2\omega(\lambda)^2|F_1(\lambda)f_\lambda u|^2_{L^2(\mathbf{R}_p^{n-1})} \\
&+ 2\lambda < Vf_\lambda u, f_\lambda u >_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} + \lambda < i[V, D(\lambda)]^0f_\lambda u, f_\lambda u >_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} \\
&\geqq (2/3 - C\delta)\lambda|f_\lambda u|^2_{L^2(\mathbf{R}_x^n)},
\end{aligned}$$

ただし $C > 0$ は λ に無関係な定数。$0 < \delta << 1$ に注意すると (2.2) がわかる。 □

§3 Proof of Lemma 1.2.

Kikuchi-Tamura [1] と Weder [4] に従い Lemma 1.2 を証明する。ここでは $-$ の場合のみ示す。$+$ の場合は同様にできる。Kikuchi- Tamura [1] に従い 次の cut off functions を考える。$\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ such that

$$\begin{aligned} &supp\chi_n(x) \subset \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 2\} \\ &\chi = 1 \quad \text{for} \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

十分に小さい $\epsilon > 0$ を用いて $V_\epsilon(x)$ を次のように定義する

$$V_\epsilon(x) = \chi(\epsilon x)V(x)。$$

更にこの $V_\epsilon(x)$ を用いて作用素 $B(\epsilon;\lambda)$ を次のように定義する

$$B(\epsilon;\lambda) = 2(L_0(\lambda) + \omega(\lambda)^2 F_1(\lambda)^* F_1(\lambda)) + i\lambda[V_\epsilon, D(\lambda)]^0.$$

Lemma 2.1 の証明から $i[V_\epsilon, D(\lambda)]^0$ の表現は次のようになる

$$\begin{aligned} &i[V_\epsilon, D(\lambda)]^0 \\ &= nV_\epsilon - \frac{1}{2}V_\epsilon F_1(\lambda)^* F_1(\lambda) - \frac{1}{2}F_1(\lambda)^* F_1(\lambda) V_\epsilon \\ &- C_1(\epsilon;\lambda) - C_2(\epsilon;\lambda) - C_1(\epsilon;\lambda)^* - C_2(\epsilon;\lambda)^*, \end{aligned}$$

ただし

$$C_1(\epsilon;\lambda) = V_\epsilon y \cdot \nabla_y, \quad C_2(\epsilon;\lambda) = (\partial_{k_0} F_0(\lambda) V_\epsilon)^* k_0 F_0(\lambda).$$

Lemma 2.1 の証明から $B(\epsilon;\lambda)$ は $H^1(\mathbf{R}_x^n)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}_x^n)$ への有界作用素と考えることができる。

次に $F_0(\lambda)^* D_n F_0(\lambda)u, F_1(\lambda)^* D_{n-1} F_1(\lambda)u \in H^1(\mathbf{R}_x^n)$ を満たす $u \in H^2(\mathbf{R}_x^n) \cap D(D(\lambda))$ に対して form $i[B(\epsilon;\lambda), D(\lambda)]$ の拡張作用素の表現を与えるために作用素 $E_j(\epsilon;\lambda)(j = 1, 2, \cdots, 7)$ を次のように定義する

$$\begin{aligned} E_1(\epsilon;\lambda) &= \nabla_y^* \cdot y V_\epsilon y \cdot \nabla_y + (k_0 \partial_{k_0})^* F_0(\lambda) V_\epsilon y \cdot \nabla_y, \\ E_2(\epsilon;\lambda) &= (k_0 F_0(\lambda))^* \partial_{k_0} F_0(\lambda) V_\epsilon y \cdot \nabla_y \\ &+ (k_0 F_0(\lambda))^* (\partial_{k_0} F_0(\lambda) < x > V_\epsilon)(\partial_{k_0} F_0(\lambda) < x >^{-1})^* k_0 F_0(\lambda) \\ E_3(\epsilon;\lambda) &= \sum_{j,l=1}^{n-1} y_j y_l V_\epsilon \partial_j \partial_l + V_\epsilon y \cdot \nabla_y + (\partial_{k_0} F_0(\lambda) V_\epsilon)^* k_0 F_0(\lambda) \nabla_y \\ E_4(\epsilon;\lambda) &= (k_0 F_0(\lambda) \nabla_y)^* \partial_{k_0} F_0(\lambda) V_\epsilon + (\partial_{k_0} F_0(\lambda))^* k_0 F_0(\lambda) \\ &\qquad + (\partial_{k_0}^2 F_0(\lambda) V_\epsilon)^* k_0^2 F_0(\lambda) \\ E_5(\epsilon;\lambda) &= nV_\epsilon y \cdot \nabla_y + n(\partial_{k_0} F_0(\lambda))^* k_0 F_0(\lambda) \\ E_6(\epsilon;\lambda) &= \frac{1}{2}F_1(\lambda)^* F_1(\lambda) V_\epsilon y \cdot \nabla_y + \frac{1}{2}F_1(\lambda)^* F_1(\lambda)(\partial_{k_0} F_0(\lambda) V_\epsilon)^* k_0 F_0(\lambda) \\ E_7(\epsilon;\lambda) &= \frac{1}{2}V_\epsilon y \cdot F_1(\lambda)^* F_1(\lambda) \nabla_y. \end{aligned}$$

これらを用いて $i[B(\epsilon;\lambda),D(\lambda)]$ の拡張作用素 $i[B(\epsilon;\lambda),D(\lambda)]^0$ は次のように得られる

$$\begin{aligned}
&i[B(\epsilon;\lambda),D(\lambda)]^0\\
&=4(L_0(\lambda)+\omega(\lambda)^2F_1(\lambda)^*F_1(\lambda))+\sum_{j=1}^{7}(E_j(\epsilon;\lambda)+E_j(\epsilon;\lambda)^*)\\
&+ni[V_\epsilon,D(\lambda)]^0-i/2[V_\epsilon,D(\lambda)]^0F_1(\lambda)^*F_1(\lambda)-i/2F_1(\lambda)^*F_1(\lambda)i[V_\epsilon,D(\lambda)]^0.
\end{aligned}$$

更にこれから $i[B(\epsilon;\lambda),D(\lambda)]^0$ が $H^2(\mathbf{R}^n_x)$ から $H^{-2}(\mathbf{R}^n_x)$ への有界作用素であることがわかる。次の Lemma の (i) と (ii) は Weder [4] の Lemma 2.5 の証明法に従えばわかる、また (iii) は Kikuchi-Tamura[1] の Lemma 5.6 の証明法によりわかる。

Lemma 3.1. *f_λ を Lemma 2.4 と同じする。このとき*
(i) $f_\lambda(L_1(\lambda))D(D(\lambda))\subset D(D(\lambda))$.
(ii)$D(D(\lambda))$ 上の作用素として定義された $[f_\lambda(L_1(\lambda)),D(\lambda)]$ は $L^2(\mathbf{R}^n_x)$ 上の拡張有界作用素 $[f_\lambda(L_1(\lambda)),D(\lambda)]^0$ を持つ。
(iii)$\|[f_\lambda(L_1(\lambda)),D(\lambda)]^0\|=O(1)$

更に Kikuchi-Tamura[1] の Lemma 5.6 の証明法と Lemma 3.1(iii) により次がわかる

Lemma 3.2. *$M(\epsilon;\lambda)=f_\lambda(L_1(\lambda))B(\epsilon;\lambda)f_\lambda(L_1(\lambda))$ と書く。このとき $D(D(\lambda))$ 上の form; $[M(\epsilon;\lambda),D(\lambda)]$ は $L^2(\mathbf{R}^n_x)$ 上の有界作用素 $[M(\epsilon;\lambda),D(\lambda)]^0$ に拡張できる。更に次の表現を持つ*

$$\begin{aligned}
&[M(\epsilon;\lambda),D(\lambda)]^0\\
&=f_\lambda(L_1(\lambda))[B(\epsilon;\lambda),D(\lambda)]^0f_\lambda(L_1(\lambda))+f_\lambda(L_1(\lambda))B(\epsilon;\lambda)\\
&[f_\lambda(L_1(\lambda)),D(\lambda)]^0\\
&+[f_\lambda(L_1(\lambda)),D(\lambda)]^0B(\epsilon;\lambda)f_\lambda(L_1(\lambda))
\end{aligned}$$

Lemma 3.3. *$\lambda\to 0$ のとき*
(i) $\|(-\triangle+\lambda)^{-1/2}(B(\epsilon;\lambda)-B(\lambda))(-\triangle+\lambda)^{-1/2}\|=\epsilon^\theta O(1)$,
(ii) $\|(-\triangle+\lambda)^{-1/2}(\frac{d}{d\epsilon}B(\epsilon;\lambda))(-\triangle+\lambda)^{-1/2}\|=\epsilon^{\theta-1}O(1)$,
(iii) $\|(-\triangle+\lambda)^{-1}[B(\epsilon;\lambda),D(\lambda)]^0(-\triangle+\lambda)^{-1}\|=\epsilon^{\theta-1}O(\lambda^{-1})$,
where $B(\lambda)=i[L_1(\lambda),D(\lambda)]^0$.

proof. (i) と (ii) は $B(\epsilon;\lambda)$ の表現式からわかる。
$F_0(\lambda)$ を構成する固有関数を pointwise に評価することにより

$$\|\chi_{|k_0|>1}\partial^2_{k_0}F_0(\lambda)V_\epsilon\|=\epsilon^{\theta-1}O(1),\quad(\lambda\to 0)$$
$$\|\chi_{|k_0|<1}k_0^2\partial^2_{k_0}F_0(\lambda)V_\epsilon\|=\epsilon^{\theta-1}O(1),\quad(\lambda\to 0)$$

がわかる。これと $[B(\epsilon;\lambda),D(\lambda)]^0$ の表現式より (iii) がわかる。 □

Lemma 2.2 と Lemma 3.3(iii) から、十分に小さい $\epsilon>0$ に対して

$$M(\epsilon;\lambda)\geq\gamma\lambda f_\lambda^2(L_1(\lambda))$$

が成立する。 ただし $\gamma>0$ は ϵ,λ に無関係な定数。このことより $0<\kappa<1$ と 十分に小さい $\epsilon>0$ に対して次のような $L^2(\mathbf{R}^n_x)$ 上の有界作用素 $G_\kappa(\epsilon;\lambda)$ が定義できる

$$G_\kappa(\epsilon;\lambda)=(L_1(\lambda)-\lambda-i\kappa a^{-2}(x)-i\epsilon M(\epsilon;\lambda))^{-1}$$

Lemma 3.4. λ に無関係な $\epsilon_0, 0 < \epsilon_0 << 1$, が存在して $\epsilon, 0 < \epsilon \le \epsilon_0$, なる ϵ に対して

$$\|G_\kappa(\epsilon;\lambda)\| = \epsilon^{-1}O(\lambda^{-1}), \quad (\lambda \to 0)$$

uniformly in $\kappa, 0 < \kappa < 1$.

この証明は Kikuchi and Tamura [1] の Lemma 5.3 の証明と同様にできる。

$$F_\kappa(\epsilon;\lambda) = X_1 G_\kappa(\epsilon;\lambda) X_1,$$

とかく、ただし $X_1 = (1+|x|^2)^{-1/2}$.
$F_\kappa(\epsilon;\lambda)$ を ϵ について微分すると

$$(d/d\epsilon)F_\kappa(\epsilon;\lambda) = -iX_1G_\kappa M(\epsilon;\lambda)G_\kappa X_1 - i\epsilon X_1 G_\kappa((d/d\epsilon)M(\epsilon;\lambda))G_\kappa X_1.$$

Weder [4] に従えば次がわかる

$$G_\kappa(\epsilon;\lambda)D(D(\lambda)) \subset D(D(\lambda)) \cap H^2(\mathbf{R}^n), \tag{3.1}$$

$$Range(f_\lambda(L_1(\lambda))X_1) \subset D(D(\lambda)). \tag{3.2}$$

$g_\lambda(p) = 1 - f_\lambda(p)$. とする。簡単のため $f_\lambda(L_1(\lambda))$ と $g_\lambda(L_1(\lambda))$ をそれぞれ f_λ と g_λ とかく。(3.1) と (3.2) を用いると $(d/d\epsilon)F_\kappa(\epsilon;\lambda)$ を $L^2(\mathbf{R}^n_x)$ 上の form として次のように分解できる

$$(d/d\epsilon)F_\kappa(\epsilon;\lambda) = \sum_{j=1}^{11} Y_\kappa^j(\epsilon;\lambda), \tag{3.3}$$

ただし

$$\begin{aligned}
Y_\kappa^1 &= -iX_1G_\kappa f_\lambda(B(\epsilon;\lambda) - B(\lambda))f_\lambda G_\kappa X_1,\\
Y_\kappa^2 &= iX_1G_\kappa g_\lambda B(\lambda) f_\lambda G_\kappa X_1,\\
Y_\kappa^3 &= iX_1G_\kappa g_\lambda B(\lambda) g_\lambda G_\kappa X_1,\\
Y_\kappa^4 &= iX_1G_\kappa f_\lambda B(\lambda) g_\lambda G_\kappa X_1,\\
Y_\kappa^5 &= -iX_1 f_\lambda G_\kappa[L_1(\lambda) - \lambda - i\kappa a(x)^{-2} - i\epsilon M(\epsilon;\lambda), D(\lambda)]G_\kappa f_\lambda X_1,\\
Y_\kappa^6 &= -iX_1 f_\lambda G_\kappa B(\lambda) G_\kappa g_\lambda X_1,\\
Y_\kappa^7 &= -iX_1 g_\lambda G_\kappa B(\lambda) G_\kappa g_\lambda X_1,\\
Y_\kappa^8 &= -iX_1 g_\lambda G_\kappa B(\lambda) G_\kappa f_\lambda X_1,\\
Y_\kappa^9 &= \kappa X_1 f_\lambda G_\kappa[a(x)^{-2}, D(\lambda)]G_\kappa f_\lambda X_1,\\
Y_\kappa^{10} &= -i\epsilon X_1 G_\kappa((d/d\epsilon)M(\epsilon;\lambda))G_\kappa X_1,\\
Y_\kappa^{11} &= \epsilon X_1 f_\lambda G_\kappa[M(\epsilon;\lambda), D(\lambda)]G_\kappa f_\lambda X_1.
\end{aligned}$$

(3.3) の右辺を評価するために次に Lemma 3.5~ Lemma 3.8 を準備する。

Lemma 3.5. $\lambda \to 0$ のとき:
(i) $\|g_\lambda G_\kappa(\epsilon;\lambda)\| = O(\lambda^{-1})$,
(ii) $\|g_\lambda G_\kappa(\epsilon;\lambda)(-\triangle+\lambda)^{1/2}\| = O(\lambda^{-1/2})$,
(iii) $\|(-\triangle+\lambda)^{1/2} g_\lambda G_\kappa(\epsilon;\lambda)(-\triangle+\lambda)^{1/2}\| = O(1)$,
(iv) $\|(-\triangle+\lambda)^{1/2} f_\lambda G_\kappa(\epsilon;\lambda)X_1\| = \epsilon^{-1/2}\|F_\kappa\|^{1/2}O(1)$,
(v) $\|(-\triangle+\lambda)^{1/2} g_\lambda G_\kappa(\epsilon;\lambda)X_1\| = O(1)$,
(vi) $\|F_\kappa(\epsilon;\lambda)\| = \epsilon^{-1}O(1)$,
uniformly $\kappa, 0<\kappa<1$.

Lemma 3.5 $(i) \sim (iii)$ の証明は Kikuchi and Tamura [3] の Lemma 5.4 のそれを見よ。 また (iv) と (v) の証明は Kikuchi and Tamura [3] の Lemma 5.5 のそれを見よ。(vi) の証明には次の良く知られた不等式を必要とする

$$\int_{\mathbf{R}_x^n} <x>^{-2} |u(x)|^2 dx \le C \int_{\mathbf{R}_x^n} |\nabla u(x)|^2 dx. \tag{3.4}$$

(3.4),(iv),(v) を用いると (vi) がわかる。
Y_κ^5 を評価するには次の lemma を必要とする。.

Lemma 3.6. $\lambda \to 0$ のとき:

$$\|f_\lambda F_0(\lambda)^* k_0 \partial_{k_0} F_0(\lambda) X_1\| = \begin{cases} O(\lambda^{1/4}) & (n=3) \\ O(\lambda^{1/2}) & (n \geqq 4). \end{cases}$$

proof. $u, v \in L^2(\mathbf{R}_x^n)$ とする。 $f_\lambda F_0(\lambda)^* k_0 \partial_{k_0} F_0(\lambda) X_1$ を form の意味で次のように分解する

$$\begin{aligned} &< f_\lambda F_0(\lambda)^* k_0 \partial_{k_0} F_0(\lambda) X_1 u, v >_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} \\ &=< \partial_{k_0} F_0(\lambda) X_1 (\chi_{z<0}(z) + \chi_{0 \leqq z \leqq h}(z) + \chi_{z>h}(z)) u, k_0 F_0(\lambda) f_\lambda v >_{L^2(\mathbf{R}_k^n)} \end{aligned}$$

$F_0(\lambda)$ を構成する固有関数の表現と Plancherel の定理そして (4.10) より

$$\begin{aligned} &| < \partial_{k_0} F_0(\lambda) X_1 \chi_{z<0}(z) u, k_0 F_0(\lambda) f_\lambda v >_{L^2(\mathbf{R}_k^n)} | \\ &\qquad \leqq C\lambda^{1/2} |u|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} |v|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}, (\lambda \to 0) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &| < \partial_{k_0} F_0(\lambda) X_1 \chi_{z>h}(z) u, k_0 F_0(\lambda) f_\lambda v >_{L^2(\mathbf{R}_k^n)} | \\ &\qquad \leqq C\lambda^{1/2} |u|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} |v|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}, (\lambda \to 0) \end{aligned} \tag{3.6}$$

がわかる。同様にして

$$\begin{aligned} &| < \partial_{k_0} F_0(\lambda) X_1 \chi_{0 \leqq z \leqq h}(z) u, k_0 F_0(\lambda) f_\lambda v >_{L^2(\mathbf{R}_k^n)} | \\ &\qquad \leqq C\lambda^{d_n} |u|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} |v|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}, (\lambda \to 0) \end{aligned} \tag{3.7}$$

ただし $d_n = 1/4(n=3), = 1/2(n \geqq 4)$ (3.5),(3.6),(3.7) から Lemma がわかる。 □

Remark (3.7) において $n=3$ と $n \geqq 4$ の評価が違うのはその証明の中で

$$\int_{\mathbf{R}_y^n} <y>^{-2} |u(y)|^2 dy \le C \int_{\mathbf{R}_y^n} |\nabla_y u(y)|^2 dy.$$

を用いる箇所あるためである。上の不等式は $n=3$ のとき成立しないので別の評価法を用いる。
Y_κ^9 を評価するために次の Lemma を必要とする。

Lemma 3.7. $D(D(\lambda))$ 上で *form* として定義された $[a^{-2}(x), D(\lambda)]$ は $H^1(\mathbf{R}^n_x)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}^n_x)$ への有界作用素 $[a^{-2}(x), D(\lambda)]^0$ に拡張できる。さらに

$$\begin{aligned}&i[a^{-2}(x), D(\lambda)]^0\\&= i[\tilde{V}, D(\lambda)]^0 + (c_h^{-2} - 1)((n-1)\chi_{0<z<h}(z) - (\partial_{k_0} F_0(\lambda)\chi_{0<z<h}(z))^* k_0 F_0(\lambda)\\&- (k_0 F_0(\lambda))^* \partial_{k_0} F_0(\lambda)\chi_{0<z<h}(z) + F_0(\lambda)^* F_0(\lambda)),\end{aligned}$$

$$\|(-\Delta+1)^{-1/2} i[a^{-2}(x), D(\lambda)]^0(-\Delta+1)^{-1/2}\| = O(1) \quad (\lambda \to 0), \tag{3.8}$$

ただし $\tilde{V} = a^{-2}(x) - a_0^{-2}(z)$.

proof. $u, v \in D(D(\lambda))$ に対して $i[a^{-2}(x), D(\lambda)]$ を次のように分解する

$$\begin{aligned}&< i[a^{-2}(x), D(\lambda)]u, v >_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}\\&=< i[\tilde{V}, D(\lambda)]u, v >_{L^2(\mathbf{R}^n_x)} + < i[a_0^{-2}(z), D(\lambda)]u, v >_{L^2(\mathbf{R}^n_x)},\end{aligned}$$

Lemma 2.1 の証明と同様に第一項は $H^1(\mathbf{R}^n_x)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}^n_x)$ への有界作用素 $i[\tilde{V}, D(\lambda)]^0$ に拡張できる。$[\tilde{V}, D(\lambda)]^0$ の表現については Lemma 2.1 の証明を見よ。

第二項については

$$\begin{aligned}&< i[a_0^{-2}(z), D(\lambda)]u, v >_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}\\&= i(c_h^{-2} - 1)(< D(\lambda)u, \chi_{0<z<h} v >_{L^2(\mathbf{R}^n_x)} - < \chi_{0<z<h} u, D(\lambda)v >_{L^2(\mathbf{R}^n_x)})\end{aligned}$$

に注意して部分積分を行なえば $H^1(\mathbf{R}^n_x)$ から $H^{-1}(\mathbf{R}^n_x)$ への有界作用素 $i[a_0^{-2}(z), D(\lambda)]^0$ に拡張でき

$$\begin{aligned}&i[a_0^{-2}(z), D(\lambda)]^0\\&=(c_h^{-2} - 1)((n-1)\chi_{0<z<h}(z) - (\partial_{k_0} F_0(\lambda)\chi_{0<z<h}(z))^* k_0 F_0(\lambda)\\&- (k_0 F_0(\lambda))^* \partial_{k_0} F_0(\lambda)\chi_{0<z<h}(z) + F_0(\lambda)^* F_0(\lambda)).\end{aligned}$$

をえる。(3.8) については Lemma 2.1 の証明と同様にわかる。 □

Lemma 3.2 と 3.3(iii) を用いて Kikuchi-Tamura[1] の証明に従えば次がわかる。

Lemma 3.8. $\lambda \to 0$ のとき

$$\|[M(\epsilon; \lambda), D(\lambda)]^0\| = \epsilon^{\theta-1} O(\lambda)$$

Lemma 3.3 ~ 3.8 を用いて $Y^j_\kappa, 1 \le j \le 11$ を評価できる (Kikuchi-Tamura [1] をみよ)。ここでは Y^5_κ のみ評価する。$D(\lambda) f_\lambda X_1$ を次のように書き直す

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}(f_\lambda \nabla_y \cdot y X_1 + \frac{n-1}{2} f_\lambda X_1)\\&\qquad - \frac{1}{i}(f_\lambda F_0(\lambda)^* k_0 \partial_{k_0} F_0(\lambda) X_1 + \frac{1}{2} f_\lambda F_0(\lambda)^* F_0(\lambda) X_1)\\&\qquad\qquad + [D(\lambda), f_\lambda]^0 X_1.\end{aligned}$$

Lemma 3.1 (iii),3.3 (iv), (v), Lemma 3.6 から $\lambda \to 0$ のとき

$$\|Y_\kappa^5\| \leqq \begin{cases} C\lambda^{-1/4}(1+\epsilon^{-1/2}\|F_\kappa\|^{1/2}) & (n=3) \\ C(1+\epsilon^{-1/2}\|F_\kappa\|^{1/2}) & (n \geqq 4), \end{cases} \tag{3.9}$$

となることがわかる。

以上より次の微分不等式が得られる

(3.10)

$$\|(d/d\epsilon)F_\kappa(\epsilon;\lambda)\| \leqq \begin{cases} C(\lambda^{-1/4}+\lambda^{-1/4}\epsilon^{-1/2}\|F_\kappa\|^{1/2}+\epsilon^{\theta-1}\|F_\kappa\|) & (n=3) \\ C(1+\epsilon^{-1/2}\|F_\kappa\|^{1/2}+\epsilon^{\theta-1}\|F_\kappa\|) & (n \geqq 4). \end{cases}$$

Lemma 3.3(vi),(3.10) より

$$\|F_\kappa(0;\lambda)\| = O(\lambda^{-d}), \quad (\lambda \to 0, n=3),$$

for some $d, 0 < d < 1/2$ と

$$\|F_\kappa(0;\lambda)\| = O(1), \quad (\lambda \to 0, n \geqq 4),$$

uniformly $\kappa, 0 < \kappa < 1$ が得られる。これらから Lemma 1.2 がわかる。

$L_0(\lambda)$ の具体的な一般固有関数の表現については Weder[3] の Appendix 2 を参照して下さい。

References

1. K. Kikuchi and H. Tamura, *The limiting amplilude principle for acoustic propagators in perturbed stratified fluids*, J. Defferential Equations. **93** (1991), 260-282.
2. E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators*, Comm. Math. Phys **78** (1981), 391-408.
3. R. Weder, *Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media*, Applied Mathematical Sciences 87, Springer-Verlag, New york, Berlin, Heidelberg, 1991.
4. ———, *Spectral Analysis of strongly propagator systems*, J. Reine Angew. Math. **354** (1984), 95-122.
5. C. Wilcox, *Sound propagation in stratified fluids*, Applied Mathematical Sciences 50, Springer-Verlag, New york, Berlin, Heidelberg, 1984.