数理解析研究所講究録
997 巻 1997 年 150-165

ある種の有限次元半単純ホップ代数の構成

筑波大学大学院 数学系　鈴木 智支 (Satoshi Suzuki)

我々は、可換でも余可換でもない半単純なホップ代数の例として、標数が次元を割らない (代数閉) 体上において、8 次元のもの 1 つと、12 次元のもの 2 つを知っている ([Mas2][F])。この 3 つのホップ代数は半単純ホップ代数を分類する過程において現れたものであり、bicrossed product を使って記述されているが、それらを少し調べてみると、ともに二次行列代数の双対余代数 $M_2(k)^*$ で生成されていることをみてとることができる。

そこで、ここではまず これらをモデルにして、基礎体 k を標数が 2 でない代数閉体として、余代数 $M_2(k)^*$ によって生成される有限次元の余半単純ホップ代数の族 $\{A_{NL}^{(\nu\lambda)}\}$ を構成する。そして その構成員について、より詳しく研究 する。大切なことは、そのホップ代数が comatrix basis を使って表示されている、つまり 余代数の構造射は自然なものとして与えられている、ということである。

以下の順に話をすすめる。

§1 : 後で必要になる基本的な定義と結果をのべる。

§2 : ある Yang-Baxter 形式 $\sigma_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \in k)$ を定義して、それらから自然にきまる双代数 B について調べる。

§3 : (1) 双代数 B の商双代数からなる族 $\{A_{NL}^{(\nu\lambda)}\}$ を定義し、まず $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ が有限次元余半単純ホップ代数であること等をしらべる。(2) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の群的元のなす (アーベル) 群の型を決めて、それにより $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の同型を分類する。これにより、可換でも余可換でもない 8、12 次元の半単純ホップ代数の comatrix basis による表示を得ることになる。(3) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ のある部分ホップ代数とこの族との関係をみて、$A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の 2 つの部分ホップ代数のテンソル積への分解可能性をしらべる。これは $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ がどの程度 "自明" か、ということである。(4) 最後に $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の braidings を すべて決定する。これは $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の構成法のために非常に簡単となる。

§1．準備

用語等は Sweedler の本 [Sw] と Montgomery の本 [M] に従う。

ここでは、 体 k 上で考え、後で必要になる定義と結果を述べる。

braiding （coquasi-triangular）をもつ 双代数、つまり braided 双代数、 の概念は [H], [LT] において導入された。この双代数上の余加群のなすカテゴリー は、自然に braided 圏 になる（逆も従う）ことから、braiding は双代数にある種の可換性をあたえている、とみることができる。勿論すべての双代数が braiding をもつわけではない。また これは ＱＴ 構造の双対であるが、それらの違いは、有限次元においてさえ、つぎの事柄にあるように、筆者には思われる。つまり： 双代数 B が ある 部分余代数 C によって生成される時（具体的な例では C は有限次元、例えば行列代数の双対、にとることができる)、B 上の braiding は C 上できまる。つまり B 上の braiding への 拡張可能性 を保証しておけば、braiding は C 上の双線形形式として表示できる、ということである。拡張可能性については 二次双代数 [D] が非常に有効である。

[定義] B を双代数, $\tau : B \otimes B \to k$ を 可逆双線形形式とする。これは convolution 積に関して可逆ということである。 組 (B, τ) が braided 双代数と呼ばれるのは、次の３つの条件が満たされるときである：

$$\Sigma\, \tau(x_1, y_1)x_2y_2 = \Sigma\, y_1x_1\tau(x_2, y_2),$$

$$\tau(xy, z) = \Sigma\, \tau(x, z_1)\tau(y, z_2),$$

$$\tau(x, yz) = \Sigma\, \tau(x_1, z)\tau(x_2, y), \qquad x, y, z \in B.$$

その時、 次の関係式は自動的に成り立つ：

$$\tau(x, 1) = \varepsilon(x) = \tau(1, x),$$

$$\Sigma\, \tau(x_1, y_1)\tau(x_2, z_1)\tau(y_2, z_2) = \Sigma\, \tau(y_1, z_1)\tau(x_1, z_2)\tau(x_2, y_2), \qquad x, y, z \in B.$$

この 可逆双線形形式 τ を B の braiding と呼ぶ。このとき ${}^t\tau^{-1}$ も B 上の braiding となっている、ここで ${}^t\tau^{-1}(x, y) = \tau^{-1}(y, x)$ とする。${}^t\tau^{-1} = \tau$ となる時、braiding τ は対称である と言われる。

次の補題は簡単で、しかも重要である。

補題 1.1. C を余代数、I をその コイデアル、$f:C\to k$ を可逆線形写像とする。もし $f(I)=0$ ならば $f^{-1}(I)=0$ である。

［証明］ f を双対代数 C^* の元とみる。自然に C は 右 C/I-余加群となる。するとコイデアル I は C の C/I-部分余加群。だから I は 左 $(C/I)^*$-部分加群で、$f\cdot I\subset I$。$f\cdot I=I$ が成り立つことを示そう。余加群は局所有限だから、I の $(C/I)^*$-部分加群 $\{V_\alpha\}$ で、$\bigcup V_\alpha=I$, $\dim(V_\alpha)\lneq\infty$ となるものがある。$f\cdot$ は C 上単射だから、$f\cdot V_\alpha=V_\alpha$ が従う。よって $f\cdot I=I$、$f^{-1}(I)=0$。 □

次の命題の "$\Leftarrow$" には、補題 1.1 が欠かせない。

命題 1.2. B を部分余代数 C から生成される双代数、τ を B 上の braiding、$<I>$ を B のコイデアル I から生成される bi-ideal とする。その時、τ が 双代数 $B/<I>$ 上の braiding を引き起こす $\Leftrightarrow$ $C\otimes I+I\otimes C$ 上で $\tau=0$。

ここでは braiding を "局所的" にとらえるための枠組みとして二次双代数をとらえる。[D] による。それは FRT の双代数 $A(R)$ [FRT] の一般化である。

C を 余代数、$\sigma:C\otimes C\to k$ を 可逆双線形形式 とする。$T(C)$ を テンソル双代数、I_σ を 次の元で張られる $T(C)$ の部分空間とする：

$$\Sigma\,\sigma(x_1,y_1)x_2y_2-\Sigma\,y_1x_1\sigma(x_2,y_2),\qquad x,\ y,\ z\in C。$$

これは $T(C)$ の コイデアル である。そこで $M(C,\sigma)=T(C)/<I_\sigma>$ とおくと双代数になる。組 (C,σ) に付随する二次双代数とよぶ [D]。

命題 1.3. [D, 命題 2.3] 組 (C,σ) を上のようにし、B を双代数とする。もし $f:C\to B$ が $\Sigma\,\sigma(x_1,y_1)f(x_2)f(y_2)=\Sigma\,f(y_1)f(x_1)\sigma(x_2,y_2)$ となる (余代数) 写像であれば、$\tilde f:M(C,\sigma)\to B$ となる拡張された (双) 代数写像 $\tilde f$ が一意的に存在する。

[定義 [D, 定義 2.5]] (C,σ) を上のようにする。σ は次の条件を満たすとき Yang-Baxter 形式 (または YB-形式) とよばれる：

$$\Sigma\,\sigma(x_1,y_1)\sigma(x_2,z_1)\sigma(y_2,z_2)=\Sigma\,\sigma(y_1,z_1)\sigma(x_1,z_2)\sigma(x_2,y_2),\qquad x,\ y,\ z\in C。$$

このとき 組 (C,σ) を Yang-Baxter 余代数 (または YB-余代数) とよぶ。また σ が YB-形式であれば ${}^t\sigma^{-1}$ もそうであり、$I_\sigma = I_{{}^t\sigma^{-1}}$ となる。YB-形式 σ は ${}^t\sigma^{-1}=\sigma$ となる時、対称であると言う。

定理 1.4. [D, 定理 2.6] もし (C,σ) が YB-余代数 であれば、σ は $M(C,\sigma)$ 上の braiding $\tilde{\sigma}$ に 一意的に拡張できる。

もし (C,σ) が YB-余代数であるならば、$M(C,\sigma)$ はもうひとつの braiding ${}^t\tilde{\sigma}^{-1}$ をもつ。それは YB-形式 ${}^t\sigma^{-1}$ の拡張である。

系 1.5. $\tilde{\sigma}$ が対称 $\Leftrightarrow$ σ が対称。.

命題 1.6. B が部分余代数 C から生成されている双代数とする。このとき、C 上の可逆双線形形式 σ が B 上の braiding に拡張できる $\Leftrightarrow$

i) B 上で、$\Sigma\, \sigma(x_1,y_1)x_2y_2 = \Sigma\, y_1x_1\sigma(x_2,y_2), \quad x,y\in C$、となり、

ii) (C,σ) が YB-余代数、であり、

iii) 自然な全射 $\pi : M(C,\sigma)\to B$ の核 $\mathrm{Ker}\,\pi$ に対して $\mathrm{Ker}\,\pi\otimes C + C\otimes \mathrm{Ker}\,\pi$ 上で $\tilde{\sigma}=0$、 となること。

［証明］ 命題 1.2、1.3、定理 1.4 より。 □

§2. ある YB-余代数 と その二次双代数

ここでは、前節を利用しながら、ある二次双代数 B を調べる。

以下、基礎体 k は 標数が 2 でない代数閉体、C は 2×2 行列代数 $M_2(k)$ の 双対余代数、$\{X_{ij}\}_{1\leqq i,j\leqq 2}$ は C の comatrix basis、つまり

$$\Delta(X_{ij}) = X_{i1}\otimes X_{1j} + X_{i2}\otimes X_{2j}, \qquad \varepsilon(X_{ij})=\delta_{ij},$$

となるものとする。

任意の 余代数 D と $Y_{ij}\in D, 1\leqq i,j\leqq 2,$ に対して, もし線形写像 $C\to D, X_{ij}\mapsto Y_{ij}$, が 余代数単射準同型 であるならば、その像を

$$span_k(Y_{ij}) = span_k\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{pmatrix}$$

としてあらわす。

さて、 $\alpha, \beta \in k^{\times} = k - \{0\}$ に対して、 $\sigma_{\alpha\beta} : C \otimes C \to k$ を 以下の様に定まる C 上の 双線形形式 とする：

$\sigma_{\alpha\beta}$	X_{11}	X_{12}	X_{21}	X_{22}
X_{11}	0	0	0	0
X_{12}	0	α	β	0
X_{21}	0	β	α	0
X_{22}	0	0	0	0

.

$Q = \{\sigma_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in k^{\times}\}$ と おく。

また、双代数 B を 以下で与えられるものとする：

$$B = T(C) / < X_{11}^2 - X_{22}^2,\ X_{12}^2 - X_{21}^2,\ X_{ij}X_{lm}(i - j \not\equiv l - m \ (\mathrm{mod} 2)) > .$$

このとき、次が従う。

命題 2.1. i) 各 $\sigma_{\alpha\beta} \in Q$ は YB-形式 である。$\sigma_{\alpha\beta}$ が 対称となるのは、$\alpha^2 = 1 = \beta^2$ のときにかぎる。

ii) $\alpha^2 \neq \beta^2$ である $\sigma_{\alpha\beta}$ に対して、$B = M(C, \sigma_{\alpha\beta})$。

iii) B は基底として次の様な集合をもつ ：

$$\{\ X_{11}^{n-r} \overbrace{X_{22} X_{11} X_{22} \cdots}^{r},\ X_{12}^{n-r} \overbrace{X_{21} X_{12} X_{21} \cdots}^{r} \quad \mid n \geqq 0,\ 0 \leqq r \leqq n\ \}.$$

iv) B は 無限次元余半単純 である。具体的に k 以外の単純な部分余代数 は、次の様に与えられる：

$$k(X_{11}^{2s} \pm X_{12}^{2s}) \quad (\ s \geqq 1\ ),$$

$$C_{st} = span_k \begin{pmatrix} X_{11}^{2s} \overbrace{X_{11} X_{22} X_{11} \cdots}^{t} & X_{12}^{2s} \overbrace{X_{12} X_{21} X_{12} \cdots}^{t} \\ X_{12}^{2s} \overbrace{X_{21} X_{12} X_{21} \cdots}^{t} & X_{11}^{2s} \overbrace{X_{22} X_{11} X_{22} \cdots}^{t} \end{pmatrix} \quad (s \geqq 0,\ t \geqq 1).$$

v) YB-形式 $\sigma_{\alpha\beta}$ は B 上の braiding $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ に拡張でき、双代数 B の braidings は $\{\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in k^{\times}\}$ でつくされる。

［証明］ i) $\sim$ iv) は 直接計算すると わかる。

v) まず 定理 1.4 より $\alpha^2 \neq \beta^2$ に対して B は braiding $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ をもつことがわかる。一方 $\alpha^2 = \beta^2$ のとき、命題 1.6 の３つの条件はすべて成り立つので、 YB-形式 $\sigma_{\alpha\beta}$ は B 上の braiding に拡張できることがわかる。 また C^2 の基底との関係を調べて、B の braidings はそれらで尽くされることがわかる。 □

§３．双代数 B の 商

さて、B の 商双代数 からなる ある族を構成しよう。

以下 $N \geqq 1,\ L \geqq 2\ \ \nu, \lambda = \pm 1$ とする。それらに対して、

$$I_N^\nu = \mathrm{span}_k\{1-(X_{11}^{2N}+\nu X_{12}^{2N})\},$$

$$J_L^\lambda = \mathrm{span}_k\{\overbrace{X_{22}X_{11}X_{22}\cdots}^{L}-\overbrace{X_{11}X_{22}X_{11}\cdots}^{L},\quad \overbrace{X_{21}X_{12}X_{21}\cdots}^{L}-\lambda\overbrace{X_{12}X_{21}X_{12}\cdots}^{L}\}$$

とおく。すると、 I_N^ν と J_L^λ は B の コイデアル となることが すぐわかる。さらに

$$A_{NL}^{(\nu\lambda)} = B/ < I_N^\nu > + < J_L^\lambda >,$$

$$Q_{NL}^{(\nu\lambda)} = \{\sigma_{\alpha\beta} | (\alpha\beta)^N = \nu,\ (\alpha\beta^{-1})^L = \lambda\} \subset Q$$

とおく。 $A_{NL}^{(+-)} = A_{NL}^{(+1,-1)}$ 等と書き、 $\bar{X_{ij}} = x_{ij}$ とおく。

そのとき、次の定理が従う。

<u>定理 3.1.</u> i) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ は次の様な集合を基底として持つ：

$$\{x_{11}^s\overbrace{x_{22}x_{11}x_{22}\cdots}^{t},\ x_{12}^s\overbrace{x_{21}x_{12}x_{21}\cdots}^{t} | 1 \leqq s \leqq 2N,\ 0 \leqq t \leqq L-1\}.$$

だから $\dim A_{NL}^{(\nu\lambda)} = 4NL$。

ii) $G(A_{NL}^{(\nu\lambda)}) = G$ を $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の 群的元 のなす集合とする。 そのとき

$$G = \{x_{11}^{2s} \pm x_{12}^{2s},\ x_{11}^{2s}\overbrace{x_{11}x_{22}x_{11}\cdots}^{L} \pm \sqrt{\lambda}x_{12}^{2s}\overbrace{x_{12}x_{21}x_{12}\cdots}^{L}\ |\ 1 \leqq s \leqq N\}.$$

iii) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の 群的元で張られない 単純な部分余代数 は ：

$$C_{st} = span_k\begin{pmatrix} x_{11}^{2s}\overbrace{x_{11}x_{22}x_{11}\cdots}^{t} & x_{12}^{2s}\overbrace{x_{12}x_{21}x_{12}\cdots}^{t} \\ x_{12}^{2s}\overbrace{x_{21}x_{12}x_{21}\cdots}^{t} & x_{11}^{2s}\overbrace{x_{22}x_{11}x_{22}\cdots}^{t} \end{pmatrix}、$$

$$0 \leqq s \leqq N-1、1 \leqq t \leqq L-1。$$

iv) $|G(A_{NL}^{(\nu\lambda)})| = 4N$、 そして 丁度 $N(L-1)$ 個 の 4次元 の 単純部分余代数がある。

v) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ は 非余可換で余半単純。非可換であるのは $(L,\lambda) \neq (2,+1)$ の時に限る。

vi) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ は involutory ホップ代数である。

vii) $\Lambda = \Sigma_{s,t}\, x_{11}^{s}\, \overbrace{x_{22}x_{11}x_{22}\cdots}^{t}$(和は : $1 \leqq s \leqq 2N,\ 0 \leqq t \leqq L-1$) とする。 そのとき $\Lambda(\neq 0)$ は 両側積分 である。

viii) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ は $chk \nmid 2NL$ のときに限り半単純である。

［証明］[S] 参照。 □

［注］ $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の元について次の事に注意する。

・x_{ij}^{2} は 中心的。

・$x_{ii}^{2N+1} = x_{ii},\ x_{i,i+1}^{2N+1} = \nu x_{i,i+1}$。

・$x_{11}^{4N} + x_{12}^{4N} = 1$。

・$1 \leqq s \leqq N,\ \mu = \pm 1$ に対して、$(x_{11}^{2s} + \mu x_{12}^{2s})^{-1} = x_{11}^{2(2N-s)} + \mu x_{12}^{2(2N-s)}$。

ホップ代数 $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の群的元について調べよう。

$h_{\pm} = x_{11}^{2} \pm x_{12}^{2}$ とし、 $g = \overbrace{x_{11}x_{22}x_{11}\cdots}^{L} + \sqrt{\lambda}\,\overbrace{x_{12}x_{21}x_{12}\cdots}^{L}$ とする。 C_m は位数 m の巡回群をあらわすとする。

<u>命題 3.2.</u> i) G の 部分群 $< h_+, h_- >$ は $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ で 中心的 であり、その位数は $2N$ である。 群として

$$< h_+, h_- > \simeq \begin{cases} C_N \times C_2, & (N,\nu) = (\text{偶数}, +1) \text{ の時 ;} \\ C_{2N}, & \text{その他。} \end{cases}$$

ii) G が $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の中心 $Z(A_{NL}^{(\nu\lambda)})$ に含まれる $\Leftrightarrow g \in Z(A_{NL}^{(\nu\lambda)}) \Leftrightarrow (L,\lambda) = $ (偶数, +1)。

iii) 群 G はアーベル群であり、その型は :

L が偶数の時 :

$$\begin{aligned} G &= < h_+, h_- > \times < h_+^{-\frac{L}{2}} g > \\ &= \begin{cases} (C_N \times C_2) \times C_2、 & (N,\nu) = (\text{偶数}, +1) \text{ の時;} \\ (C_{2N}) \times C_2、 & \text{その他。} \end{cases} \end{aligned}$$

L が奇数の時：

$$G = \begin{cases} < h_\lambda^{\frac{1-L}{2}} g >= C_{4N}、 & \nu = -\lambda^N \text{ の時；} \\ < h_\lambda^{\frac{1-L}{2}} g > \times < h_+^{-1} h_- >= C_{2N} \times C_2、 & \nu = \lambda^N \text{ の時。} \end{cases}$$

［注］ i) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の 単純部分余代数の次元は 1 か $2^2 = 4$ である。

ii) 単純部分余代数 C_{01} は $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ を、代数として、生成する。

iii) $C \simeq C_{01} \subset A_{NL}^{(\nu\lambda)}$, $X_{ij} \mapsto x_{ij}$, は 余代数の同型。

これにより C と C_{01} とを 同一視する。

iv) 部分ホップ代数 $K = k < h_+, h_- >$ は正規だから、 $A_{NL}^{(\nu\lambda)} K^+$ はホップ イデアルである、 ここで $K^+ = \mathrm{Ker}\, \varepsilon_K$。 だから $A_{NL}^{(\nu\lambda)} / A_{NL}^{(\nu\lambda)} K^+ = \bar{A}$ は $2L$ 次元のホップ代数となる。 元 $\bar{x}_{11} = a$, $\bar{x}_{22} = b \in \bar{A}$ は群的元であり、代数として $\bar{A}$ を生成することをみるのはやさしい。 これは $\bar{A}$ が群的ホップ代数であることを意味する。 ここで $ab = c$ とすると、 c の位数は L である。 そして、

$$\begin{aligned} \bar{A} &= k < a, b \ \mid a^2 = 1 = b^2,\ \overbrace{baba\cdots}^{L} = \overbrace{abab\cdots}^{L} > \\ &= k < a, c \ \mid a^2 = 1,\ c^L = 1,\ aca^{-1} = c^{-1} > \\ &= kD_L \ \text{、ここで } D_L \text{ は位数 } 2L \text{ の 二面体群。} \end{aligned}$$

よって、[Mas1, 定義 1.3] の意味での短完全列を得る：

$$1 \to K \hookrightarrow A_{NL}^{(\nu\lambda)} \to kD_L \to 1。$$

つまり、 $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ は 群的ホップ代数による "拡大" としてもとらえられるということである。

さて、$A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ 達はどれとどれが同型であろうか？ 命題 3.2 をつかうと分類ができる ([S, 命題 3.12] 参照)。

<u>命題 3.3.</u> $A_{N_1 L_1}^{(\nu_1\lambda_1)} \simeq A_{N_2 L_2}^{(\nu_2\lambda_2)}$

$\Leftrightarrow (N_2, L_2) = (N_1, L_1), \qquad (\nu_2, \lambda_2) = (\nu_1, \lambda_1)$ または $((-1)^{N_1}\nu_1, (-1)^{L_2}\lambda_1)$。

[注 [Mas2], [F]] 唯一の自明でない 8 次元半単純ホップ代数は $A_{1,2}^{(+-)} \simeq A_{1,2}^{(--)}$ として 表示されることがわかる。 その 極小イデアルへの分解は次の様にあたえられる。

$$A_{12}^{(+-)} = k(x_{11} + x_{22} + x_{11}^2 + x_{11}x_{22}) \oplus k(x_{11} - x_{22} - x_{11}^2 + x_{11}x_{22})$$

$$\oplus\, k(x_{11} - x_{22} + x_{11}^2 - x_{11}x_{22}) \oplus k(x_{11} + x_{22} - x_{11}^2 - x_{11}x_{22})$$

$$\oplus\, span_k\{x_{12}, x_{21}, x_{12}^2, x_{12}x_{21}\}。$$

標数 $\neq 3$ とする。 2つの自明でない 12 次元半単純ホップ代数は $A_{1,3}^{(++)} \simeq A_{1,3}^{(--)}$ と $A_{1,3}^{(+-)} \simeq A_{1,3}^{(-+)}$ として表示される。 その極小イデアル分解は：

$$A_{13}^{(+\lambda)} = k(x_{11} + x_{22} + x_{11}^2 + x_{11}x_{22} + x_{22}x_{11} + x_{11}x_{22}x_{11})$$

$$\oplus\, k(x_{11} + x_{22} - x_{11}^2 - x_{11}x_{22} - x_{22}x_{11} + x_{11}x_{22}x_{11})$$

$$\oplus\, < 2x_{11}^2 - (x_{11}x_{22} + x_{22}x_{11}) >$$

$$\oplus\, k(x_{12} + \lambda x_{21} + x_{12}^2 + \lambda x_{12}x_{21} + \lambda x_{21}x_{12} + \lambda x_{12}x_{21}x_{12})$$

$$\oplus\, k(x_{12} + \lambda x_{21} - x_{12}^2 - \lambda x_{12}x_{21} - \lambda x_{21}x_{12} + \lambda x_{12}x_{21}x_{12})$$

$$\oplus\, < 2x_{12}^2 - \lambda(x_{12}x_{21} + x_{21}x_{12}) > 。$$

ホップ 代数 $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ は より小さなホップ代数による拡大となっていたが、より強く、部分ホップ代数のテンソル積に分解可能であろうか？ また、$A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ はもちろん単純部分余代数 C から生成されているが、他のものからではどうであろうか？

これらの問いに答えるために、より一般的なものを考える。幸い我々はそのすべての単純部分余代数を知っている。C_{st} が $0 \leqq s \leqq N-1$, $1 \leqq t \leqq L-1$ に対して、$A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の 4 次元の単純部分余代数 をあらわしていた。 $< C_{st} >$ を C_{st} が生成する部分双代数とすると、それは 部分ホップ代数 である。 また、$< C_{st} >$ が可換であるのは t が偶数か $(L, \lambda) = (2t, +1)$ のときにかぎる。 だから $< C_{st} >$ が非可換であれば t はいつも奇数であることに注意する。

もし t が 奇数であれば $< C_{st} >$ は ある $A^{(\nu\lambda)}_{N_0L_0}$ と同型であることをみることができる。具体的に、以下の様にする ：

$$GCD(L,\ t) = m_L,\ GCD(N,\ 2s+t) = m_N,$$
$$L/m_L = L_0,\ N/m_N = N_0,\ t/m_L = t_0,\ (2s+t)/m_N = (s,t)_0,$$
$$(2 \leqq L_0 \leqq L,\ 1 \leqq N_0 \leqq N)。$$

直接 計算すると、実際に 次の定理が従うことがわかる ([S, 定理 3.5])。

<u>定理 3.4.</u> t を 奇数 とし、 $C_{st} \subset A^{(\nu\lambda)}_{NL}$ とする。そのとき

$$A^{(\nu\lambda)}_{N_0L_0} \simeq < C_{st} >,$$
$$x_{11} \leftrightarrow x_{11}^{2s} \overbrace{x_{11}x_{22}x_{11}\cdots}^{t}, \quad x_{12} \leftrightarrow x_{12}^{2s} \overbrace{x_{12}x_{21}x_{12}\cdots}^{t}$$
$$x_{21} \leftrightarrow x_{12}^{2s} \overbrace{x_{21}x_{12}x_{21}\cdots}^{t}, \quad x_{22} \leftrightarrow x_{11}^{2s} \overbrace{x_{22}x_{11}x_{22}\cdots}^{t}.$$

さて、次の補題が必要である。

<u>補題 3.5.</u> A_1 と A_2 を 代数閉体上の 双代数とする。 もし 双代数 $A_1 \otimes A_2$ が、代数として、単純部分余代数から生成されているならば、 A_1 と A_2 も そうである。さらに もし $A_1 \otimes A_2$ の各単純部分余代数の次元が 1 か n^2 であれば, A_1 か A_2 のどちらかは pointed である。

この補題を使うと、我々の問いに対する、$(L,\lambda) \neq (2、+1)$ の時の、答えを得る。

<u>系 3.6.</u> i) $A^{(\nu\lambda)}_{NL}$ を 非可換、つまり $(L,\lambda) \neq (2,+1)$、 とし、 $C_{st} \subset A^{(\nu\lambda)}_{NL}$ とする。 すると：

$$< C_{st} >= A^{(\nu\lambda)}_{NL} \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ は 奇数、 } (L,\ t) = 1、\ (N,\ 2s+t) = 1。$$

ii) 簡単に、 t は奇数とし、 $C_{st} \subset A^{(\nu\lambda)}_{NL}$ とする。 すると

$$< C_{st} >= A^{(\nu\lambda)}_{NL} \quad \Leftrightarrow \quad (L,\ t) = 1、(N,\ 2s+t) = 1。$$

iii) $N=2^n m$、 m を奇数とする。すると ホップ代数として

$$A_{NL}^{(\nu\lambda)} \simeq A_{2^n,L}^{(\nu\lambda)} \otimes kC_m。$$

iv) もし $A_{2^n,L}^{(\nu\lambda)}$ が非可換であれば、それは部分ホップ代数のテンソル積には分解しない。

［証明］ i),ii) 次元を比べるとわかる。

iii) $N=2^n m$、 m を奇数とする。 $m \geqq 3$ としてよい。さて $s=\frac{m-1}{2}$、$t=1$ とすると、 $2s+t=m$, $N_0=2^n$, $L_0=L$ となり、 $<C_{st}>\simeq A_{2^n,L}^{(\nu\lambda)}$ となる。

つぎに $f=x_{11}^{2\cdot 2^n}+\nu x_{12}^{2\cdot 2^n}$ とおく。すると f は 位数 m の中心的な群的元となり、 $C_{st}\cdot f=C_{s't}$, ここで $s'=2^n+\frac{m-1}{2} \leqq N-1$。そのような s、s'、t に対して ：

$$\begin{aligned}
(2s'+t,\ N) &= (2\{2^n+\frac{m-1}{2}\}+1,\ 2^n m) \\
&= (2^{n+1}+m,\ 2^n m) \\
&= 1。
\end{aligned}$$

だから ii) によって、単純部分余代数 $C_{st}\cdot f=C_{s't}$ は $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ を、代数的に、生成する。ゆえに ホップ代数として

$$A_{2^n m,L}^{(\nu\lambda)} \simeq A_{2^n,L}^{(\nu\lambda)} \otimes kC_m。$$

iv) $2^n=N$ とする。 補題 3.5 を $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ に適用すると、 ある C_{st} と、アーベル群 $G(A_{NL}^{(\nu\lambda)})$ の部分群 F に対して、

$$A_{NL}^{(\nu\lambda)} = <C_{st}> \otimes kF$$

と 分解すると仮定してかまわない。

$A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ が非可換だから、 $<C_{st}>$ もそうである。 これは t が奇数であることを示している。 定理によって、 $<C_{st}>\simeq A_{N_0L_0}^{(\nu\lambda)}$。

次元を比べて $|F|=m_N m_L$ を得る。 4 次元の単純部分余代数の数を数えると：

$$\begin{aligned}
N(L-1) &= N_0(L_0-1)\cdot|F| \\
&= N_0(L_0-1)m_N m_L \\
&= N(L-m_L)。
\end{aligned}$$

だから $m_L = 1$。一方、$2s+t$ が奇数で N が 2 の冪だから、$m_N = 1$ である。

よって $F =< 1 >$ を得る。 □

次に $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ のすべての braidings を決めてみよう。一般に braidings を決めることは容易ではない ([G1],[G2]) が、この場合は構成法からいって簡単である。

C を $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の部分余代数とみていた。すると $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の braiding は C 上で決まってしまうことになる。

定理 3.7. i) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ 上の braidings の集合は C 上 次の様に与えられる：

$L \geqq 3$ である時：$Q_{NL}^{(\nu\lambda)}$,

$L = 2$ である時：$Q_{NL}^{(\nu\lambda)} \cup \{\tau_{\gamma\delta}^{(\lambda)} \mid \gamma^2 = \delta^2,\ \gamma^{2N} = 1\}$,

ここで $\tau_{\gamma\delta}^{(\lambda)}$ は C 上の YB-形式で、次の様なもの：

$\tau_{\gamma\delta}^{(\lambda)}$	X_{11}	X_{22}
X_{11}	γ	δ
X_{22}	$\lambda\delta$	γ

, その他 $= 0$.

ii) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ は 実際 braided ホップ代数である。もし $\mathrm{ch}k \nmid 2NL$ であれば、$A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ 上の braidings の数は：

$$\begin{cases} 2NL, & L \geqq 3 \text{ の時}, \\ 8N, & L = 2 \text{ の時}。\end{cases}$$

iii) 対称な braidings の数は：

$L \geqq 3$ のとき

N	L	$(\nu,\ \lambda)$	$\tilde{\sigma}$
奇	奇	$(\pm1, \pm1)$	2
		$(\pm1, \mp1)$	0
奇	遇	$(\nu, +1)$	2
		$(\nu, -1)$	0
遇	奇	$(+1, \lambda)$	2
		$(-1, \lambda)$	0
遇	遇	$(+1, +1)$	4
		その他	0 。

$L = 2$ のとき

N	$(\nu,\ \lambda)$	$\tilde{\sigma}$	$\tilde{\tau}^{(\lambda)}$
奇	$(\nu, +1)$	2	4
	$(\nu, -1)$	0	0
遇	$(+1, +1)$	4	4
	$(+1, -1)$	0	0
	$(-1, +1)$	0	4
	$(-1, -1)$	0	0 。

[証明] i) 命題1.2、2.1より $Q_{NL}^{(\nu\lambda)}$ の元は $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ 上に拡張できることがわかる。C^2 の基底との関係をみると、 $L \geqq 3$ のときは他に **braiding** はないことがわかる。また、$L=2$ のときには、 命題1.6が使えて タウ型のものも **braiding** に拡張できることがわかる。 同様に C^2 の基底との関係をみると、**braidings** は それらで すべてつくされることがわかる。

ii) 次の様な全射がある：

$$\{(p,\ q)\in k\times k \mid p^{2N}=\nu, q^{2L}=\lambda\}\to\{(\alpha,\ \beta)\in k\times k \mid (\alpha\beta)^N=\nu,(\alpha\beta^{-1})^L=\lambda\},$$

$$(p,\ q)\mapsto(pq,pq^{-1}).$$

$(p,\ q)\sim(p',\ q')\Leftrightarrow(p,\ q)=\pm(p',\ q')$ とおくと 同値関係であり、次の全単射を引き起こす：

$$\{(p,\ q)\mid p^{2N}=\nu,q^{2L}=\lambda\}/\sim\quad\approx\quad\{(\alpha,\ \beta)\mid(\alpha\beta)^N=\nu,(\alpha\beta^{-1})^L=\lambda)\}.$$

もし $chk \nmid 2NL$ であれば $|Q_{NL}^{(\nu\lambda)}|=2N{\cdot}2L{\cdot}\frac{1}{2}=2NL$。$\tau_{\gamma\delta}^{(\lambda)}$ に関しては、$\gamma^{2N}=1$ かつ $\delta^2=\gamma^2$ だから、$|\{\tau^{(\lambda)}\ |\gamma^2=\delta^2,\gamma^{2N}=1\}|=2N\cdot 2=4N$ が従う。

iii) $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ 上、$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ が対称 $\Leftrightarrow \alpha^2=1=\beta^2$、そして $(\alpha\beta)^N=\nu$、$(\alpha\beta^{-1})^L=\lambda$。
$A_{N2}^{(\nu\lambda)}$ 上 $\tilde{\tau}_{\gamma\delta}^{(\lambda)}$ が対称 $\Leftrightarrow \gamma^2=1,\delta^2=\lambda$、そして $\gamma^{2N}=1,\delta^2=\gamma^2$。 □

[注] もし $\mathrm{ch}k\nmid 2NL$ のとき、$A_{NL}^{(\nu_i\lambda_i)}$, $i=1,2,$ 上の **braidings** の数は同じであるが、対称なものの有無が L,N の奇偶と、符号によって違うことをみてとることができる。

[注] $\theta:A_{NL}^{(\nu\lambda)}\to A_{NL}^{(\nu\lambda)cop}$, $x_{ij}\mapsto x_{ji}$, として与えられる ホップ代数の同型がある。$<a,\ b>_{\alpha\beta}=\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta(a),\ b)$ とすると、その 双線形写像 $<-,->_{\alpha\beta}$: $A_{NL}^{(\nu\lambda)}\otimes A_{NL}^{(\nu\lambda)}\to k$ は ホップ ペアリング をあたえる。

最後に、YB-形式の集合 $Q_{NL}^{(\nu\lambda)}$ と ホップ代数 $A_{NL}^{(\nu\lambda)}$ とのある関係について、 いくつか具体的にみてみよう。

[例] $Q_{12}^{(+-)}=\{\sigma_{\alpha\beta}\mid\alpha^4=-1,\beta=\alpha^{-1}\}$。このとき $A_{12}^{(+-)}$ は唯一つの自明でない8次元半単純ホップ代数をあらわしていた。先に与えたイデアル分解をつかうと、どの $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ も $A_{12}^{(+-)}$ 上 非退化であることがわかる。

つまり $A_{12}^{(+-)}$ は1つの YB-形式 $\sigma_{\alpha\beta}$ だけによって 自然にきまるといえる。また ペアリング $<-,->_{\alpha\beta}$ によっても $A_{12}^{(+-)}$ は self-dual であることがわかる (c.f. [Mas2])。

一般に、$\tau_{\gamma\delta}^{(\lambda)}$ は $A_{N2}^{(\nu\lambda)}$ 上 退化する。

［例］ $Q_{13}^{(+\lambda)} = \{\sigma_{\alpha\beta} \mid \alpha^6 = \lambda, \beta = \alpha^{-1}\}$。基礎体 k の標数を3でないとする。このとき $A_{13}^{(+\lambda)}$ は 12 次元の半単純ホップ代数をあらわしていた。$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ が $A_{13}^{(+\lambda)}$ 上非退化 $\Leftrightarrow \alpha^2 \neq \lambda \Leftrightarrow \alpha^2 = \lambda\omega$, ここで ω は 1 の原始3乗根, となることは、イデアル分解をつかって計算するとわかる。

この場合も ある YB-形式 $\sigma_{\alpha\beta}$ が $A_{13}^{(+\lambda)}$ を決めるといえる。同様に、あるペアリング $<-,->_{\alpha\beta}$ によっても $A_{13}^{(+\lambda)}$ は self-dual であることがわかる (c.f. [F])。

［例］ $A_{14}^{(++)}$ の極小イデアル分解は具体的に以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
A_{14}^{(++)} = & \\
& k(x_{11}^2 + x_{11})(x_{11}^2 + x_{11}x_{22} + (x_{11}x_{22})^2 + (x_{11}x_{22})^3) && (= \langle ++ \rangle_0) \\
& + k(x_{11}^2 - x_{11})(x_{11}^2 + x_{11}x_{22} + (x_{11}x_{22})^2 + (x_{11}x_{22})^3) && (= \langle -- \rangle_0) \\
& + k(x_{11}^2 + x_{11})(x_{11}^2 - x_{11}x_{22} + (x_{11}x_{22})^2 - (x_{11}x_{22})^3) && (= \langle +- \rangle_0) \\
& + k(x_{11}^2 - x_{11})(x_{11}^2 - x_{11}x_{22} + (x_{11}x_{22})^2 - (x_{11}x_{22})^3) && (= \langle -+ \rangle_0) \\
& + < x_{11}^2 - (x_{11}x_{22})^2 > && (= \mathfrak{A}_0) \\
& + k(x_{12}^2 + x_{12})(x_{12}^2 + x_{12}x_{21} + (x_{12}x_{21})^2 + (x_{12}x_{21})^3) && (= \langle ++ \rangle_1) \\
& + k(x_{12}^2 - x_{12})(x_{12}^2 + x_{12}x_{21} + (x_{12}x_{21})^2 + (x_{12}x_{21})^3) && (= \langle -- \rangle_1) \\
& + k(x_{12}^2 + x_{12})(x_{12}^2 - x_{12}x_{21} + (x_{12}x_{21})^2 - (x_{12}x_{21})^3) && (= \langle +- \rangle_1) \\
& + k(x_{12}^2 - x_{12})(x_{12}^2 - x_{12}x_{21} + (x_{12}x_{21})^2 - (x_{12}x_{21})^3) && (= \langle -+ \rangle_1) \\
& + < x_{12}^2 - (x_{12}x_{21})^2 > && (= \mathfrak{A}_1).
\end{aligned}
$$

$Q_{14}^{(++)} = \{\sigma_{\alpha\beta} \mid \alpha^8 = 1, \beta = \alpha^{-1}\}$ である。すべての $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$ は退化しなければなら

ない。具体的にみてみよう。

$$
\begin{aligned}
Q_{14}^{(++)} =&\{\sigma_{\alpha\beta} \mid \alpha^2 = 1, \beta = \alpha^{-1}\} \cup \{\sigma_{\alpha\beta} \mid \alpha^2 = -1, \beta = \alpha^{-1}\} \\
&\cup \{\sigma_{\alpha\beta} \mid \alpha^4 = -1, \beta = \alpha^{-1}\} \\
=&Q_{(1)} \cup Q_{(2)} \cup Q_{(3)}
\end{aligned}
$$

とする。すると $A_{14}^{(++)}$ 上、

$\tilde{\sigma}$ の左右の根基は一致して、次からなる：

$\langle+-\rangle_0, \langle-+\rangle_0, \mathfrak{A}_0, \langle+-\rangle_1, \langle-+\rangle_1, \mathfrak{A}_1,$ もし $\sigma \in Q_{(1)}$；

$\langle+-\rangle_0, \langle-+\rangle_0, \mathfrak{A}_0, \langle++\rangle_1, \langle--\rangle_1, \mathfrak{A}_1,$ もし $\sigma \in Q_{(2)}$；

$\mathfrak{A}_0, \langle++\rangle_1, \langle--\rangle_1, \langle+-\rangle_1, \langle-+\rangle_1,$ もし $\sigma \in Q_{(3)}$、

ことがわかる。よくみると $A_{14}^{(++)}$ の商双代数でこれらすべての braidings を受け継ぐものはないことがわかる。つまり $A_{14}^{(++)}$ も YB-形式、この場合は複数、によって決まるといえるのである。

参考文献

[D] Y. Doi, Braided bialgebras and quadratic bialgebras, Comm. Algebra, Vol. 21(5), 1731-1749, (1993).

[F] N. Fukuda, Semisimple Hopf algebras of dimension 12, toappear.

[FRT] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin and L. A. Takhtajan, Quantization of Lie groups and Lie algebras, LOMI preprint, E-14-87, Leningrad, (1987).

[G1] S. Gelaki, On the quasitriangularity of $U_q(sl_n)'$, toappear.

[G2] —, Quantum groups of dimension pq^2, toappear.

[H] T. Hayashi, Quantum groups and quantum determinants, J. Algebra, Vol. 152, 146–165, (1992).

[LT] R. G. Larson and J. Towber, Two dual classes of bialgebras related to the concepts of “quantum group” and “quantum Lie algebra”, Comm. Algebra, Vol. 19, 3295–3345, (1991).

[Mas1] A. Masuoka, Coideal subalgebras in finite Hopf algebras, J. Algebra, Vol. 163, 819–831, (1994).

[Mas2] —, Semisimple Hopf algebras of dimension 6,8, Israel J. Math., Vol. 92, 361–373, (1995).

[M] S. Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings, American Mathematical Society, Prividence, (1993).

[S] S. Suzuki, A family of braided cosemisimple Hopf algebras of finite dimension, toappear.

[Sw] M. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin,New York, (1969).