数理解析研究所講究録
995巻 1997年 1-6

APPLICATIONS OF THE MAXIMUM PRINCIPLE TO SURFACES WITH CONSTANT MEAN CURVATURE

京都教育大教育　小磯深幸（MIYUKI KOISO）

§1. はじめに

平均曲率一定曲面の一意性に関してすでに古典的となってしまった結果のひとつに次の Alexandrov によるものがある.

定理 A ([1]). $\mathbf{R}^{n+1}$ 内のコンパクトで境界のない平均曲率一定超曲面であって自己交差をもたないものは n 次元標準球面に限る.

証明にはいわゆる「Alexandrov の鏡映法」が用いられるが，これは E. Hopf による最大値原理を本質的に応用したものである.

定理 A に関連して，境界をもつ平均曲率一定曲面の一意性についての次のような予想がある.

予想. $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の $(n-1)$- 次元標準球面で張られるコンパクトな平均曲率一定超曲面であって自己交差をもたないものは球帽に限る.

この予想に対する最初の部分的な肯定的結果は次のものである.

定理 B ([8]). Γ を $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の$(n-1)$- 次元標準球面とし，Γ を含む超平面を π とする. Σ は Γ で張られるコンパクトで自己交差をもたない平均曲率一定 $(\neq 0)$ の超曲面とする. もしも Σ が π における Γ の外部と交わらないならば，Σ は球帽である.

この定理の証明にはやはり最大値原理が本質的に用いられている. この定理の後，上記予想に対する部分的な肯定的結果がさまざまな形で得られている ([2, 3, 4, 9, 10]) が，それらはすべて最大値原理あるいはそのヴァリエーションであるところの比較定理を用いて証明されている. ここで主なものをまとめて列挙するが，簡単のため $\mathbf{R}^3$ 内の平均曲率一定曲面に話を限ることにする：

定理 C. Γ を $\mathbf{R}^3$ 内の円周とし，Γ を含む平面を π，π における Γ の内部を D とする. Σ は Γ で張られるコンパクトで自己交差をもたない平均曲率一定 H $(\neq 0)$ の曲面とする. もしも Σ が次の (1) - (6) のいずれかの条件を満足するならば，Σ は球帽である.

(1) Σ は半径 $1/|H|$ の閉球に含まれる．([2])

(2) Σ は半径 $1/|H|$ の円柱で囲まれる閉領域に含まれる．([3])

(3) Σ は $\partial\Sigma$ に沿って π と横断的に交わる．([4])

(4) $\Sigma \cap D = \emptyset$ であって，しかも Σ は $\partial\Sigma$ の近傍では D 上のグラフである．([9])

(5) Σ は $1/|H|$ だけ離れた 2 つの平行な平面で囲まれる閉領域に含まれる．([10])

(6) $\mathbf{R}^3 - (\Sigma \cup D)$ の有界な連結成分のひとつの閉包が半径 $1/|H|$ の閉半球よりも大きい球帽を含む．

なお，定理 C の (1) と (2) の場合は自己交差をもたないという仮定は不要であり，(3) 以外の場合は $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の超曲面についても成立する．また，平均曲率が 0 の曲面，即ち極小曲面についてはその境界 Γ が円周のときには他の付加的条件なしに Γ で囲まれる円板となることは周知のことである．このことは，任意のコンパクト極小曲面はその境界の凸包に含まれるという事実からすぐにわかるが，この性質は調和関数の最大値原理より得られる．

最大値原理と比較定理については次節で厳密な形を述べるが，ここであらかじめそれらをやや直観的な形で紹介しておこう．

<u>最大値原理.</u> Σ_1, Σ_2 を *2* つの平均曲率一定超曲面であって，同じ平均曲率をもつものとする．もしもそれらがある点 p で片側から接するならば，Σ_1 と Σ_2 は点 p の近傍で一致する．

<u>比較定理.</u> *2* つの超曲面 Σ_1, Σ_2 （平均曲率一定でなくてもよい）がこれらのある内点 p で接し，しかも p の近傍で Σ_1 が Σ_2 の上方にあるならば，p の近傍で Σ_2 の平均曲率は Σ_1 の平均曲率以下である．

次節では最大値原理と比較定理を厳密に述べ，§3 で定理 B の証明の概略を，§4 で定理 C (6) の証明の概略を述べる．定理 B の証明については，[8]では用いなかった比較定理を利用することにより，一部簡潔になっている．

§2. 最大値原理と比較定理

最大値原理と比較定理はいずれも E.Hopf [6] による強楕円型線形偏微分方程式の解に関する最大値原理 (c.f. [5, p.35, Th. 3.5], [13, Vol.V, p.183, Th.10-17]) 及びその Neumann 問題への応用 (c.f. [5, p.35, Th. 3.6], [13, Vol.V, p.188, Th.10-20]) を適用することにより得られる：

最大値原理 ([13, Vol.IV, p.508, Lemma 9-34]). U を (イ) $\mathbf{R}^2$ での原点 0 の近傍，または，(ロ) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|y\geq 0\}$ での 0 の近傍とする．U 上定義された関数 h_1,h_2 のグラフ $\{(x,y,h_i(x,y))|(x,y)\in U\}$ は共に平均曲率一定であって，それらの平均曲率は一致するとする．さらに，(ロ) の場合には，$(\partial h_1/\partial y)(0)=(\partial h_2/\partial y)(0)$ であると仮定する．このときもしも，$h_1(0)=h_2(0)$ であって，しかも U 上至るところ $h_1\geq h_2$ ならば，0 の近傍で $h_1=h_2$ である．

比較定理. U を $\mathbf{R}^2$ での原点 0 の近傍とする．U 上定義された関数 h_1,h_2 は $h_1(0)=h_2(0)$ を満たし，これらのグラフ $\{(x,y,h_i(x,y))|(x,y)\in U\}$ の 0 での接平面は共に $\{z=0\}$ であって，それらの平均曲率はそれぞれ H_1,H_2 であるとする．このときもしも U 上至るところ $h_1\geq h_2$ であるならば，0 の近傍で $H_1\geq H_2$ である．

なお，最大値原理は 2 つの同じ定平均曲率をもつ曲面が 1 点 p で接するときにそれらの p における単位法ベクトルが向きも込めて一致することを仮定として要求している．このことが，最大値原理が適用できる曲面に対する大きな制約となっている．そのため，たとえば定理 C においては「自己交差をもたない」あるいは「曲面と同じ平均曲率をもつ閉球に含まれる」等の仮定が必要となる．

ところが，平均曲率が 0 の曲面，即ち極小曲面の場合には，「平均曲率が一定 0」という性質は曲面の単位法ベクトルの向きの取り方によらない．したがって，最大値原理のより広い範囲での適用が可能となる (c.f.[12])．

§3. 定理 B の証明の概略

この節の結果はすべて $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の超曲面についても成立するが，表現を簡単にするために $\mathbf{R}^3$ 内のこととして議論を行う．

次の補題は本質的には [8] の Lemma 2 と同じものであるが，ここでは比較定理を用いた簡明な証明を行う．この方法は [11] からヒントを得たものである．

補題. Γ を $\mathbf{R}^3$ 内の単一閉曲線とし，Γ を含む平面を π，π における Γ の内部を D とする．Σ は Γ で張られるコンパクトで自己交差をもたない平均曲率一定 $H\ (\neq 0)$ の曲面とする．もしも Σ が π における Γ の外部と交わらないならば，$(\Sigma-\Gamma)\cap D=\emptyset$ である．

証明. $\mathbf{R}^3$ の直交座標系 (x,y,z) を適当に選ぶことにより，$\Gamma\subset\{z=0\},\Sigma\cap\{z>0\}\neq\emptyset$ と仮定してよい．$(\Sigma-\Gamma)\cap D\neq\emptyset$ であると仮定して矛盾を導く．

Σ はコンパクトであるから，十分大きな閉球 B の内部に含まれる．B の半径を r とし，$\partial B \cap \{z \leq 0\}$ を S_r で表す．すると S_r は，ある円周 C を境界にもつ半径 r の球帽である．$C \cup \Gamma$ で囲まれる $\{z=0\}$ 内の二重連結領域を G で表す．$S_r \cup G \cup \Sigma$ はコンパクトで連結かつ境界のない 2 次元位相多様体である．したがってそれは向き付け可能であり，また，$\mathbf{R}^3$ を 2 つの領域に分ける．$S_r \cup G \cup \Sigma$ によって囲まれる有界領域を W で表す．すると，$(S_r \cup G \cup \Sigma) - C - \Gamma$ の各点における単位法ベクトルを W の内側を向くように選んでも一般性を失わない．このとき，Σ の点であって z - 座標の最大値をとる点における単位法ベクトルが $(0,0,-1)$ であり，したがってこの点での平均曲率が正であることから，Σ の平均曲率 H は正数である．また，S_r の平均曲率は $1/r$ である．

S_r を，C を境界にもつ球帽であるという性質を保ちながら，W の内側に向かってだんだんすぼませていこう．すると，S_r に近いときには球帽は Σ と交わらない．$(\Sigma - \Gamma) \cap D \neq \emptyset$ であるという仮定から，ある $t \in \{s \in \mathbf{R} | s > 0\} \cup \{\infty\}$ と S_t が存在して，Σ は初めて $S_t - C - G - \Gamma$ と接する．ただしここで，$t = \infty$ のときは S_t は C で囲まれる閉円板を表し，$t \in \{s \in \mathbf{R} | s > 0\}$ のとき S_t は C を境界にもつ $\{z \leq 0\}$ 内の半径 t の球帽のひとつを表す．p を接点（の 1 つ）とする．すると p において，Σ と S_t の平均曲率は共に正であり，これらに対する単位法ベクトルは向きが反対である．単位法ベクトルの向きを一致させるために p における S_t の単位法ベクトルの向きを反対にとると，p の近傍で S_t の方が Σ の上方にあるが，S_t, Σ の平均曲率はそれぞれ負，正となる．これは比較定理に反する．よって，$(\Sigma - \Gamma) \cap D = \emptyset$ である．■

定理 B の証明の概略．補題により，

$$\Gamma = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

$$\Sigma - \Gamma \subset \{z > 0\}$$

と仮定して一般性を失わない．Γ で囲まれる開円板を D で表す．$\Sigma \cup D$ で囲まれる $\mathbf{R}^3$ の有界閉領域を Ω で表す．

まず初めに Σ が平面 $\{x=0\}$ に関して対称であることを示す．$a \in \mathbf{R}$ に対して，平面 $\{x=a\}$ を P_a と書く．Ω の点の x 座標の最小値を a_0 とおき，任意の $a \geq a_0$ に対して

$$H_a = \left\{ (x, y, z) \in \Sigma | x \leq a \right\}$$

と定義すれば，$H_a \neq \emptyset$ である．そこで，H_a の平面 P_a に関する鏡像を $\widetilde{H}_a$ とおく．実数 c を

$$c = \max\{b \in \mathbf{R} | \widetilde{H}_a \subset \Omega \ \ \mathrm{for} \ \ a_0 \leq \forall a \leq b\}$$

によって定義する．するとこのとき $\widetilde{H}_c \cap \Sigma$ に属するある点 p が存在して，点 p で $\widetilde{H}_c$ と Σ は片側から接する．（ただし，必要ならば x 軸と y 軸を z 軸のまわりに 180 度回転させる．）よって最大値原理により，点 p の近傍で $\widetilde{H}_c$ と Σ が一致することがわかる．

点 p を含む $\widetilde{H}_c$ の連結成分を $\widetilde{K}$ とすると，$\widetilde{K}$ は H_c のある成分 K の P_c に関する鏡像である．$\widetilde{K}$ の連結性と最大値原理によって，$\widetilde{K} \subset \Sigma$ であることがわかる．$K^* = K \cup \widetilde{K}$ とおけば，K^* は連結かつコンパクトな（境界をもつかもしれない）2 次元位相多様体であり，$\partial K^* \neq \emptyset$ なる場合は $\partial K^* \subset \partial\Sigma$ である．故に，K^* は Σ で開かつ閉であり，Σ の連結性から $\Sigma = K^* = K \cup \widetilde{K}$ が成立する．よって Σ は平面 P_c に関して対称である．また，$\partial\Sigma = \Gamma$ より $c = 0$，即ち，Σ が平面 $\{x = 0\}$ に関して対称であることがわかる．

よって，x 軸と y 軸のとり方の任意性により，Σ は Γ の中心を通り Γ に垂直な任意の平面に関して対称であることがわかる．したがって，Σ は Γの中心を通り Γ に垂直な直線を軸とする回転面である．ところが，平均曲率一定の埋め込まれたコンパクト曲面であって，その境界が 1 つの円周であるものは球帽しかない([7])．故に Σ は球帽である．■

§4. 定理 C (6) の証明の概略

§3 の補題の証明と類似であるので，簡単に述べるにとどめる．

$H > 0$ と仮定して一般性を失わない．$\mathbf{R}^3 - (\Sigma \cup D)$ の有界な連結成分のひとつの閉包が半径 $1/H$ の閉半球よりも大きい球帽 S を含むと仮定する．S の単位法ベクトル場は S の平均曲率が正となるように選んでおくことにする．

$S \cap \Sigma \neq \emptyset$ のときは，最大値原理により，Σ と S は一致するということがわかる．

よって $S \cap \Sigma \neq \emptyset$ と仮定する．S の境界を固定して，球帽であるという性質を保ちながらだんだん膨らませていく．すると球帽の平均曲率は正でありながら単調に減少する．Σ がコンパクトであることから，あるところで球帽は Σ に接するが，これは比較定理に反する．

したがって，Σ が球帽であることが示された．■

参考文献

[1] A. D. Alexandrov, *A characteristic property of spheres*, Ann. Mat. Pura Appl. **58** (1962), 303–315.

[2] J. L. Barbosa, *Hypersurfaces of constant mean curvature on* $\mathbf{R}^{n+1}$ *bounded by an euclidean sphere*, Geometry and Topology II, World Scientific (1990), 1–9.

[3] J. L. Barbosa, *Constant mean curvature surfaces bounded by a plane curve*, Matemática Contemporánea **1** (1991), 3–15.

[4] F. Brito, R. Earp, W. H. Meeks III and H. Rosenberg, *Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 333–343.

[5] D. Gilberg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1983.

[6] E. Hopf, *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.*, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wissensch. Berlin, Math.-Phys. Kl. **19** (1927), 147–152.

[7] W.-Y. Hsiang and W.-C. Yu, *A generalization of a theorem of Delaunay*, J. Diff. Geom. **16** (1981), 161–177.

[8] M. Koiso, *Symmetry of hypersurfaces of constant mean curvature with symmetric boundary*, Math. Zeit. **191** (1986), 567–574.

[9] R. López, *A note on H-surfaces with boundary*, preprint.

[10] R. López, *Surfaces of constant mean curvature bounded by convex curves*, preprint.

[11] R. López, *Surfaces of constant mean curvature with boundary in a sphere*, preprint.

[12] R. M. Schoen, *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 791–809.

[13] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Second Edition, Publish or Lerish, Inc., Houston, Texas, 1975, 1979.

郵便番号 612 京都市伏見区深草藤森町 1 京都教育大学教育学部数学教室
E-mail address: `koiso@wsml.kyokyo-u.ac.jp`