数理解析研究所講究録
995 巻 1997 年 28-39

THE DEFORMATION OF HARMONIC MAPS GIVEN BY THE CLIFFORD TORI

東京都立大学　向井万里子 (Mariko Mukai)

Introduction

調和写像の変形理論を考える. ϕ をコンパクト Riemann 多様体 M から Riemann 多様体 N への調和写像とする. $\phi(0)=\phi$ となる調和写像の 1-parameter family $\phi(t)$ を, ϕ の *harmonic deformation* という. $\mathrm{Harm}(M,N)$ で, M から N への調和写像全体のなす空間を表わす. ϕ の変形に関する基本的問題は次の通りである.

(1) ϕ を調和写像のまま変形できるか, つまり, ϕ の調和写像としての無限小変形 (Jacobi 場) が integrable か, を判定する.

(2) integrable でない無限小変形が現われた場合は, その理由を明らかにする.

(3) $\mathrm{Harm}(M,N)$ における ϕ の近傍の形状を調べる.

(4) $\mathrm{Harm}(M,N)$ における ϕ を含む連結成分を決定し, そのコンパクト性, あるいは, コンパクト化を調べる.

さて, ここでは問題を具体化するために, S^3 の Clifford torus を用いて定義される調和写像の族を考える. これらは, 2 次元トーラス T^2 から 3 次元球面 S^3 への調和写像 $\varphi_s : T^2 \longrightarrow S^3 \cong SU(2)$ $(s \in \mathbb{R})$ で, 基本的で重要な例であり, 次で与えられる:

$$\varphi_s(e^{it_1}, e^{it_2}) = \begin{bmatrix} \cos s \cdot e^{it_1} & \sin s \cdot e^{it_2} \\ -\sin s \cdot e^{-it_2} & \cos s \cdot e^{-it_1} \end{bmatrix}. \tag{0.1}$$

T^2 には, square の conformal structure を入れておく. S^3 の等長変換を考えることにより, $0 \leq s \leq \pi/4$ で考えれば十分である.

この講演では, この $\{\varphi_s\}$ の調和写像としての無限小変形を完全に分類し, $\{\varphi_s\}$ の変形に関して上の問題 (1) ~ (4) に解答を与える.

§1. The infinitesimal harmonic deformation

§§1.1. 調和写像 $\phi : M \longrightarrow N$ に対して.

調和写像 $\phi : M \longrightarrow N$ を考える. ϕ の tension 場を $\tau(\phi)$ とすると, 調和写像の方程式は, $\tau(\phi) \equiv 0$ である. $\phi(t)$ を ϕ の harmonic deformation とする. $\tau(\phi(t))$ を

$$\tau(\phi(t)) = c_0(\phi) + tc_1(\dot{\phi}) + \frac{t^2}{2!}c_2(\dot{\phi}, \ddot{\phi}) + \frac{t^3}{3!}c_3(\dot{\phi}, \ddot{\phi}, \dddot{\phi}) + \cdots \tag{1.1}$$

と Taylor 展開しておくと, $\tau(\phi(t)) = 0$ より

$$c_0(\phi)(= \tau(\phi)) \equiv 0,\ c_1(\dot{\phi}) = 0,\ c_2(\dot{\phi}, \ddot{\phi}) = 0,\ c_3(\dot{\phi}, \ddot{\phi}, \dddot{\phi}) = 0, \cdots$$

という方程式系が得られる. ここで,

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}, \ddot{\phi} = \nabla^N_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}, \dddot{\phi} = \nabla^N_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^N_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} \in C^\infty(\phi^{-1}TN).$$

c_i 達の具体的な記述は [M] を参照. 特に c_1 は

$$c_1(\dot{\phi}) = -\mathcal{J}_\phi(\dot{\phi}) \tag{1.2}$$

で与えられる. $\mathcal{J}_\phi$ とは, 調和写像 ϕ に対する energy 汎関数の第 2 変分公式に現われる, $C^\infty(\phi^{-1}TN)$ 上の自己随伴的楕円型 2 階偏微分作用素で, Jacobi 作用素とよばれる. $\mathcal{J}_\phi$ の固有値 λ に対する固有空間を V_λ とすると, $C^\infty(\phi^{-1}TN) = \oplus_\lambda V_\lambda$ を得る. 調和写像 ϕ の *nullity* と *index* は

$$\mathrm{nullity}(\phi) = \dim V_0 = \dim \mathrm{Ker}\mathcal{J}_\phi, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{index}(\phi) = \sum_{\lambda<0} \dim V_\lambda \tag{1.4}$$

で定義され, 各値は有限であることを思い起こす.

では, ϕ の調和写像としての無限小変形 (infinitesimal harmonic deformation 又は harmonic *i*-deformation) を定義する.

Definition. $\phi \in \mathrm{Harm}(M, N)$ とする. このとき,

(1) $c_1(v) = 0$ をみたすような $\phi^{-1}TN$ の section v を, ϕ の無限小変形 (*harmonic i-deformation*) という.

(2) v は ϕ の 無限小変形で, かつ $c_2(v, w) = 0$ をみたすような $\phi^{-1}TN$ の section の pair (v, w) を, ϕ の 2 次の無限小変形 (*harmonic i-deformation of second order*) という.

(3) (v, w) は ϕ の 2 次の無限小変形で, かつ $c_3(v, w, z) = 0$ をみたすような $\phi^{-1}TN$ の section の triple (v, w, z) を, ϕ の 3 次の無限小変形 (*harmonic i-deformation of third order*) という.

調和写像 ϕ の無限小変形全体のなすベクトル空間を $\mathrm{HID}(\phi)$ で表わす. このとき, (1.2) (1.3) より,

$$\dim \mathrm{HID}(\phi) = \mathrm{nullity}(\phi) \tag{1.5}$$

が成り立つ.

次に, 調和写像 ϕ の無限小変形に対する integrability を定義する.

Definition. v を $\phi \in \mathrm{Harm}(M, N)$ の無限小変形とする.

(1) (v, w) が ϕ の 2 次の無限小変形になるような $w \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$ が存在するとき, v は *integrable up to second order* であるという.

(2) (v, w, z) が ϕ の 3 次の無限小変形になるような $w, z \in C^\infty(\phi^{-1}TN)$ が存在するとき, v は *integrable up to third order* であるという.

Definition. v を $\phi \in \mathrm{Harm}(M, N)$ の無限小変形とする.

$$v = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

となるような, ϕ の harmonic deformation $\phi(t)$ が存在するとき, v は *integrable* であるという.

Remark. v が integrable up to second or third order でなければ, v は integrable ではない.

§§1.2. 調和写像 $\phi : \Sigma \longrightarrow G$ に対して.

Σ を Riemann 面, G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする. 調和写像 $\phi : \Sigma \longrightarrow G$ を考える. この場合, ϕ の無限小変形やその integrability は, Lie 環の言葉を用いて記述できる. まず, 調和写像の方程式は

$$d * \theta = 0.$$

である. ここで, $\theta := \phi^{-1} d\phi$ は, G の Maurer-Cartan form の引き戻しで, $\phi^{-1}TG = \underline{\mathfrak{g}}$ に値をもつ 1-form である. $\phi(t)$ を ϕ の harmonic deformation とし, $\theta_t = \phi(t)^{-1} d\phi(t)$ とする. さらに,

$$\xi_t = \phi(t)^{-1} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \in C^\infty(\underline{\mathfrak{g}})$$

とおく. このとき, Taylor 展開 (1.1) の代わりに, $\xi = \xi_0$, $\dot{\xi} = \frac{d\xi_t}{dt}\big|_{t=0}$, $\ddot{\xi} = \frac{d^2\xi_t}{dt^2}\big|_{t=0}$ 等を用いて, 次を考える方が都合が良い:

$$d * \theta_t = a_0 + t a_1(\xi) + \frac{t^2}{2!} a_2(\xi, \dot{\xi}) + \frac{t^3}{3!} a_3(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}) + \cdots . \tag{1.6}$$

$a_0 (= d * \theta) \equiv 0$ であり, ϕ に対する Jacobi 作用素は

$$\mathcal{J}_\phi(\zeta) = - * d * d_\theta \zeta, \qquad \zeta \in C^\infty(\underline{\mathfrak{g}}) \tag{1.7}$$

で与えられる. ここで $d_\theta = d + \mathrm{ad}\theta$. このとき、

Lemma 1.1.

$$a_1(\xi) = - * \mathcal{J}_\phi(\xi), \tag{1.8}$$

$$a_2(\xi, \dot{\xi}) = - * \mathcal{J}_\phi(\dot{\xi}) - P(\xi), \tag{1.9}$$

$$a_3(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}) = - * \mathcal{J}_\phi(\ddot{\xi}) - Q(\xi, \dot{\xi}), \tag{1.10}$$

ここで $P(\xi), Q(\xi, \dot{\xi})$ は次で定義される:

$$P(\xi) := \big[[*\theta, \xi] \wedge d\xi\big], \tag{1.11}$$

$$Q(\xi, \dot{\xi}) := [*d\xi \wedge d\dot{\xi}] + 2\big[[*\theta, \xi] \wedge d\dot{\xi}\big] + \big[[*\theta, \dot{\xi}] \wedge d\xi\big] + \big[[*d_\theta \xi, \xi] \wedge d\xi\big]. \tag{1.12}$$

調和写像 $\phi : \Sigma \longrightarrow G$ に対する無限小変形, およびその integrability を次で定義する。

(1) $a_1(\xi) = 0$ をみたすような $\underline{\mathfrak{g}}$ の section ξ を, ϕ の 無限小変形という.

(2) ξ は ϕ の 無限小変形で, かつ $a_2(\xi, \eta) = 0$ をみたすような $\underline{\mathfrak{g}}$ の section の pair (ξ, η) を, ϕ の 2 次の無限小変形という.

(3) (ξ, η) は ϕ の 2 次の無限小変形で, かつ $a_3(\xi, \eta, \gamma) = 0$ をみたすような $\underline{\mathfrak{g}}$ の section の triple (ξ, η, γ) を, ϕ の 3 次の無限小変形という.

ξ を ϕ の無限小変形とするとき,

(1) (ξ, η) が ϕ の 2 次の無限小変形になるような $\eta \in C^\infty(\underline{\mathfrak{g}})$ が存在するとき, ξ は *integrable up to second order* であるという.

(2) (ξ, η, γ) が ϕ の 3 次の無限小変形になるような $\eta, \gamma \in C^\infty(\underline{\mathfrak{g}})$ が存在するとき, ξ は *integrable up to third order* であるという.

Definition. ξ を ϕ の無限小変形とする.

$$\xi = \phi^{-1} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

となるような, ϕ の harmonic deformation $\phi(t)$ が存在するとき, ξ は *integrable* であるという.

Lemma 1.1 から次を得る.

Lemma 1.2. ξ を 調和写像 ϕ の無限小変形とする.

(1) ξ が *integrable up to second order* であるための必要十分条件は, $*P(\xi)$ が $\mathrm{Ker}\mathcal{J}_\phi$ と直交すること.

(2) ξ が *integrable up to third order* であるための必要十分条件は, $a_2(\xi, \eta) = 0$ をみたすある η に対して$*Q(\xi, \eta)$ が $\mathrm{Ker}\mathcal{J}_\phi$ と直交すること.

ここで $C^\infty(\underline{\mathfrak{g}})$ 上の内積は, L^2 - 内積を使う.

§2. The infinitesimal harmonic deformations of φ_s

では, Clifford torus を用いて定義される調和写像 $\varphi_s : T^2 \longrightarrow SU(2)$ を考えよう. ((0.1) 参照). この節では, $0 \leq s \leq \pi/4$ とする. まず φ_s の 無限小変形を決定する. (1.7), (1.8) より φ_s の無限小変形の方程式 $a_1(\xi) = 0$ は,

$$(2.1) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t_2^2} + [(\theta_s)_1, \frac{\partial \xi}{\partial t_1}] + [(\theta_s)_2, \frac{\partial \xi}{\partial t_2}] = 0, \qquad \text{for } \xi \in C^\infty(\underline{\mathfrak{g}})$$

となる. ここで, $G = SU(2)$ の Maurer-Cartan form の φ_s による引き戻し $\theta_s = {\varphi_s}^{-1} d\varphi_s$ を, $\theta_s = (\theta_s)_1 dt_1 + (\theta_s)_2 dt_2$ と分解しておく:

$$(\theta_s)_1 = i \begin{bmatrix} \cos^2 s & \cos s \sin s \cdot e^{-it_1} e^{it_2} \\ \cos s \sin s \cdot e^{it_1} e^{-it_2} & -\cos^2 s \end{bmatrix},$$
$$(\theta_s)_2 = i \begin{bmatrix} -\sin^2 s & \cos s \sin s \cdot e^{-it_1} e^{it_2} \\ \cos s \sin s \cdot e^{it_1} e^{-it_2} & \sin^2 s \end{bmatrix}.$$

方程式 (2.1) を解いて, 次を得る.

Proposition 2.1. φ_s の 無限小変形のなすベクトル空間 $\mathrm{HID}(\varphi_s)$ は,

$$(2.2) \qquad \mathrm{HID}(\varphi_s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{7} \mathbb{R}\xi_i, & \textit{if } s \neq 0, \pi/6, \\ \sum_{i=1}^{9} \mathbb{R}\xi_i, & \textit{if } s = \pi/6, \\ \sum_{i=1}^{7} \mathbb{R}\xi_i + \sum_{i=8}^{9} \mathbb{R}\widetilde{\xi_i}, & \textit{if } s = 0 \end{cases}$$

である. ここで, ξ_i $(i = 1, \cdots, 9)$, $\widetilde{\xi_i}$ $(i = 8, 9)$ は次で定義される:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\xi_4 = i \begin{bmatrix} -\tan s \cdot (e^{-it_1} e^{-it_2} + e^{it_1} e^{it_2}) & e^{-2it_1} - \tan^2 s \cdot e^{2it_2} \\ e^{2it_1} - \tan^2 s \cdot e^{-2it_2} & \tan s \cdot (e^{-it_1} e^{-it_2} + e^{it_1} e^{it_2}) \end{bmatrix},$$
$$\xi_5 = \begin{bmatrix} -\tan s \cdot (e^{-it_1} e^{-it_2} - e^{it_1} e^{it_2}) & e^{-2it_1} + \tan^2 s \cdot e^{2it_2} \\ -e^{2it_1} - \tan^2 s \cdot e^{-2it_2} & \tan s \cdot (e^{-it_1} e^{-it_2} - e^{it_1} e^{it_2}) \end{bmatrix},$$
$$\xi_6 = i \begin{bmatrix} 0 & e^{-it_1} e^{it_2} \\ e^{it_1} e^{-it_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_7 = \begin{bmatrix} 0 & e^{-it_1} e^{it_2} \\ -e^{it_1} e^{-it_2} & 0 \end{bmatrix},$$
$$\xi_8 = i \begin{bmatrix} \tan s \cdot (e^{-it_1} + e^{it_1}) & e^{it_2} - \tan^2 s \cdot e^{-2it_1} e^{it_2} \\ e^{-it_2} - \tan^2 s \cdot e^{2it_1} e^{-it_2} & -\tan s \cdot (e^{-it_1} + e^{it_1}) \end{bmatrix},$$
$$\xi_9 = \begin{bmatrix} \tan s \cdot (e^{-it_1} + e^{it_1}) & e^{it_2} + \tan^2 s \cdot e^{-2it_1} e^{it_2} \\ -e^{-it_2} - \tan^2 s \cdot e^{2it_1} e^{-it_2} & -\tan s \cdot (e^{-it_1} + e^{it_1}) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\xi}_8 = i\begin{bmatrix} 0 & e^{-it_1}e^{-it_2} \\ e^{it_1}e^{it_2} & 0 \end{bmatrix},\ \widetilde{\xi}_9 = \begin{bmatrix} 0 & e^{-it_1}e^{-it_2} \\ -e^{it_1}e^{it_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

上の proposition と (1.5) により, 各ベクトル空間 HID(φ_s) の次元, 即ち φ_s の調和写像としての nullity(φ_s) が得られる. しかも, その数はジャンプしているところが興味深い.

Corollary 2.2.

$$\dim \mathrm{HID}(\varphi_s) = \begin{cases} 9, & \textit{if } s = 0, \pi/6 \\ 7, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

(*Figer* 2.1(i) を参照).

そこで, $s = 0, \pi/6$ でのジャンプがどこから来ているのかを明らかにするために, Jacobi 作用素 $\mathcal{J}_{\varphi_s}$ の負の固有値の挙動を調べると,

Proposition 2.3. $0 \leq s \leq \pi/2$ とする. 各 *Jacobi* 作用素 $\mathcal{J}_{\varphi_s}$ は, 重複度 2 の負の固有値

$$\begin{cases} \lambda_1 := 1 - \sqrt{2(1+\cos 2s)}, & \textit{if } 0 \leq s \leq \pi/3 \\ \lambda_2 := 1 - \sqrt{2(1-\cos 2s)}, & \textit{if } \pi/6 \leq s \leq \pi/2 \end{cases}$$

を持つ. (*Figer* 2.1(ii) を参照). 更に, λ_2 に対する固有空間は ξ_8, ξ_9 で *span* される.

これにより, 2 次元のジャンプを引き起こしていた HID($\varphi_{\pi/6}$) の部分空間は、まさに λ_2 に対する固有空間と一致することがわかる. さらに, 各 φ_s の index(φ_s) も定まったことになる.

Corollary 2.4. $0 \leq s \leq \pi/2$ とする.

$$\mathrm{index}(\varphi_s) = \begin{cases} 2, & \textit{if } 0 \leq s \leq \pi/6, \pi/3 \leq s \leq \pi/2, \\ 4, & \textit{if } \pi/6 < s < \pi/3. \end{cases}$$

(*Figure* 2.1(iii) を参照).

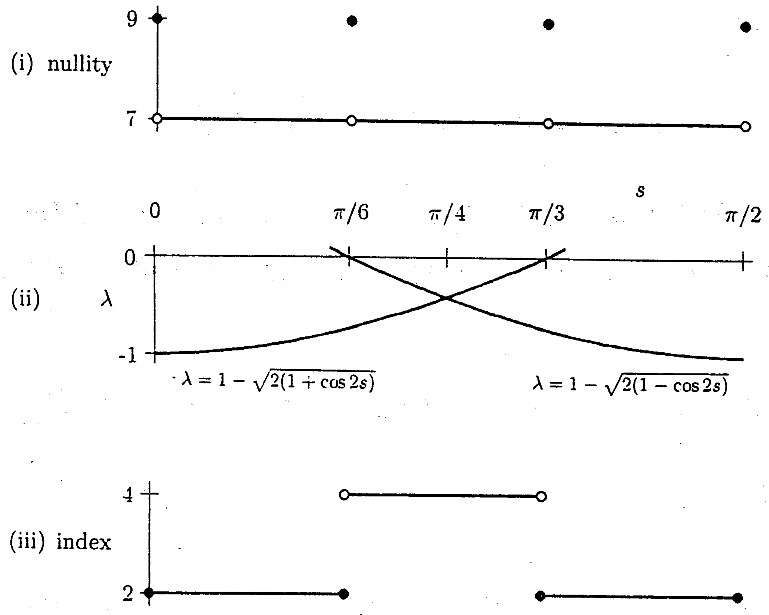

Figure 2.1.

§3. Classification of infinitesimal harmonic deformations

$0 \leq s \leq \pi/4$ とする. φ_s の 無限小変形を分類し, それらの integrability を調べよう.

まず, 群 $SO(4)$ は単位元を含む等長変換として S^3 上に作用するので, これは trivial な harmonic deformation を誘導する. $f_{(a,b)} : (e^{it_1}, e^{it_2}) \mapsto (e^{i(t_1+a)}, e^{i(t_2+b)})$ を T^2 の共形変換とし, R, L を $SU(2)$ の右, 左移動とするとき,

$$\varphi_s \circ f_{(a,b)}(e^{it_1}, e^{it_2}) = (R_A \circ L_B \circ \varphi_s)(e^{it_1}, e^{it_2})$$

が成り立つので, φ_s の trivial な無限小変形は, $X \circ \varphi_s$ (X : $SU(2)$ の Killing vector 場) の形になる. 故に, φ_s の trivial な無限小変形はすぐに定まり, それらが

$$(3.1) \qquad \begin{cases} W_0 := \sum_{i=1}^{6} \mathbb{R}\xi_i, & \text{if } s \neq 0, \\ V_0 := \sum_{i=1}^{5} \mathbb{R}\xi_i, & \text{if } s = 0 \end{cases}$$

を span することがわかる.

では, φ_s の trivial でない無限小変形を調べよう. s が 0, $\pi/6$, その他, に場合分けして考える.

§§3.1. $s \neq 0, \pi/6$ の場合.

$$\mathrm{HID}(\varphi_s) = W_0 \oplus W_1, \qquad W_1 = \mathbb{R}\xi_7$$

と分解しておく. 簡単な計算により次のことがわかる. parameter s を動かして得られる φ_s の無限小変形は, W_1 を span する (注意 : これは $s = \pi/6$ の時にも成り立つ). (3.1) と合わせて,

Proposition 3.1. $\mathrm{HID}(\varphi_s) = W_0 \oplus W_1$ の任意の元は *integrable* である.

§§3.2. $s = \pi/6$ の場合.

$$\mathrm{HID}(\varphi_{\pi/6}) = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2, \qquad W_1 = \mathbb{R}\xi_7,\ W_2 = \sum_{i=8}^{9} \mathbb{R}\xi_i$$

と分解する. 上の注意により, $W_0 \oplus W_1 \subset \mathrm{HID}(\varphi_{\pi/6})$ の任意の元は integrable であることがわかる. しかし, $\mathrm{HID}(\varphi_{\pi/6}) \setminus (W_0 \oplus W_1)$ の元の integrability はすぐには判定できない. そこで, その元が integrable up to second order であるか？ が問題になる. Lemma 1.2 (1) を検証すると、次の (2) を得る. まとめて,

Theorem 3.2.

(1) $W_0 \oplus W_1 \subset \mathrm{HID}(\varphi_{\pi/6})$ の任意の元は *integrable* である.

(2) $\mathrm{HID}(\varphi_{\pi/6}) \setminus (W_0 \oplus W_1)$ の任意の元は *integrable up to second order* でない. 故に *integrable* でない！

§§3.3. $s = 0$ の場合.

$$\mathrm{HID}(\varphi_0) = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2, \qquad V_1 = \sum_{i=6}^{7} \mathbb{R}\xi_i,\ V_2 = \sum_{i=8}^{9} \mathbb{R}\widetilde{\xi}_i$$

と分解する. 次で定義された 2 つの写像$\varphi_s^\omega, \widetilde{\varphi}_s^\omega : T^2 \longrightarrow SU(2)$ $(\omega \in \mathbb{R})$

$$\varphi_s^\omega(e^{it_1}, e^{it_2}) := \begin{bmatrix} \cos s \cdot e^{it_1} & \sin s \cdot e^{i(t_2+\omega)} \\ -\sin s \cdot e^{-i(t_2+\omega)} & \cos s \cdot e^{-it_1} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\widetilde{\varphi}_s^\omega(e^{it_1}, e^{it_2}) := \begin{bmatrix} \cos s \cdot e^{it_1} & \sin s \cdot e^{-i(t_2+\omega)} \\ -\sin s \cdot e^{i(t_2+\omega)} & \cos s \cdot e^{-it_1} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

は共に調和写像であり, $\varphi_0^\omega = \widetilde{\varphi}_0^\omega = \varphi_0$ である. このとき, 計算により

(1) parameter ω を適当に fix して parameter s を動かして得られる, φ_s^ω の無限小変形は, V_1 を span し,

(2) parameter ω を適当に fix して parameter s を動かして得られる, $\widetilde{\varphi}_s^\omega$ の無限小変形は, V_2 を span する

ことがわかる. これらの事実と (3.1) より, $V_0 \oplus V_1, V_0 \oplus V_2 \subset \mathrm{HID}(\varphi_0)$ の任意の元は integrable であることが得られる. そこで問題は, $\xi \in \mathrm{HID}(\varphi_0) \setminus \{(V_0 \oplus V_1) \cup (V_0 \oplus V_2)\}$ は integrability であるか? $s = \pi/6$ の場合と同様に, Lemma 1.2 (1) を検証すると,

Theorem 3.3. $\mathrm{HID}(\varphi_0)$ の任意の元は *integrable up to second order* である.

残念ながら, Theorem 3.3 からは ξ の integrability の情報は得られない. そこで次のステップは, ξ が integrable up to third order かどうかを Lemma 1.2 (2) に従って判定することである. かなり hard な計算の末, 次の (2) が得られる.

Theorem 3.4.

(1) $V_0 \oplus V_1,\ V_0 \oplus V_2 \in \mathrm{HID}(\varphi_0)$ の任意の元は *integrable* である.

(2) $\mathrm{HID}(\varphi_0) \setminus \{(V_0 \oplus V_1) \cup (V_0 \oplus V_2)\}$ の任意の元は *integrable up to third order* でない. 故に *integrable* ではない!

§4. The structure of a neighborhood and the component in $\mathrm{Harm}(T^2, S^3)$

前節までの結果を用いると, $\mathrm{Harm}(T^2, S^3)$ における φ_s のまわりの局所的構造が明らかになる.

Proposition 4.1. $0 \le s \le \pi/4$ とする. $s \ne 0$ に対して, $\mathrm{Harm}(T^2, S^3)$ における φ_s のまわりの近傍は 7 次元の滑らかな多様体になる. 一方, $\mathrm{Harm}(T^2, S^3)$ は φ_0 で特異点を持つ.

$s = \pi/6$ では integrable でない無限小変形が現われるにもかかわらず, $\mathrm{Harm}(T^2, S^3)$ における $\varphi_{\pi/6}$ のまわりの近傍は滑らかな多様体になることに注意する.

さて, $s=0$ において 2 つの調和写像の族 φ_s^ω と $\widetilde{\varphi}_s^\omega$ とは, φ_0 で互いに直交することがわかる. 以下, $0 \leq s \leq 2\pi$ とする. $s=\pi/2$ の場合について述べておく.

$$(4.1)\qquad \widehat{\varphi}_s^\omega(e^{it_1}, e^{it_2}) := \begin{bmatrix} \cos s \cdot e^{-it_1} & \sin s \cdot e^{i(t_2+\omega)} \\ -\sin s \cdot e^{-i(t_2+\omega)} & \cos s \cdot e^{it_1} \end{bmatrix}$$

で定義される調和写像の族$\widehat{\varphi}_s^\omega : T^2 \longrightarrow SU(2)$ $(\omega \in \mathbb{R})$ を考える. このとき, 2 つの調和写像の族 φ_s^ω と $\widehat{\varphi}_s^\omega$ とは (parameter ω を動かして得られる変形は同一視して) $\varphi_{\pi/2}$ で互いに直交することがわかる.

最後に, φ_s を含む $\mathrm{Harm}(T^2, S^3)$ における連結成分を決定する. 新しく調和写像の族 $\bar{\varphi}_s^\omega : T^2 \longrightarrow SU(2)$ $(\omega \in \mathbb{R})$ を次で定義する:

$$(4.2)\qquad \bar{\varphi}_s^\omega(e^{it_1}, e^{it_2}) := \begin{bmatrix} \cos s \cdot e^{-it_1} & \sin s \cdot e^{-i(t_2+\omega)} \\ -\sin s \cdot e^{i(t_2+\omega)} & \cos s \cdot e^{it_1} \end{bmatrix}.$$

Theorem 4.2. 4 つの調和写像の族の和集合 $\{\varphi_s^\omega\} \cup \{\widetilde{\varphi}_s^\omega\} \cup \{\widehat{\varphi}_s^\omega\} \cup \{\bar{\varphi}_s^\omega\}$ $(0 \leq s \leq 2\pi)$ に群 $SO(4)$ が作用して得られる, T^2 から S^3 への調和写像の集合は, $\mathrm{Harm}(T^2, S^3)$ における φ_s を含む連結成分になる. 故に, この連結成分はコンパクトになる.

図 4.1 は, 4 つの調和写像の族 $\{\varphi_s^\omega\}, \{\widetilde{\varphi}_s^\omega\}, \{\widehat{\varphi}_s^\omega\}, \{\bar{\varphi}_s^\omega\}$ $(0 \leq s \leq 2\pi)$ が, (parameter ω に関する変形を同一視して) どのように互いに直交しているかを表わしたものである.

Remark. 群 $SO(4)$ の作用により, $\{\varphi_s^\omega\}$ は $\{\bar{\varphi}_s^\omega\}$ に, $\{\widetilde{\varphi}_s^\omega\}$ は $\{\widehat{\varphi}_s^\omega\}$ に写る. 従って, $[\varphi_0]$ で互いに直交している 2 つの円, $[\varphi_s^\omega]$ と $[\widetilde{\varphi}_s^\omega]$ の和集合が, 商空間 $\mathrm{Harm}(T^2, S^3)/SO(4)$ における $[\varphi_s]$ を含む連結成分になる.

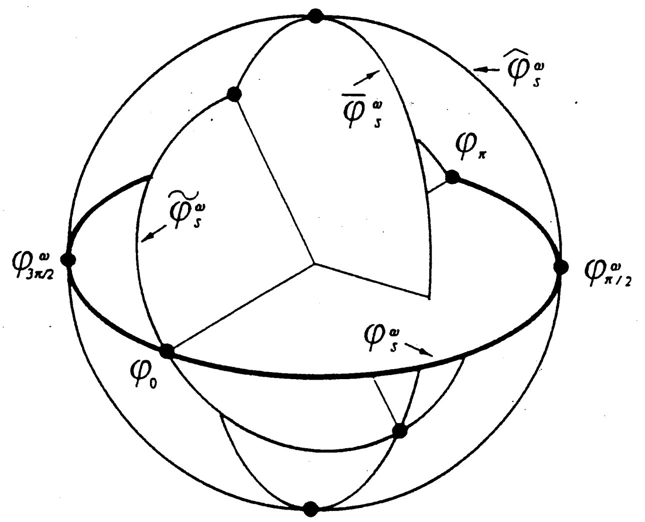

図 4.1.

Refenrences

[EL] J. Eells and L. Lemaire, *Deformations of metrics and associated harmonic maps*, Patodi. Memorial Vol. Geometry and Analysis (1981), 33-45.

[Ej] N. Ejiri, *The homotopically energy minimizing harmonic maps of tori into* $RP^3(1)$, preprint.

[H] N. J. Hitchin, *Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere*, J. Differential Geometry **31** (1990), 627-710.

[K1] N. Koiso, *Variation of harmonic mapping caused by a deformation of Riemannian metric*, Hokkaido Math. J. **8** (1979), 199-213.

[K2] ———, *Rigidity and infinitesimal deformability of Einstein metrics*, Osaka J. Math. **19** (1982), 643-668.

[K3] ———, *Einstein metrics and complex structures*, Invent. Math. **73** (1983), 71-106.

[M] M. Mukai, *The deformation of harmonic maps given by the Clifford tori*, preprint.

[S] T. Sunada, *Rigidity of certain harmonic mappings*, Invent. Math. **51** (1979), 297-307.

[T] G. Toth, *On rigidity of harmonic mappings into spheres*, J. London Math. Soc. **26** (1982), 475-486.