

3次元定曲率空間形内の平均曲率一定曲面の表現公式

筑波大学数学系 相山 玲子 (Reiko Aiyama)

静岡大学理学部 芥川 和雄 (Kazuo Akutagawa)

3次元 Euclid 空間 \mathbb{E}^3 内の平均曲率一定 (CMC) H の (単連結) 曲面は、 $H = 0$ (すなわち極小曲面) のときはよく知られた Weierstrass 公式によってリーマン面上の有理型関数 g と正則 1 次微分で表現され、 $H \neq 0$ のときには Kenmotsu 公式 ([K]) によって 2 次元単位球面 S^2 への調和写像 g で表現された。ちなみに、CMC 曲面に対して、その構成データである g は、その曲面の Gauss 写像であった。Bryant 公式 ([B]) は、負定曲率 $-c^2$ の 3次元双曲空間 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC c 曲面に Weierstrass 型の表現を与えるものである。Lawson ([L]) によれば、 \mathbb{E}^3 内の CMC H_0 曲面全体のなす空間と $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC $\sqrt{H_0^2 + c^2} (\geq c)$ 曲面全体の空間、さらには正定曲率 $c^2 (\leq H_0^2)$ の 3次元球面 $S^3(c^2)$ 内の CMC $\sqrt{H_0^2 - c^2}$ 曲面全体のなす空間との間には一対一の対応があることが分かるが、このとき \mathbb{E}^3 内の CMC 曲面の Gauss 写像が他空間形内の CMC 曲面の '何であるか' は明示されない。Bryant 公式は、ある意味では、 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC c 曲面が Lawson 対応するところの \mathbb{E}^3 内の極小曲面の Gauss 写像の取り出し方を示唆するものであるとすることができる。以下に述べる結果は、 \mathbb{E}^3 内の 0 でない CMC をもつ曲面と Lawson 対応が存在するところの、 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC $H (> c)$ 曲面と $S^3(c^2)$ 内の CMC 曲面 (極小曲面を含む) に、 S^2 への調和写像 g からの表現公式を与えて、Lawson 対応する \mathbb{E}^3 内の CMC 曲面の Gauss 写像 g の取り出し方を示すものである ([AA1], [AA2])。それに際しては、Bryant が $\mathbb{H}^3(-c^2) = SL(2; \mathbb{C})/SU(2)$ として 2×2 行列表示を用いた利便性を踏襲したので、得られた表現公式を Kenmotsu-Bryant 型と呼ぶことにし、逆に CMC 曲面から取り出された S^2 への調和写像を [UY2] に倣って第 2 Gauss 写像と呼ぶことにする。

§1. では、[AA1] に基づいて、 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC $H (> c)$ 曲面の Kenmotsu-Bryant 型公式を与えて、 \mathbb{E}^3 での Kenmotsu 公式との関係や、第 2 Gauss 写像と (generalized or 双曲的) Gauss 写像との関係について述べる。更に、Fujioka [F] による $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内での CMC $H (< c)$ 曲面と極小曲面との対応に、Bryant 公式や Kenmotsu-Bryant 型公式の導入にも用いられた「ゲージ変換理論」的見解を与えておくことにする。§2. では、[AA2] に基づいて、 $S^3(c^2)$ での Kenmotsu-Bryant 型公式を与える。この場合特に、(generalized) Gauss 写像が 2 つの S^2 への調和写像に分解しており、それらは元の CMC 曲面のある随伴曲面の第 2 Gauss 写像となることを述べる。最後の §3. では、3次元 Lorentz 空間形 $S_1^3(c^2)$,

$\mathbb{H}_1^3(-c^2)$ 内の CMC 空間的曲面についての Kenmotsu-Bryant 型表現公式 ([AA1], [AA3]) について報告する。Minkowski 空間 \mathbb{L}^3 内の CMC $H(\neq 0)$ 曲面の Kenmotsu 型公式 ([AN]) と同じく、双曲平面 \mathbb{H}^2 への調和写像たる Gauss 写像で表現される。

本稿では、(断りの無い限り) すべての Riemann 面 M は単連結かつ連結で、 c は正定数であると仮定しておく。

1 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC 曲面

4次元 Minkowski 空間 \mathbb{L}^4 を 2×2 エルミート行列の全体 $\text{Herm}(2)$ とみなす。すなわち、 $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^4$ を行列

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + \sqrt{-1}x^2 \\ x^1 - \sqrt{-1}x^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}$$

と同一視して、Minkowski 計量を $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -\det \underline{\mathbf{x}}$ と与える。 $g\underline{\mathbf{x}}g^*$ ($g \in SL(2; \mathbb{C})$) によって、複素特殊線形群 $SL(2; \mathbb{C})$ は $\text{Herm}(2)$ さらに 3次元双曲空間 $\mathbb{H}^3(-c^2) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \text{Herm}(2) \mid \det \underline{\mathbf{x}} = 1/c^2, x^0 > 0\}$ に等長的推移的に作用し、 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ は次のように表せる。

$$\mathbb{H}^3(-c^2) = SL(2; \mathbb{C})/SU(2) = \left\{ \frac{1}{c} g g^* \mid g \in SL(2; \mathbb{C}) \right\}$$

(向きを保つ) 共形的是め込み $f: M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ に対して、 C^∞ 写像 $F: M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ で $\frac{1}{c} F F^* = f$ となるものがあり、 f の frame と呼ぶ。特に frame $G: M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ を、 $G \varepsilon G^*$ ($\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$) が f の単位法ベクトル場であるようにとれるので、この G を f の adapted frame という。

f が CMC 曲面であるための必要十分条件を、次のように frame F の 2階偏微分方程式系で記述できる。

命題 1. $f: M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ が CMC H をもつ共形的是め込みである。

$\iff f$ の frame $F: M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ が次を満たす。

$$F^{-1} dF = \sigma_{\mathfrak{h}} + \sigma_{\mathfrak{m}}$$

(Lie 環の簡約直交分解 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$ に対応する分解)

$$\text{tr}(\sigma'_{\mathfrak{m}} \sigma'_{\mathfrak{m}}) = 0, \quad \text{tr}(\sigma'_{\mathfrak{m}} \sigma''_{\mathfrak{m}}) \neq 0,$$

$$d\sigma'_{\mathfrak{m}} + [\sigma''_{\mathfrak{h}} \wedge \sigma'_{\mathfrak{m}}] = -\frac{1}{c} H [\sigma''_{\mathfrak{m}} \wedge \sigma'_{\mathfrak{m}}],$$

ここで、 $\sigma_{\mathfrak{h}} = \sigma'_{\mathfrak{h}} + \sigma''_{\mathfrak{h}}$, $\sigma_{\mathfrak{m}} = \sigma'_{\mathfrak{m}} + \sigma''_{\mathfrak{m}}$, と 正則および反正則成分に分解している。

1.1 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC $H (> c)$ 曲面の Kenmotsu-Bryant 型表現公式

$\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC $H (> c)$ 曲面の Kenmotsu-Bryant 表現公式とは、その frame $F : M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ として、 \mathbb{S}^2 への調和写像に応じて定められる 1 階の偏微分方程式系 (1) の解を選べることを保証するものである。ちなみに、 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC c 曲面の Bryant 表現公式は、その frame $F : M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ として、 $F^{-1}dF =$ (零的 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ -値正則 1 次微分形式) の解を選べることを示していた。

以下、 P_1, P_2 は立体射影 $P_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$, $P_2 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ を表す。これにより、 \mathbb{S}^2 を標準的計量 $ds_{\mathbb{S}^2}^2 = \frac{4|d\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^2}$ をもつ空間 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とみなせる。

定理 1 ($\mathbb{H}^3(-c^2)$ での Kenmotsu-Bryant 型表現公式). M を単連結な連結 Riemann 面とし、固定点 z_0 と等温座標 z を与えておく。 $g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ を正則でない調和写像とし、 $g_i = P_i \circ g (i = 1, 2)$ とおく。正定数 H_0 に対して、 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ -値 1 次形式 α を次のように定める。

$$\alpha = \begin{cases} \begin{bmatrix} -g_1 & g_1^2 \\ -1 & g_1 \end{bmatrix} \omega_1, & \omega_1 = \frac{2\overline{(g_1)_z}}{H_0(1+|g_1|^2)^2} dz, & \text{on } g^{-1}(U_1), \\ \begin{bmatrix} g_2 & -1 \\ g_2^2 & -g_2 \end{bmatrix} \omega_2, & \omega_2 = \frac{2\overline{(g_2)_z}}{H_0(1+|g_2|^2)^2} dz, & \text{on } g^{-1}(U_2). \end{cases}$$

このとき、次を満たす C^∞ 写像 $F : M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ が一意的に存在する。

$$F^{-1}dF = \frac{c}{2} \left\{ \frac{2H_0}{\sqrt{H_0^2 + c^2 + H_0 - c}} \alpha + \frac{2H_0}{\sqrt{H_0^2 + c^2 + H_0 + c}} \alpha^* \right\} (=:\tau(c)), \quad (1)$$

$$F(z_0) = \text{id}.$$

$f = \frac{1}{c}FF^*$ とおくと、 $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ は (孤立した退化点を持つ) 共形的是め込みで、誘導計量 $f^*ds^2 = (1+|g_i|^2)^2 \omega_i \cdot \bar{\omega}_i$ に関して CMC $H = \sqrt{H_0^2 + c^2}$ をもち、その Gauss 曲率は $K = H_0^2 \{1 - (|(g_i)_z|/|(g_i)_z|)^2\}$ で与えられる。

逆に、CMC $H (|H| > c)$ 曲面 $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ はすべてこのようにして、正則でない調和写像 $g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ から構成されるものに合同である。

証明の概略 前半の主張は、偏微分方程式 (1) の可積分条件 $d\tau(c) + \tau(c) \wedge \tau(c) = 0$ を満たすことを確かめて、命題 1 に従って計算すれば得られる。逆に、CMC $H = \sqrt{H_0^2 + c^2}$

曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ が与えられたときは、adapted frame $G: M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ を適当な「ゲージ」 $h: M \rightarrow SU(2)$ で変換して目的の frame $F = Gh^{-1}$ を得る。この h は次の偏微分方程式の解として与えられる。

$$h^{-1}dh = \mu := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\rho & (H - H_0)\phi + \psi \\ -(H - H_0)\bar{\phi} - \bar{\psi} & -\sqrt{-1}\rho \end{bmatrix}.$$

ここで、 ρ は接続形式、 ϕ は正則 1 次微分形式で $f^*ds^2 = \phi \cdot \bar{\phi}$ をみたし、 $\psi = -H\phi - \bar{\Psi}\bar{\phi}$ 、 $\Phi := \Psi\phi \cdot \phi$ は Hopf 微分である。構造方程式 $d\rho = -\frac{\sqrt{-1}}{2}K\phi \wedge \bar{\phi}$ 、 $d\phi = -\sqrt{-1}\rho \wedge \phi$ 、 $d\psi = -\sqrt{-1}\rho \wedge \psi$ より、可積分条件 $d\mu + \mu \wedge \mu = 0$ を満たしていることは容易に分かる。さらに、 $g := h\epsilon h^*: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ が調和写像であることが確かめられ、この g を用いて $F^{-1}dF$ を(1)式のように表すことができる。 \square

注. 一般に、 $SL(2; \mathbb{C})$ の $\bar{\mathbb{C}}$ への作用を $g[w] = \frac{g_{11}w + g_{12}}{g_{21}w + g_{22}}$ ($g = (g_{ij}) \in SL(2; \mathbb{C}), w \in \bar{\mathbb{C}}$) と表すこととすると、上の証明中で、 $g_1 = h[\infty]$ 、 $g_2 = h[0]$ である。

上記の写像 $g: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ が f の第 2 Gauss 写像で、それが与える CMC H ($|H| > c$) 曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ が Lawson 対応するところの \mathbb{E}^3 内の CMC 曲面の Gauss 写像である。

このことを説明するにあたり、まず Lawson 対応 ([L]) について復習しておく。 $f_0: M \rightarrow \mathbb{E}^3$ を CMC H_0 (≥ 0) 曲面とし、その第一基本形式を ds_0^2 、Hopf 微分を Φ_0 で表す。 $\Phi_\theta := e^{\sqrt{-1}\theta}\Phi_0$ ($\theta \in [0, 2\pi)$)、 $H_c := \sqrt{H_0^2 + c^2}$ (resp. $\sqrt{H_0^2 - c^2}$) と置くと、曲面の基本定理より、CMC H_c と Hopf 微分 Φ_θ をもつ等長的是め込み $f_{(c,\theta)}: (M, ds_0^2) \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ (resp. $\mathbb{S}^3(c^2)$) が存在することがわかる。この曲面族 $\{f_{(c,\theta)}\}$ は「 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC H_c ($\geq c$) 曲面全体」(resp. 「 $\mathbb{S}^3(c^2)$ 内の CMC H_c ($< H_0$) 曲面全体」と「 \mathbb{E}^3 内の CMC H_0 曲面全体」の間に S^1 -同変な 1 対 1 対応 (Lawson 対応) を与える。 $\{f_c := f_{(c,0)}\}$ を f_0 に関する標準的 1 変数曲面族と呼ぶ。また、各 $f_{(c,\theta)}$ を CMC 曲面 f_c の随伴曲面、特に $f_{(c,\frac{\pi}{2})}$ を f_c の共役曲面と言う。

さて、 \mathbb{E}^3 内の CMC 曲面の Gauss 写像は \mathbb{S}^2 への調和写像であり、次の Kenmotsu 公式によって CMC 曲面を構成した。

定理 2 (Kenmotsu [K]). M を単連結な連結 Riemann 面とし、固定点 z_0 と等温座標 z を与えておく。 $g: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ を正則でない調和写像とし、正定数 H_0 に対して、 \mathbb{C}^3 -値 1 次形式 γ を次のように定める。

$$\begin{aligned} \gamma &= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \\ &= \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}(1-g_1^2)\omega_1, -\frac{\sqrt{-1}}{2}(1+g_1^2)\omega_1, -g_1\omega_1 \right) & \text{on } g^{-1}(U_1), \\ \left(-\frac{1}{2}(1-g_2^2)\omega_2, \frac{\sqrt{-1}}{2}(1+g_2^2)\omega_2, g_2\omega_2 \right) & \text{on } g^{-1}(U_2), \end{cases} \\ \omega_i &= \frac{2\overline{(g_i)}_z}{H_0(1+|g_i|^2)^2} dz. \end{aligned}$$

このとき、次を満たす C^∞ 写像 $f: M \rightarrow \mathbb{E}^3$ が一意的に存在する。

$$df = \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma})(:= \tau(0)), \quad f(z_0) = 0.$$

この $f: M \rightarrow \mathbb{E}^3$ は (孤立した退化点を持つ) 共形的是め込みで、誘導計量 $f^*ds^2 = (1+|g_i|^2)^2\omega_i \cdot \bar{\omega}_i$ に関して CMC H_0 をもつ。 g は曲面 f の Gauss 写像に一致する。

よって、次の Kenmotsu-Bryant 型表現公式から Kenmotsu 公式への変形定理は、第 2 Gauss 写像に幾何的解釈を与えてくれる。これは、Umehara-Yamada [UY1] による Bryant 表現公式から Weierstrass 公式への変形定理に倣って証明されるものである。

定理 3. 与えられた正定数 H_0 と正則でない調和写像 $g: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ に対して、定理 1 によって構成される $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC $H_c = \sqrt{H_0^2 + c^2}$ 曲面を f_c , その与えられた frame を F_c とする (i.e. $F_c^{-1}dF_c = \tau(c)$)。また、定理 2 によって構成される \mathbb{E}^3 内の CMC H_0 曲面を f_0 とし、 $F_0 = f_0: M \rightarrow \mathbb{E}^3(\subset \mathbb{C}^3)$ とおく (i.e. $dF_0 = \tau(0)$)。

このとき、 $\{f_c\}$ は f_0 の標準的 1 変数曲面族であり、 $\mathcal{L} = \{(c, a) \mid c \in [0, \infty), c=0$ のとき $a \in \mathbb{C}^3, c > 0$ のとき $a \in SL(2; \mathbb{C})\}$ に適当な実解析的構造が定義でき、 $\{\tau(c)\}$ ($c \in [0, \infty)$) は c に関して実解析的な族とみなせ、 $(c, F_c): M \rightarrow \mathcal{L}$ ($c \in [0, \infty)$) も c に関して実解析的であると結論できる。さらに、 $\lim_{c \rightarrow 0} p(c) \circ f_c = f_0$. (ただし、 $p(c): \mathbb{H}^3(-c^2) \rightarrow \mathbb{E}^3$ は立体射影である。)

1.2 双曲的 Gauss 写像

曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ を \mathbb{L}^4 内の空間的曲面とみなして、(generalized) Gauss 写像を定義できる。

\mathbb{L}^4 内の (向き付けられた) 空間的平面全体のなす Grassmann 多様体 $\text{Gr}_2(\mathbb{L}^4)$ を不定値複素射影空間 $\mathbb{C}P_1^3$ 内の 2 次曲面 \mathbb{Q}_1^2 とみなす。すなわち、(空間的) ベクトルの組 $\{v_1, v_2\}$ で生成される空間的平面 $[v_1 \wedge v_2]$ を $[v_1 + \sqrt{-1}v_2] \in \mathbb{Q}_1^2$ と同一視する。ここで、

$$\mathbb{C}_1^4 = (\mathbb{C}^4 \cong \mathfrak{gl}(2; \mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle) \quad \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{w} J \overline{\underline{w}} J) = -|w^0|^2 + |w^1|^2 + |w^2|^2 + |w^3|^2,$$

$$J := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} w^0 + w^3 & w^1 + \sqrt{-1}w^2 \\ w^1 - \sqrt{-1}w^2 & w^0 - w^3 \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$$

$$\mathbb{C}P_1^3 := \{[w] : w, 0 \text{ を通る } \mathbb{C}_1^4 \text{ 内の空間的複素直線}\}$$

$$\mathbb{Q}_1^2 := \{[\underline{w}] \mid \det \underline{w} = -(w^0)^2 + (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 = 0\}.$$

$SL(2; \mathbb{C})$ は \mathbb{Q}_1^2 に $g \cdot [w] = [g \underline{w} g^*]$ ($[w] \in \mathbb{Q}_1^2, g \in SL(2; \mathbb{C})$) と等長的推移的に作用し、 $\text{Gr}_2(\mathbb{L}^4) \cong \mathbb{Q}_1^2$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \text{Gr}_2(\mathbb{L}^4) &= \left\{ \left[g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^* \right] \mid g \in SL(2; \mathbb{C}) \right\} \\ &= SL(2; \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* = \{ \langle g \rangle \mid g \in SL(2; \mathbb{C}) \}, \quad \mathbb{C}^* = \left\{ \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1/w \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

そこで、 $\text{Gr}_2(\mathbb{L}^4)$ に次のような複素構造を考えることができる。

$$\zeta = (\zeta_+, \zeta_-) : \text{Gr}_2(\mathbb{L}^4) \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}; \quad \langle (g_{ij}) \rangle \mapsto \begin{pmatrix} \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \end{pmatrix}.$$

この写像は $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ から対角成分を除いたところへ全単射である。ただし、 $SL(2; \mathbb{C})$ の $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ への作用は、各 $\overline{\mathbb{C}}$ を不変にしないことに注意しておく。

空間的曲面 $f : M \rightarrow \mathbb{L}^4$ の (generalized) Gauss 写像は

$$\mathcal{G} = [f_x \wedge f_y] = [f_{\bar{z}}] : M \rightarrow \text{Gr}_2(\mathbb{L}^4) \cong \mathbb{Q}_1^2$$

と定義される。更に、 $\mathcal{G}_+ := \zeta_+ \circ \mathcal{G}, \mathcal{G}_- := \zeta_- \circ \mathcal{G} : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ と記すことにする。

$\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の曲面 (共形的是め込み) $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2) (\subset \mathbb{L}^4)$ に対して、adapted frame $G = (G_{ij}) : M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ をとって考えると、その (generalized) Gauss 写像は $\mathcal{G} = \langle G \rangle$ に他ならない。すなわち、

$$\mathcal{G}_+ = \frac{G_{11}}{G_{21}} = G[\infty], \quad \mathcal{G}_- = \frac{G_{12}}{G_{22}} = G[0].$$

ところで、 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の曲面に対しては双曲的 Gauss 写像 \mathcal{G}_h が、各点で法測地線と $\mathbb{H}^3(-c^2)$ の無限遠 $\overline{\mathbb{C}}$ との交点を対応させることによって定義されている。 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ の無

限遠を \mathbb{L}^4 内の 零的直線全体 $\{[v] \in \mathbb{L}^4 \mid \langle v, v \rangle = 0\}$ とみなすと、双曲的 Gauss 写像 $\mathcal{G}_h : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ を adapted frame G によって次のようにと表せる (cf. [B])。

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_h &= [GG^* + G\varepsilon G^*] = [G \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} G^*] \\ &= \left[\begin{pmatrix} |G_{11}|^2 & G_{11}\overline{G_{21}} \\ \overline{G_{11}}G_{21} & |G_{21}|^2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{G_{11}} & \overline{G_{21}} \end{pmatrix} \right] \\ &\leftrightarrow \frac{G_{11}}{G_{21}} \end{aligned}$$

すなわち、双曲的 Gauss 写像 \mathcal{G}_h は \mathcal{G}_+ に他ならない。

さて、CMC H 曲面 $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ に対する (generalized) Gauss 写像 $\mathcal{G} : M \rightarrow \text{Gr}_2(\mathbb{L}^4) = SL(2; \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ は調和写像であることが知られているが、後述の $\mathbb{S}^3(c^2)$ や $\mathbb{H}_1^3(-c^2)$ の場合のように、共形不変量でしかない各 $\mathcal{G}_+ = \mathcal{G}_h, \mathcal{G}_-$ に対して調和性を議論する事はできない。ただし、 $H = c$ の場合には、第 2 Gauss 写像 $g, \mathcal{G}_+ = \mathcal{G}_h, \mathcal{G}_-$ はすべて有理型関数である ([B])。 $H > c$ の場合にも、調和写像である第 2 Gauss 写像 $g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ と、次のような関係にあることは同じである。

$$\frac{(\mathcal{G}_h)_{\bar{z}}}{(\mathcal{G}_h)_z} = \sqrt{\frac{H-c}{H+c}} \frac{(g_1)_{\bar{z}}}{(g_1)_z}, \quad \mathcal{G}_h = F[g_1] = \frac{\partial F_{11}}{\partial F_{21}} = \frac{\partial F_{12}}{\partial F_{22}},$$

ここで、 $F = (F_{ij}) : M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ は定理 1 で与えられた frame である。

1.3 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC H ($|H| < c$) 曲面

Fujioka [F] は「 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC H_c ($|H_c| < c$) 曲面全体」と「 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の極小曲面全体」の間に S^1 -同変な 1 対 1 対応があることを、曲面の frame が満たすべき偏微分方程式系の解の対応写像を作る事によって示しているが、これに相当する対応を与える $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の曲面族を次のように定義できる。

$f_{c_0} : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c_0^2)$ を極小曲面とし、その第一基本形式を ds_0^2 , Hopf 微分を Φ_0 で表す。 $\Phi_\theta := e^{\sqrt{-1}\theta} \Phi_0$ ($\theta \in [0, 2\pi)$), $H_c := \sqrt{c^2 - c_0^2}$ と置くと、曲面の基本定理より、CMC H_c と Hopf 微分 Φ_θ をもつ等長的是め込み $f_{(c,\theta)} : (M, ds_0^2) \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ が存在することがわかる。この曲面族 $\{f_{(c,\theta)}\}$ は「 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC H_c ($< c$) 曲面全体」と「 $\mathbb{H}^3(-c_0^2)$ 内の極小曲面全体」の間に S^1 -同変な 1 対 1 対応を与える。 $\{f_c := f_{(c,0)}\}_{c \geq c_0}$ を極小曲面 f_{c_0} に関する標準的 1 変数曲面族と呼ぶ。

この対応が、定理 1 の証明で用いた frame の「ゲージ変換」の立場から説明できることを記しておく。

$f : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ を CMC H ($|H| < c$) 曲面とし、adapted frame $G : M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ をとる。定理 1 の証明で用いた「ゲージ」を定めた $\mathfrak{su}(2)$ -値 1 形式 μ は $|H| < c$ の時には、可積分条件を満たさないが、それを少し変形した次のような $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ -値 1 形式 μ' は $|H| < c$ の時に可積分条件 $d\mu' + \mu' \wedge \mu' = 0$ を満たしている。

$$\mu' := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{-1}\rho & (H - \sqrt{c^2 - H^2})\phi + \psi \\ -(H + \sqrt{c^2 - H^2})\bar{\phi} - \bar{\psi} & -\sqrt{-1}\rho \end{bmatrix}.$$

つまり、 C^∞ 級写像 $F_0 : M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ で $(F_0)^{-1}dF_0 = \mu'$ を満たすものが存在する。さらに命題 1 より、 F_0 は任意の負定曲率 $-k^2$ をもつ 3 次元双曲空間内の極小曲面の frame となっていることが確かめられる。特に、 $k = c_0 := \sqrt{c^2 - H^2}$ とすると、 F_0 は極小曲面 $f_0 : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c_0^2)$ の adapted frame となっていて、 f_0 の第一基本形式や Hopf 微分は、もとの f のそれらと一致している事が、 μ' の形から分かる。

さて、 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC H ($|H| < c$) (単連結) 曲面が、本質的に極小曲面と同等であるとわかったところで、 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の極小曲面に対する Kokubu [Kk] による表現公式に言及しておきたい。[Kk] では、特異計量 $ds_K^2 = \frac{|d\xi|^2}{|(1 + |\xi|^2)(1 - |\xi|^2)|}$ をもつ空間 $\bar{\mathbb{C}}$ への正則でない調和写像を与えて、その写像を normal Gauss 写像としてもつような 3 次元双曲空間内の分岐極小曲面の構成することが述べられている。normal Gauss 写像 ν とは、曲面 $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3(-c^2)$ の adapted frame $G = (G_{ij}) : M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ を考えるときには、岩澤分解 $SL(2; \mathbb{C}) = N \cdot SU(2)$ ($N = \left\{ \begin{pmatrix} a & w \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \mid a > 0, w \in \mathbb{C} \right\}$) に対応する分解 $G = nh$ によって、 $\nu = h[\infty] = \frac{\overline{G_{22}}}{G_{21}}$ と与えられるものである。この Kokubu 計量 ds_K^2 は S^2 の標準的計量と後述の \mathbb{H}^2 の Poincaré 計量のまさに「折衷計量」と呼べるような形をしている。次の命題 2 や 後述の Lorentz 空間系内での Kenmotsu(-Bryant) 型公式が \mathbb{H}^2 への調和写像を構成データとしていることを鑑みると、「折衷」であることも自然であるように思われる。

命題 2. 定曲率 -1 の 3 次元双曲空間 \mathbb{H}^3 への極小共形的是め込み $f : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ が全測地的でないならば、その単位法ベクトル場は定曲率 1 の 3 次元 de Sitter 空間 S_1^3 への共形的な極大はめ込みを与える。

逆に、 S_1^3 への全測地的でない極大共形的是め込みの単位法ベクトル場は \mathbb{H}^3 への共形的な極小はめ込みを与えている。

2 $S^3(c^2)$ 内の CMC 曲面

4次元 Euclid 空間 E^4 を $RSU(2)$ とみなす。すなわち、 (x_1, x_2, x_3, x_4) を行列

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_4 + \sqrt{-1}x_3 & x_1 + \sqrt{-1}x_2 \\ -x_1 + \sqrt{-1}x_2 & x_4 - \sqrt{-1}x_3 \end{bmatrix}$$

と同一視し、Euclid 計量を $\det \underline{x}$ と与える。 $g_1 \underline{x} g_2^*$ ($g_1, g_2 \in SU(2)$) によって、 $SU(2) \times SU(2)$ は $RSU(2)$ さらに 3次元球面 $S^3(c^2) = \{\underline{x} \in RSU(2) \mid \det \underline{x} = 1/c^2\}$ に等長的推移的に作用し、 $S^3(c^2)$ は次のように表示される。

$$\begin{aligned} S^3(c^2) &= \left\{ \frac{1}{c} g_1 g_2^* \mid g = (g_1, g_2) \in SU(2) \times SU(2) \right\}, \\ &= (SU(2) \times SU(2)) / \Delta, \quad \Delta := \{(h, h) \mid h \in SU(2)\} \end{aligned}$$

(向きを保つ) 共形的是め込み $f: M \rightarrow S^3(c^2)$ に対して、 C^∞ 写像 $F = (F_1, F_2): M \rightarrow SU(2) \times SU(2)$ で $f = \frac{1}{c} F_1 F_2^*$ となるものを f の frame といい、さらに $\sqrt{-1} F_1 \varepsilon F_2^*$ ($\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$) が f の単位法ベクトル場となるものを f の adapted frame と呼ぶ。

2.1 $S^3(c^2)$ 内の CMC 曲面の Kenmotsu-Bryant 型表現公式

$S^3(c^2)$ 内の (極小曲面を含む) CMC 曲面はすべて、前述のように E^3 内の CMC H ($\neq 0$) 曲面に Lawson 対応し、次の Kenmotsu-Bryant 型公式で表現される。

定理 4 ($S^3(c^2)$ での Kenmotsu-Bryant 型表現公式). M を単連結な連結 Riemann 面とし、固定点 z_0 と等温座標 z を与えておく。 $g: M \rightarrow S^2$ を正則でない調和写像とし、 $g_i = P_i \circ g$ ($i = 1, 2$) とおく。定数 $H_0 \geq c$ (> 0) に対して、 $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{C})$ -値 1 次形式 α を次のように定める。

$$\alpha = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\sqrt{-1}g_1 & g_1^2 \\ 1 & \sqrt{-1}g_1 \end{bmatrix} \omega_1, & \omega_1 = \frac{2\overline{(g_1)_z}}{H_0(1+|g_1|^2)^2} dz, \quad \text{on } g^{-1}(U_1), \\ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}g_2 & -1 \\ -g_2^2 & -\sqrt{-1}g_2 \end{bmatrix} \omega_2, & \omega_2 = \frac{2\overline{(g_2)_z}}{H_0(1+|g_2|^2)^2} dz, \quad \text{on } g^{-1}(U_2). \end{cases}$$

このとき、次の満たす C^∞ 写像 $F = (F_1, F_2): M \rightarrow SU(2) \times SU(2)$ が一意的に存在する。

$$\begin{aligned} F^{-1}dF &= \frac{c}{2} \{\kappa\alpha - \bar{\kappa}\alpha^*\} \oplus \frac{c}{2} \{-\bar{\kappa}\alpha + \kappa\alpha^*\}, \\ F(z_0) &= \text{id}, \quad \kappa = 1 + \frac{\sqrt{-1}c}{H_0 + \sqrt{H_0^2 - c^2}}. \end{aligned}$$

$f = \frac{1}{c}F_1F_2^*$ とおくと、 $f: M \rightarrow \mathbb{S}^3(c^2)$ は (孤立した退化点を持つ) 共形的是め込みで、誘導計量 $f^*ds^2 = (1 + |g_i|^2)^2 \omega_i \cdot \bar{\omega}_i$ に関して CMC $H = \sqrt{H_0^2 - c^2}$ をもち、その Gauss 曲率は $K = H_0^2 \{1 - (|(g_i)_z|/|(g_i)_{\bar{z}}|)^2\}$ で与えられる。

逆に、CMC 曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{S}^3(c^2)$ はすべてこのようにして、正則でない調和写像 $g: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ から構成されるものに合同である。

上記の写像 $g: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ が f の第 2 Gauss 写像である。定理 3 と同様に、 $SU(2) \times SU(2)$ から \mathbb{C}^3 への崩壊に伴い、Kenmotsu-Bryant 型表現公式は Kenmotsu 公式への変形することが示せる。よって、CMC 曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{S}^3(c^2)$ の第 2 Gauss 写像も、Lawson 対応する \mathbb{E}^3 内の CMC 曲面の Gauss 写像であると言える。

2.2 (generalized) Gauss 写像

曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{S}^3(c^2)$ を \mathbb{E}^4 内の曲面とみなして定義される (generalized) Gauss 写像は、次のように与えられた (cf. [HO])。

\mathbb{E}^4 内の (向き付けられた) 平面全体のなす Grassmann 多様体 $\text{Gr}_2(\mathbb{E}^4)$ は複素射影空間 $\mathbb{C}P^3$ 内の 2 次曲面 \mathbb{Q}^2 とみなせる。すなわち、ベクトルの組 $\{v_1, v_2\}$ で生成される平面 $[v_1 \wedge v_2]$ を $[v_1 + \sqrt{-1}v_2] \in \mathbb{Q}^2$ と同一視した。

$$\mathbb{C}^4 = (\mathbb{C}^4 \cong \mathfrak{gl}(2; \mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle) \quad \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{w}\underline{w}^*) = |w^1|^2 + |w^2|^2 + |w^3|^2 + |w^4|^2,$$

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w^4 + \sqrt{-1}w^3 & w^1 + \sqrt{-1}w^2 \\ -w^1 + \sqrt{-1}w^2 & w^4 - \sqrt{-1}w^3 \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$$

$$\mathbb{C}P^3 := \{[\underline{w}] : \underline{w}, 0 \text{ を通る } \mathbb{C}^4 \text{ 内の複素直線}\}$$

$$\mathbb{Q}^2 := \{[\underline{w}] \mid \det \underline{w} = (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 + (w^4)^2 = 0\}.$$

$SU(2) \times SU(2)$ は \mathbb{Q}^2 に $g \cdot [\underline{w}] = [g_1 \underline{w} g_2^*]$ ($[\underline{w}] \in \mathbb{Q}^2, g = (g_1, g_2) \in SU(2) \times SU(2)$) と等長的推移的に作用し、 $\text{Gr}_2(\mathbb{E}^4) \cong \mathbb{Q}^2$ は次のように表された。

$$\begin{aligned} \text{Gr}_2(\mathbb{E}^4) &= \left\{ \left[g_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g_2^* \right] \mid (g_1, g_2) \in SU(2) \times SU(2) \right\} = SU(2) \times SU(2) / U(1) \times U(1) \\ &\cong \{ (g_1[\infty], g_2[\infty]) \mid (g_1, g_2) \in SU(2) \times SU(2) \} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \quad (\mathbb{S}^2 = (\bar{\mathbb{C}}, ds_{\mathbb{S}^2}^2)). \end{aligned}$$

曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{E}^4$ の (generalized) Gauss 写像は

$$G = [f_x \wedge f_y] = [f_{\bar{z}}] : M \rightarrow \text{Gr}_2(\mathbb{E}^4) \cong \mathbb{Q}^2$$

と定義され、 $\text{Gr}_2(\mathbb{E}^4)$ の分解に応じて

$$G = (G_1, G_2) : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$$

と分解される。

$\mathbb{S}^3(c^2)$ 内の曲面 (共形的是め込み) $f : M \rightarrow \mathbb{S}^3(c^2) \subset \mathbb{E}^4$ に対して、adapted frame $G = (G_1, G_2) : M \rightarrow SU(2) \times SU(2)$ をとって考えると、その (generalized) Gauss 写像 (の各部分) $\mathcal{G}_i : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ ($i = 1, 2$) は $\mathcal{G}_i = G_i[\infty]$ と与えられる。曲面 $f : M \rightarrow \mathbb{S}^3(c^2)$ が CMC H をもつとき、(generalized) Gauss 写像 $\mathcal{G}_i : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ ($i = 1, 2$) は、第 2 Gauss 写像 $g (= g_1) : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ と同じく調和写像である。以下に、両 Gauss 写像の関係を列記する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{H^2 + c^2}} \frac{g_z}{g_{\bar{z}}} &= \frac{1}{H + \sqrt{-1}c} \frac{(\mathcal{G}_1)_z}{(\mathcal{G}_1)_{\bar{z}}} = \frac{1}{H - \sqrt{-1}c} \frac{(\mathcal{G}_2)_z}{(\mathcal{G}_2)_{\bar{z}}}, \\ \left| \frac{g_z}{g_{\bar{z}}} \right| &= \left| \frac{(\mathcal{G}_i)_z}{(\mathcal{G}_i)_{\bar{z}}} \right|, \quad \frac{|g_z|}{1 + |g|^2} = \frac{|(\mathcal{G}_i)_z|}{1 + |\mathcal{G}_i|^2}, \quad \frac{|g_{\bar{z}}|}{1 + |g|^2} = \frac{|(\mathcal{G}_i)_{\bar{z}}|}{1 + |\mathcal{G}_i|^2}, \\ \mathcal{G}_i &= F_i[-\sqrt{-1}g] = \frac{\partial B_i}{\partial A_i} = -\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{B}_i}, \end{aligned}$$

ここで、 $F = (F_1, F_2) : M \rightarrow SU(2) \times SU(2)$ は定理 4 で与えられた frame で、各 $F_i = \begin{bmatrix} B_i & -\bar{A}_i \\ A_i & B_i \end{bmatrix} : M \rightarrow SU(2)$ と表した。以上の計算に基づいて、次の結果を得た。

定理 5. CMC H 曲面 $f : M \rightarrow \mathbb{S}^3(c^2)$ の (generalized) Gauss 写像 $\mathcal{G}_i : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ は調和写像であるので、定理 4 によりそれを第 2 Gauss 写像とする CMC H 曲面 $f_i : M \rightarrow \mathbb{S}^3(c^2)$ が存在する。このとき、 f_1, f_2 は次のような Hopf 微分 Φ_1, Φ_2 をもつ、 f の随伴曲面である。

$$\Phi_1 = \left(\frac{H + \sqrt{-1}c}{\sqrt{H^2 + c^2}} \right) \Phi \quad \text{and} \quad \Phi_2 = \left(\frac{H - \sqrt{-1}c}{\sqrt{H^2 + c^2}} \right) \Phi.$$

特に、 $H = 0$ のときは、 f_1 は f の共役極小曲面である。

2.3 単連結でない CMC 曲面の第 2 Gauss 写像

第 2 Gauss 写像を計算する例を挙げるにあつて、totally umbilic 曲面を除いて最も簡単な CMC 曲面の例は Clifford torus $\mathbb{S}^1(c_1^2) \times \mathbb{S}^1(c_2^2) \subset \mathbb{S}^3(c^2)$ ($c_1, c_2 > 0, \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} = \frac{1}{c^2}$) であるが、 $M = T^2$ が単連結でないので M の universal covering $\tilde{M} = \mathbb{C}$ 上でしか第 2 Gauss 写像は定義されない。

しかし一般に、単連結でない CMC 曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{S}^3(c^2)$ の Riemannian universal covering \tilde{M} 上に定義される第 2 Gauss 写像 g に対して次のような変換則を示す事はできる。ここで、Riemann 面 M の基本群 $\pi_1(M)$ をデッキ変換群とみなす。

命題 3. 任意の $\gamma \in \pi_1(M), w \in \tilde{M}$ に対して、 $g(\gamma(w)) = \rho(\gamma)[g(w)]$ と表せる表現 $\rho = \rho_g: \pi_1(M) \rightarrow SU(2)$ が一意的に存在する。

Clifford torus $\mathbb{S}^1(c_1^2) \times \mathbb{S}^1(c_2^2)$ は共形的是め込み

$$f: T^2 := \mathbb{C} / (\mathbb{Z}(\frac{2\pi}{c_1}) \oplus \mathbb{Z}(\sqrt{-1}\frac{2\pi}{c_2})) \rightarrow \mathbb{S}^3(c^2) (\subset \mathbb{E}^4);$$

$$f(z) = \left(\frac{1}{c_1} \cos c_1 x, \frac{1}{c_1} \sin c_1 x, \frac{1}{c_2} \cos c_2 y, \frac{1}{c_2} \sin c_2 y \right) \quad (z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}).$$

で与えられる完備平坦な曲面である。その第 2 Gauss 写像 $g(= g_1)$ は

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}; \quad g(z) = \sqrt{-1} \tan \left(\frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{2} y \right),$$

という虚数軸 $\sqrt{-1}\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{C}}$ 上に像をもつ調和写像で、Lawson 対応している \mathbb{E}^3 内の cylinder $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1(k^2)$ の Gauss 写像とみなせる。上の命題による変換則の表現 $\rho = \rho_g: \pi_1(T^2) = \{m(\frac{2\pi}{c_1}) + \sqrt{-1}n(\frac{2\pi}{c_2}) \in \text{Isom}_+(\mathbb{C}) \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow SU(2)$ は次のようになる

$$\rho\left(m\left(\frac{2\pi}{c_1}\right) + \sqrt{-1}n\left(\frac{2\pi}{c_2}\right)\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{c_2} n\pi\right) & \sqrt{-1} \sin\left(\frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{c_2} n\pi\right) \\ \sqrt{-1} \sin\left(\frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{c_2} n\pi\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{c_2} n\pi\right) \end{bmatrix}.$$

また (generalized) Gauss map $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ は

$$\mathcal{G}_1: T^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}; \quad \mathcal{G}_1(z) = -e^{\sqrt{-1}(c_1 x - c_2 y)},$$

$$\mathcal{G}_2: T^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}; \quad \mathcal{G}_2(z) = e^{\sqrt{-1}(c_1 x + c_2 y)}.$$

と計算できる。

3 $\mathbb{S}_1^3(c^2)$ と $\mathbb{H}_1^3(-c^2)$ 内の CMC 空間的曲面

最後に、3次元 Lorentz 空間形内の CMC 空間的曲面の表現公式についてまとめておく。

3次元 Minkowski 空間 \mathbb{L}^3 内の CMC H 空間的曲面に対しては、 $H = 0$ (極大曲面) のときには、Weierstrass 型表現公式 (つまり、有理型関数と正則 1 次微分形式による表現)

([Kb]) が知られており、 $H \neq 0$ のときには、双曲平面 \mathbb{H}^2 への調和写像による Kenmotsu 型表現公式が示されている ([AN])。3次元 Lorentz 空間形内の CMC 空間的曲面に対しても Lawson 型の対応があるので、de Sitter 空間 $S_1^3(c^2)$ や anti-de Sitter 空間 $\mathbb{H}_1^3(-c^2)$ 内の対応する CMC 空間的曲面の表現公式を得られることは容易に推測がつく。ここで、Lawson 型対応とは、「 \mathbb{E}^3 内の CMC $H_0 (\geq 0)$ 空間的曲面全体」と「 $S_1^3(c^2)$ 内の CMC $\sqrt{H_0^2 + c^2} (\geq c)$ 空間的曲面全体」と「 $\mathbb{H}_1^3(-c^2)$ 内の CMC $\sqrt{H_0^2 - c^2}$ 空間的曲面全体」との間に S^1 -同変な 1対1対応があることを言う。また、「 $S_1^3(c_0^2)$ 内の CMC $\sqrt{c^2 - c_0^2} (< c)$ 空間的曲面全体」と「 $S_1^3(c_0^2)$ 内の極大曲面全体」との間にも S^1 -同変な 1対1対応がある。

3.1 $S_1^3(c^2)$ 内の CMC 空間的曲面の Kenmotsu-Bryant 型表現公式

正定曲率 c^2 の 3次元 de Sitter 空間 $S_1^3(c^2)$ は $L^4 = \text{Herm}(2)$ 内に $S_1^3(c^2) = \{\mathbf{x} \in \text{Herm}(2) \mid \det \mathbf{x} = -1/c^2\}$ と与えられる 2次曲面で、やはり $SL(2; \mathbb{C})$ が等長的推移的に作用し、次のように表せる。

$$S_1^3(c^2) = SL(2; \mathbb{C})/SU(1, 1) = \left\{ \frac{1}{c} g \varepsilon g^* \mid g \in SL(2; \mathbb{C}) \right\}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(向きを保つ) 共形的是め込み $f: M \rightarrow S_1^3(c^2)$ に対して、 C^∞ 写像 $F: M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ で $\frac{1}{c} F \varepsilon F^* = f$ となるものを f の frame と呼び、特に GG^* が f の単位法ベクトル場であるような frame $G: M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ を f の adapted frame という。

以下、双曲平面 \mathbb{H}^2 を Poincaré 計量 $ds_D^2 = \frac{4|d\xi|^2}{(1-|\xi|^2)^2}$ をもつ単位円盤 \mathbb{D} とみなす。

定理 6 ($S_1^3(c^2)$ での Kenmotsu-Bryant 型表現公式). M を単連結な連結 Riemann 面とし、固定点 z_0 と等温座標 z を与えておく。 $g: M \rightarrow \mathbb{D}$ を正則でない調和写像とする。正定数 H_0 に対して、 $gl(2; \mathbb{C})$ -値 1次形式 α を次のように定める。

$$\alpha = \begin{bmatrix} g & 1 \\ g^2 & g \end{bmatrix} \omega, \quad \omega = \frac{2\overline{(g_z)}}{H_0(1-|g|^2)^2} dz,$$

このとき、次を満たす C^∞ 写像 $F: M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ が一意的に存在する。

$$F^{-1}dF = \frac{c}{2} \left\{ \frac{2H_0}{\sqrt{H_0^2 + c^2} + H_0 - c} \varepsilon \alpha + \frac{2H_0}{\sqrt{H_0^2 + c^2} + H_0 + c} \varepsilon \alpha^* \right\},$$

$$F(z_0) = \text{id}.$$

$f = \frac{1}{c}F\varepsilon F^*$ とおくと、 $f: M \rightarrow \mathbb{S}_1^3(c^2)$ は (孤立した退化点を持つ) 共形的是め込みで、誘導計量 $f^*ds^2 = (1 - |g|^2)^2\omega \cdot \bar{\omega}$ に関して CMC $H = \sqrt{H_0^2 + c^2}$ をもち、その Gauss 曲率は $K = -H_0^2\{1 - (|g_z|/|g_{\bar{z}}|)^2\}$ で与えられる。

逆に、CMC H ($|H| > c$) 空間的曲面 $f: M \rightarrow \mathbb{S}_1^3(c^2)$ はすべてこのようにして、正則でない調和写像 $g: M \rightarrow \mathbb{D}$ から構成されるものに合同である。

$\mathbb{S}_1^3(c^2)$ 内の CMC c の空間的曲面に対する表現公式は、 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC c 曲面の Bryant 表現公式とほぼ同じである。すなわち、 $F^{-1}dF = (\text{零的 } \mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})\text{-値正則 1 次微分形式})$ の解 $F: M \rightarrow SL(2; \mathbb{C})$ は、 $\mathbb{H}^3(-c^2)$ 内の CMC c 曲面の frame であり、また $\mathbb{S}_1^3(c^2)$ 内の CMC c 空間的曲面の frame でもある。

3.2 $\mathbb{H}_1^3(-c^2)$ 内の CMC 空間的曲面 の Kenmotsu-Bryant 型表現公式

(2, 2) 計量をもつ 擬 Euclid 空間 \mathbb{E}_2^4 を $\mathbb{R}SU(1, 1)$ とみなす。すなわち、 (x_1, x_2, x_3, x_4) を行列

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_4 + \sqrt{-1}x_3 & x_1 + \sqrt{-1}x_2 \\ x_1 - \sqrt{-1}x_2 & x_4 - \sqrt{-1}x_3 \end{bmatrix}$$

と同一視し、(2, 2)-計量を $-\det \underline{x}$ と与える。 $g_1 \underline{x} g_2^*$ ($g_1, g_2 \in SU(1, 1)$) によって、 $SU(1, 1) \times SU(1, 1)$ は $\mathbb{R}SU(1, 1)$ さらに 負定曲率 $-c^2$ の 3 次元 anti-de Sitter 空間 $\mathbb{H}_1^3(-c^2) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}SU(1, 1) \mid \det \underline{x} = 1/c^2\}$ に等長的推移的に作用し、 $\mathbb{H}_1^3(-c^2)$ は次のように表示される。

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_1^3(-c^2) &= \left\{ \frac{1}{c} g_1 g_2^* \mid g = (g_1, g_2) \in SU(1, 1) \times SU(1, 1) \right\}, \\ &= (SU(1, 1) \times SU(1, 1)) / \Delta', \quad \Delta' := \{(h, \varepsilon h \varepsilon) \mid h \in SU(1, 1)\} \end{aligned}$$

(向きを保つ) 共形的是め込み $f: M \rightarrow \mathbb{H}_1^3(-c^2)$ に対して、 C^∞ 写像 $F = (F_1, F_2): M \rightarrow SU(1, 1) \times SU(1, 1)$ で $f = \frac{1}{c}F_1 F_2^*$ となるものを f の frame といい、さらに $\sqrt{-1}F_1 \varepsilon F_2^*$ ($\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$) が f の単位法ベクトル場となるものを f の adapted frame と呼ぶ。

定理 7 ($\mathbb{H}_1^3(-c^2)$ での Kenmotsu-Bryant 型表現公式). M を単連結な連結 Riemann 面とし、固定点 z_0 と等温座標 z を与えておく。 $g: M \rightarrow \mathbb{D}$ を正則でない調和写像とする。定数 $H_0 \geq c (> 0)$ に対して、 $\mathfrak{gl}(2; \mathbb{C})$ -値 1 次形式 α を次のように定める。

$$\alpha = \begin{bmatrix} \sqrt{-1}g & 1 \\ -g^2 & \sqrt{-1}g \end{bmatrix} \omega, \quad \omega = \frac{2\overline{(g_z)}}{H_0(1 - |g|^2)^2} dz,$$

このとき、次の満たす C^∞ 写像 $F = (F_1, F_2) : M \rightarrow SU(2) \times SU(2)$ が一意的に存在する。

$$F^{-1}dF = \frac{c}{2}\{\kappa\varepsilon\alpha - \bar{\kappa}\varepsilon\alpha^*\} \oplus \frac{c}{2}\{-\bar{\kappa}\alpha\varepsilon + \kappa\alpha^*\varepsilon\},$$

$$F(z_0) = \text{id}, \quad \kappa = 1 - \frac{\sqrt{-1}c}{H_0 + \sqrt{H_0^2 - c^2}}.$$

$f = \frac{1}{c}F_1F_2^*$ とおくと、 $f : M \rightarrow \mathbb{H}_1^3(-c^2)$ は (孤立した退化点を持つ) 共形的是め込みで、誘導計量 $f^*ds^2 = (1 - |g|^2)^2\omega \cdot \bar{\omega}$ に関して CMC $H = \sqrt{H_0^2 - c^2}$ をもち、その Gauss 曲率は $K = -H_0^2\{1 - (|g_z|/|g_{\bar{z}}|)^2\}$ で与えられる。

逆に、CMC 空間的曲面 $f : M \rightarrow \mathbb{H}_1^3(-c^2)$ はすべてこのようにして、正則でない調和写像 $g : M \rightarrow \mathbb{D}$ から構成されるものに合同である。

Lorentz 空間形での Kenmotsu-Bryant 型表現公式 や Bryant 表現公式の変形定理や、第 2 Gauss 写像 $g : M \rightarrow \mathbb{D}$ と (generalized) Gauss 写像との関係についても、Riemann 空間形での場合と対応する結果が得られるが、ここでは割愛する。

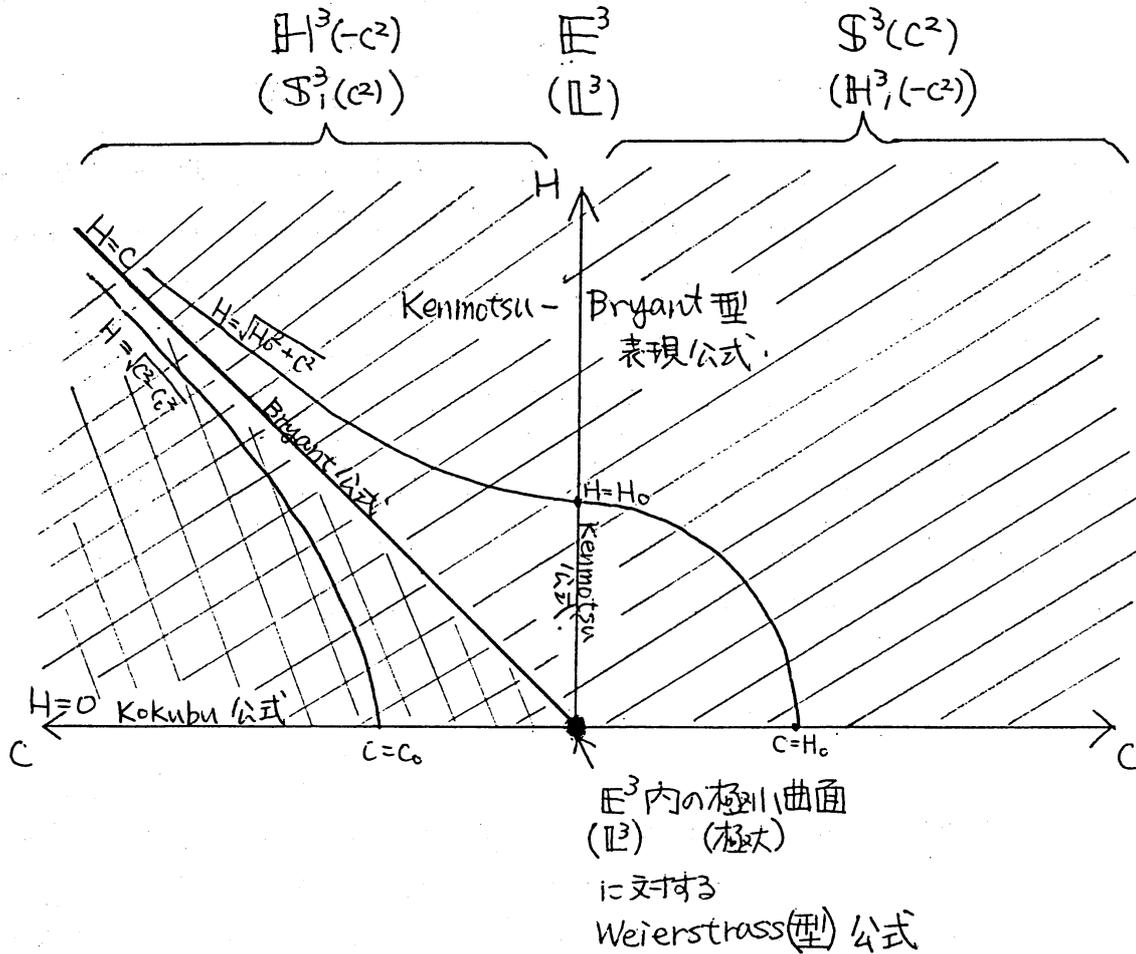
4 おわりに

最後に我々の研究を総括して、Lawson 対応 [L] および Fujioka [F] の frame による対応と、本稿で述べた Bryant や我々の研究の相違について述べておきたい。

ここで、3次元 Euclid 空間内の曲面 $f : M \rightarrow \mathbb{E}^3$ の frame とは、 \mathbb{E}^3 の等長変換群 (の double cover) $\mathbb{E}^3 \times SU(2)$ への lift $F = (f, *) : M \rightarrow \mathbb{E}^3 \times SU(2)$ であり、adapted frame $G = (f, h) : M \rightarrow \mathbb{E}^3 \times SU(2)$ とは特に $g = h\varepsilon h^* : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ が Gauss 写像であるもの言うことにする。

Lawson 対応は CMC 曲面の存在のみを保証するもので、対象となる ambient space 内の幾何的情報 (はめ込まれた曲面の位置や接平面・法ベクトル) を教えてはくれない。その意味で、(CMC 曲面という外在的幾何を対象としてはいるが) 内在的対応と言える。[F] による frame レベルでの (Lawson 的) 対応は、対象となる ambient space 内の曲面の位置の対応も与えている。Bryant や我々が行った研究は、さらに (全ての幾何的情報を対応付ける) adapted frame 間の対応をも与えている。

参考図表：定曲率空間形における CMC H 曲面の Lawson 対応と表現公式の分類



参考文献

[AA1] R. Aiyama and K. Akutagawa, Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^3(-c^2)$ and $\mathbb{S}_1^3(c^2)$, preprint.

[AA2] R. Aiyama and K. Akutagawa, Kenmotsu-Bryant type representation formula for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^3(c^2)$, preprint.

- [AA3] R. Aiyama and K. Akutagawa, Kenmotsu-Bryant type representation formula for constant mean curvature spacelike surfaces in $\mathbb{H}_1^3(-c^2)$, to appear in *Differential Geometry and its Applications*.
- [AN] K. Akutagawa and S. Nishikawa, The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space, *Tôhoku Math. J.* **42** (1990), 67–82.
- [B] R.L. Bryant, Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, *Astérisque* 154-155 (1987), 321–347.
- [F] A. Fujioka, Harmonic maps and associated maps from simply connected Riemann surfaces into the 3-dimensional space forms, *Tôhoku Math. J.* **47** (1995), 431–439.
- [HO] D. A. Hoffman and R. Osserman, The Gauss map of surfaces in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4 , *Proc. London Math. Soc.* **50** (1985), 27–56.
- [K] K. Kenmotsu, Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature, *Math. Ann.* **245** (1979), 89–99.
- [Kb] O. Kobayashi, Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3 , *Tokyo J. Math.*, **6** (1983), 297–309.
- [Kk] M. Kokubu, Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space, to appear.
- [L] B. Lawson, Complete minimal surfaces in S^3 , *Ann. of Math.* **92** (1970), 335–374.
- [UY1] M. Umehara and K. Yamada, A parametrization of the Weierstrass formulae and perturbation of complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 into the hyperbolic 3-space, *J. Reine Angew. Math.* **432** (1992), 93–116.
- [UY2] M. Umehara and K. Yamada, Surfaces of constant mean curvature c in $\mathbb{H}^3(-c^2)$ with prescribed hyperbolic Gauss map, *Math. Ann.* **304** (1996), 203–224.