

非調和振動子の固有値の摂動級数について

京大数理研 小池達也 (KOIKE, Tatsuya)

1 序

場の量子論において基本的な Green 関数や S 行列は (特別な model を除き) 一般には閉じた形では書き下せないため Feynman による摂動展開を用いてその解析を行なうことは有効な approach である. しかし, 既に理論形成の極く初期に Dyson [D] が確かめているように, その展開は一般的には発散級数である. これが Feynman の摂動展開が厳密な解析の対象となり難い大きな理由であった. このような状況に一つの break through をもたらしたのが非調和振動子の固有値に関する Bender-Wu の仕事 [BW2] である. そこで彼等は, 非調和振動子が $(\phi^4)_1$ -model を与えるということを念頭に固有値の摂動級数を詳しく調べ (下記の (I)), また, 併せてそれが Borel 総和可能な級数であろう, と示唆したのである. さらに, これに続いて Banks-Bender [BB] は演算子の ordering の変更が摂動級数の係数にどのような影響を与えるかを調べることを念頭に以下の結果 (II) を得た.

(I) 次の固有値問題を考える.

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2(1 + \lambda x^{2N})\right)\psi = E\psi, \tag{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0. \tag{2}$$

ただし, $\lambda > 0$, $N = 1, 2, \dots$ である. この固有値の摂動級数は, $\lambda = 0$ の時方程式 (1) が調和振動子で, 従って固有値が半整数であることに注意すると, $K = 0, 1, 2, \dots$ として次のように構成できる.

$$E^K = K + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^K \lambda^n.$$

この時係数 A_n^K の漸近的振舞いは次のようになる.

$$A_n^K = \frac{(-1)^{n+1} N}{K! \sqrt{2\pi^3}} 4^{(K+\frac{1}{2})/N} \left(\frac{B(\frac{3}{2}, \frac{1}{N})}{2N}\right)^{-K-\frac{1}{2}-nN} \Gamma(K + \frac{1}{2} + nN) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (n \rightarrow \infty). \tag{3}$$

ここで $B(x, y)$ は Beta 関数, $\Gamma(x)$ は Gamma 関数である.

(II) 上の方程式でポテンシャルを

$$\frac{1}{4}x^2 \left(1 + \lambda(x^{2N} + a_1 x^{2(N-1)} + \dots + a_N)\right) \tag{4}$$

に取り替えて同様に摂動級数を構成した時 (係数を B_n^K とする),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n^K}{A_n^K} = e^{a_1/2N}. \tag{5}$$

これらはいずれも興味深い結果であり、また、議論も物理的直観に裏付けられた説得力のあるものではあるが数学的に十分安心できる議論とはいえない(付録参照)。その曖昧さの原因はWKB解析における接続公式の意味がすっきりしていないことにあると思われるが、幸い最近いわゆる exact WKB 解析が著しく進歩して全ての議論を数学的に疑義なく、しかも、計算的にもすっきりした形にまとめることが可能となってきた。本論文の目的はそのように新しい立場から上述の結果(I),(II)を見返し、(exact WKB 解析に基づく)厳密かつ簡明な別証明をあたえることである。

以下の構成は次の通り。まず第2節で $E^K(\lambda)$ の解析的な性質について述べ議論の1つの鍵になっている dispersion relation を示す。この関係式により問題は結合定数 λ が small negative である時の固有値の振舞いを調べることに帰着される。この事実に着目して第3節はこの固有値問題を考える準備とし、WKB 解を構成し接続公式について述べる。第4節においては、第3節の結果を用いて secular equation を導出し第5節で上記(I)を示す。第6節で(II)の問題を考察する。付録では比較のため Bender-Wu の議論についてまとめた。

2 $E^K(\lambda)$ の解析性について

この節から第5節までは(I)の問題のみを考えるとし、非調和振動子といえ(1)を指すものとする。

非調和振動子の固有値は $\lambda > 0$ において解析的なので複素平面に解析接続することができる。その解析的な性質の考察はやはり Bender-Wu に始まり [BW1], 現在に至るまで様々な研究がなされている(例えば [DP])。次の定理は B.Simon [S] によって示されたものである。

定理 2.1([S, Theorem III.1])

(i) $E^K(\lambda)$ は $\lambda = \infty$ に $(N+2)$ 位の branch point を持つ。

(ii) $E^K(\lambda)$ の特異点について次が成り立つ (cut は λ -plane の負軸 $\{\lambda \leq 0\}$ に引く)。

(a) 原点は特異点の集積点である。

(b) 1st sheet には特異点はない。

(c) $0 < \theta < \frac{N+2}{2}\pi$ を満たす任意の θ に対して、 $R > 0$ が存在して、 $E^K(\lambda)$ は領域 $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > R, |\arg \lambda| < \theta\}$ において解析的であり、かつ、

$$E^K(\lambda) = O(|\lambda|^{\frac{1}{N+2}}) \quad (\lambda \rightarrow \infty, |\arg \lambda| < \theta).$$

(iii) $0 < \theta < \frac{N+2}{2}\pi$ を満たす任意の θ に対して一様に

$$E^K(\lambda) \sim K + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^K \lambda^n, \quad (\lambda \rightarrow 0, |\arg \lambda| < \theta).$$

定理 2.1を用いることで次の公式が示せる。

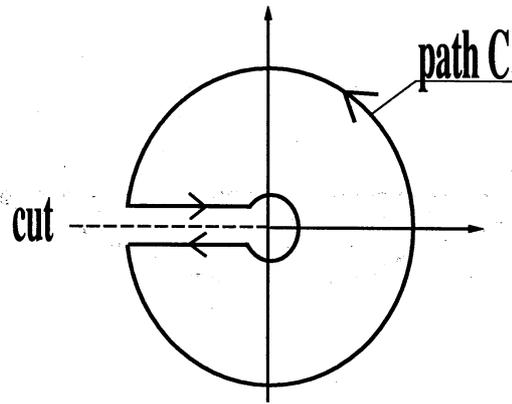


図 1: λ -plane における積分路 C .

系 2.2(dispersion relation, [BW2])

$$A_n^K = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta E^K(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda, \quad (6)$$

$$\text{ここで } \Delta E^K(\lambda) = E^K(\lambda + i0) - E^K(\lambda - i0).$$

証明.

まず, $\lambda \rightarrow \infty$ の時, 定理 2.1(ii)(c) より, $\Delta E^K(\lambda) = O(\lambda^{1/(N+2)})$ が成り立つ. 次に $\lambda \rightarrow 0$ の時は定理 2.1(iii) が使えて, 任意の $m = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $\Delta E^K(\lambda) = O(\lambda^m)$ が成り立っている. さて $\tilde{E}^K(\lambda) = E^K(\lambda) - K - \frac{1}{2}$ とおく. $\tilde{E}^K(\lambda)/\lambda$ に対して, 積分路 C (図 1) に沿って Cauchy の積分公式を使えば

$$\frac{\tilde{E}^K(t)}{t} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\tilde{E}^K(\lambda)}{\lambda(\lambda-t)} d\lambda$$

を得る. 積分路 C の外側の円の半径を無限大に, 内側の円を 0 にする極限をとると

$$\tilde{E}^K(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta \tilde{E}^K(\lambda)}{\lambda} \frac{t}{\lambda-t} d\lambda$$

となる. 今,

$$a_n^K = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta E^K(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \tilde{E}^K(t) - \sum_{j=1}^{n_0} a_j^K t^j &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta E^K(\lambda)}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda-t} - \sum_{j=1}^{n_0} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^j \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta E^K(\lambda)}{\lambda-t} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{n_0+1} d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\Delta E^K(\lambda)}{\lambda-t} \frac{d\lambda}{\lambda^{n_0+1}} \right) t^{n_0+1}. \end{aligned}$$

この結果と, 定理 2.1(iii) より, この dispersion relation が示されることがわかる. \square

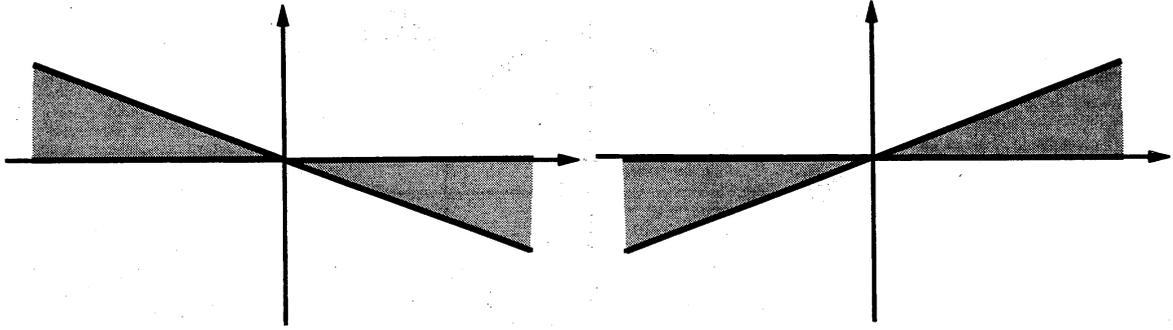


図 2: x -plane における角領域 $\Sigma_{\pm}(\theta)$. 左が $\theta = \pi$ の時で, 右は $\theta = -\pi$ の時の図. それぞれの図において $\operatorname{Re} x > 0$ にある角領域が Σ_{+} である.

注意 2.3 証明からわかるように式 (6) での積分路は定理 2.1 における cut に沿っており, cut は $\mathbf{R}_{\geq 0} e^{(\pi+\epsilon)i}$ ($\epsilon > 0$ は十分小) としてもいいから, 積分路も $\mathbf{R}_{\geq 0} e^{(\pi+\epsilon)i}$ としてかまわない. 後に dispersion relation はこうして使う.

注意 2.4 n が非常に大きい時, 被積分関数の中の λ^{-n-1} という因子のため, λ が小さいところが積分に大きく寄与する. 従って λ が small negative な時の $\Delta E^K(\lambda)$ の振舞いを求めることにする (補題 5.1 参照).

さて, 複素数 $\lambda \in \mathbf{C}$ に対する $\Delta E^K(\lambda)$ を求めるために次の命題を用いる.

命題 2.5

$\lambda \in \mathbf{C}$ に対して, $E^K(\lambda)$ は次の境界条件 (7) のもとでの方程式 (1) の固有値である ($\theta = \arg \lambda$ とおく).

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \Sigma_{\pm}(\theta)}} \psi(x) = 0, \quad \text{ここで } \Sigma_{\pm}(\theta) = \left\{ x \in \mathbf{C}; \left| \arg(\pm x) + \frac{\theta}{2(N+2)} \right| < \frac{\pi}{2(N+2)} \right\}. \quad (7)$$

証明.

$\lambda > 0$ の時, 解が

$$\psi(x) \sim \exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{2(N+2)} x^{N+2}\right), \quad (x \rightarrow \infty)$$

という漸近形をもっているので,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$$

は x -平面における角領域

$$\operatorname{Re}(\sqrt{\lambda} x^{N+2}) > 0$$

において成り立っている. これは, $\Sigma_{\pm}(\theta)|_{\theta=0}$ に他ならない. これを $\theta \neq 0$ に動かせばいい. \square

特に $\theta = \pi, -\pi$ の時, 角領域 $\Sigma_{\pm}(\theta)$ は図 2 のようになる.

3 非調和振動子の WKB 解析

前節で得られた dispersion relation から境界条件 (7) のもとでの方程式 (1) の固有値を $\lambda < 0$, $\lambda \rightarrow 0$ で考えればよいことがわかった. 従ってこれからは λ は small parameter として取り扱う.

3.1 非調和振動子の WKB 解

非調和振動子に対する WKB 解を構成するために次の scaling をする.

$$\begin{aligned}\lambda &\longrightarrow \eta^{-N} e^{i\theta} \quad (\theta = \arg \lambda), \\ x &\longrightarrow \sqrt{\eta} x.\end{aligned}$$

λ が small parameter なので η は large parameter になっている. この時方程式 (1) は

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 (Q_0(x) - \eta^{-1} E) \right) \psi = 0 \quad (8)$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{4} x^2 (1 + e^{i\theta} x^{2N})$$

となる. この形にしてから WKB 解析を行う.

WKB 解は通常通りに作る. 最初に未知関数を

$$\psi(x) = \exp \int^x S dx \quad (9)$$

と変換し, 得られた方程式

$$S^2 + \frac{dS}{dx} = \eta^2 (Q_0(x) - \eta^{-1} E)$$

において S を η について

$$S = \eta S_{-1} + S_0 + \eta^{-1} S_1 + \dots$$

と展開する. すると各 S_j は次を満たす:

$$S_{-1}^2 = Q_0(x), \quad (10)$$

$$2S_0 S_{-1} + \frac{d}{dx} S_{-1} = -E, \quad (11)$$

$$2S_{j+1} S_{-1} + \sum_{i=0}^j S_i S_{j-i} + \frac{d}{dx} S_j = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

漸化式 (11), (12) は S_{-1} が決まれば一意的に他の S_j ($j \geq 0$) を決定し, さらに S_{-1} は二つの解

$$S_{-1} = \pm \sqrt{Q_0(x)}$$

を持つ. 従って S には二つの (形式) 解 S_{\pm} がある. 具体的に書くと

$$S_{\pm} = \pm \eta \sqrt{Q_0(x)} + \left(\mp \frac{E}{2\sqrt{Q_0(x)}} - \frac{Q_0'(x)}{2Q_0(x)} \right) + O(\eta^{-1}) \quad (13)$$

となる. $\sqrt{Q_0(x)}$ に関しては cut を $\{Q_0(x) \text{ の } 1 \text{ 位の零点}\}$ から無限遠に図 3 のようにいれ (図は $N = 1$ の時), 分枝は主値 (原点付近で $\sqrt{Q_0(x)} = x/2 + (\text{高次の項})$) になるように決める.

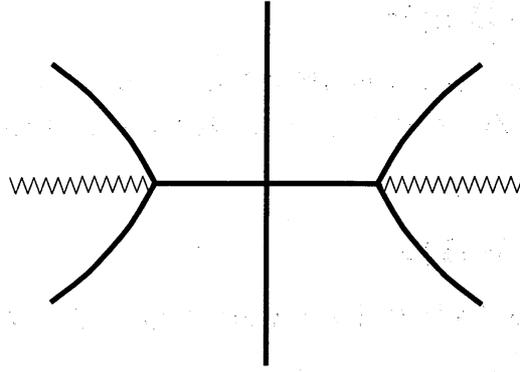


図 3: 折れ線が $N = 1$ の時の $Q_0(x)$ の cut, 実線は Stokes curve である (定義 3.4).

定義 3.1

$$S_{\text{odd}} := \frac{1}{2}(S_+ - S_-),$$

$$S_{\text{even}} := \frac{1}{2}(S_+ + S_-).$$

式 (13) より,

$$S_{\text{odd}} = \sum_{j=-1}^{\infty} S_{\text{odd},j} \eta^{-j} = \eta \sqrt{Q_0(x)} - \frac{E}{2\sqrt{Q_0(x)}} + O(\eta^{-1}), \quad (14)$$

$$S_{\text{even}} = -\frac{Q_0'(x)}{2Q_0(x)} + O(\eta^{-1}), \quad (15)$$

となる. この様な定義を導入した目的は次の補題によりわかる.

補題 3.2

$$S_{\text{even}} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log S_{\text{odd}}.$$

証明.

S_{\pm} は

$$S_{\pm}^2 + \frac{dS_{\pm}}{dx} = \eta^2 (Q_0(x) - \eta^{-1}E)$$

を満たすから

$$2S_{\text{odd}}S_{\text{even}} + \frac{d}{dx} S_{\text{odd}} = 0$$

を得る. これより補題が示される. \square

定数を除いて WKB 解は

$$\psi_{\pm} = \exp\left(\int^x S_{\pm} dx\right)$$

となるが, 補題 3.2 を使うと

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int^x S_{\text{odd}} dx\right)$$

となる.

定義 3.3(WKB 解の normalization) 非調和振動子の WKB 解 ψ_{\pm} の normalization を次の様に定める.

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \eta \int_0^x \sqrt{Q_0(x)} dx\right) \exp\left(\pm \int_{\infty}^x (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx\right). \quad (16)$$

(注意: $S_{-1} = S_{\text{odd}, -1} = \sqrt{Q_0(x)}$)

\exp の中の各項が可積分であるようにこの normalization を選んだ ($S_{\text{odd}, -1}$ は原点から可積分で, $S_{\text{odd}, j}$ ($j \geq 0$) は ∞ から可積分である).

3.2 WKB 解の接続公式

この節で WKB 解の接続公式について述べる.

定義 3.4(turning point, Stokes curve, [V:4, 5 節])

(i) $Q_0(x)$ の零点のことを turning point と呼ぶ. 単純な (resp. 2位の) 零点に対する turning point を simple (resp. double) turning point と呼ぶ.

(ii) 次で定義される複素平面内の実 1 次曲線のことを Stokes curve と呼ぶ.

$$\text{Im} \int_a^x \sqrt{Q_0(x)} dx = 0 \quad (a \text{ は turning point}).$$

すぐわかるように simple turning point からは 3 本の, double turning point からは 4 本の Stokes curve が出ている. 今考えている非調和振動子の場合 turning point は

$$\begin{cases} \text{double} & : x = 0 \\ \text{simple} & : x = \exp\left(i \frac{(2k+1)\pi - \theta}{2N}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 2N-1) \end{cases}$$

となっている (図 5, 6, 7 参照).

定義 3.5([V: 4 節]) L を turning point a から出ている Stokes curve とする.

WKB 解 ψ_{\pm} が L で dominant であるとは L 上 $\pm \text{Re} \int_a^x \sqrt{Q_0(x)} dx > 0$ が成り立っている時のことをいう. また subdominant であるとは $\pm \text{Re} \int_a^x \sqrt{Q_0(x)} dx < 0$ が成り立っている時のことをいう.

ただし, 複号は同順であり, 積分路は L に沿うものとする.

形式的に構成された WKB 解は η に関して Borel 和をとることで意味付けする ([V]). 但し,

$$\psi_{\pm} = \exp\left(\pm \eta \int_0^x \sqrt{Q_0(x)} dx\right) \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\pm, j}(x) \eta^{-j-1/2}$$

の形で展開された WKB 解に対する Borel 和は定義より次のようになる (形式解とその Borel 和は同じ記号を用いる).

$$\psi_{\pm} := \int_{\mp \int_0^x \sqrt{Q_0} dx}^{\infty} \psi_{\pm, B}(x, y) e^{-\eta y} dy$$

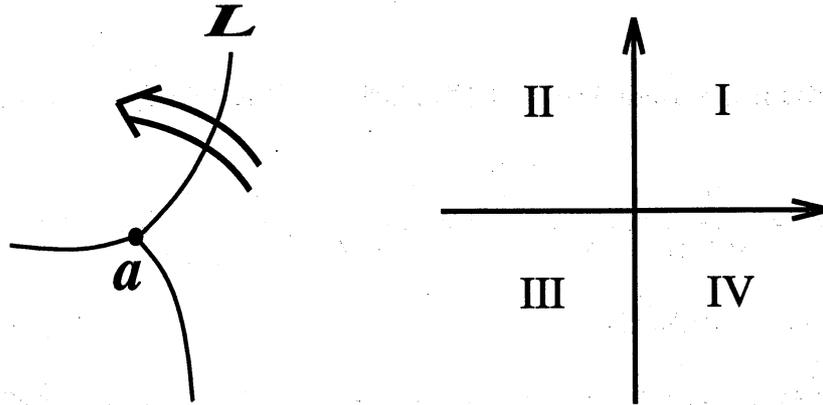


図 4: (左) simple turning point の近傍, (右) 領域 I, II, III, IV.

ここで,

$$\psi_{\pm, B}(x, y) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm, j}(x)}{\Gamma(j + 1/2)} \left(y \pm \int_0^x \sqrt{Q_0(x)} dx \right)^{j-1/2}$$

であり, 積分路は実軸に平行に取る. もちろん ($\psi_{\pm, j}(x)$ は x を含んでいるから) Borel 和が確定するかどうかは x に依存するが, これに関して以下で述べる接続公式が成り立つ.

以下では turning point を結ぶ Stokes curve はないものと仮定する.

定理 3.6([V: 5 節])

複素平面から Stokes curve を除いた各領域で WKB 解の Borel 和は確定する.

定理 3.7(simple turning point に対する接続公式, [V:6 節],[DDP1],[AKT])

Stokes line L が simple turning point a から出ているとする. 点 a を中心にして L を反時計回りに横切る解析接続で WKB 解 $\hat{\psi}_{\pm}$ は次のように振る舞う (図 4 左).

$$\hat{\psi}_{+} \text{ が } L \text{ で dominant な時: } \begin{cases} \hat{\psi}_{+} \rightarrow \hat{\psi}_{+} + i\hat{\psi}_{-} \\ \hat{\psi}_{-} \rightarrow \hat{\psi}_{-} \end{cases}$$

$$\hat{\psi}_{-} \text{ が } L \text{ で dominant な時: } \begin{cases} \hat{\psi}_{+} \rightarrow \hat{\psi}_{+} \\ \hat{\psi}_{-} \rightarrow \hat{\psi}_{-} + i\hat{\psi}_{+} \end{cases}$$

$$\text{ただし, } \hat{\psi}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_a^x S_{\text{odd}} dx\right) \text{ とした.}$$

定理 3.8(double turning point に対する接続公式 [DDP2], [T])

原点から出ている Stokes line を横切る解析接続で WKB 解 ψ_{\pm} は次のように振る舞う (図 4 右).

$$\text{領域 IV} \rightarrow \text{領域 I} : \psi_{+} \rightarrow \psi_{+} + i \frac{C_{-}}{C_{+}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-F + 1/2)} \eta^{-F} \psi_{-}, \quad \psi_{-} \rightarrow \psi_{-}$$

$$\text{領域 I} \rightarrow \text{領域 II} : \psi_- \rightarrow \psi_- + i \frac{C_+}{C_-} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(F+1/2)} e^{-i\pi F} \eta^F \psi_+, \quad \psi_+ \rightarrow \psi_+$$

$$\text{領域 II} \rightarrow \text{領域 III} : \psi_+ \rightarrow \psi_+ + i \frac{C_-}{C_+} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-F+1/2)} e^{2i\pi F} \eta^{-F} \psi_-, \quad \psi_- \rightarrow \psi_-$$

但し,

$$\begin{cases} C_{\pm} = C_{\pm,0} + C_{\pm,1} \eta^{-1} + \dots \\ F = F_0 + F_1 \eta^{-1} + \dots \end{cases}$$

は double turning point における変換の際に決まる定数である ((18), (20) を参照).

注意 3.9 定理 3.7 では $\hat{\psi}$ を使った. ψ に読み替えるには積分路に注意して

$$\psi_{\pm} = \exp\left(\pm \eta \int_0^a \sqrt{Q_0(x)} dx\right) \exp\left(\pm \int_{\infty}^a (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx\right) \hat{\psi}_{\pm}$$

とすればいい. 時計回りに回る時は i を $-i$ に取り替えばいい.

ここでは, [AKT] による「変換の理論」を用いた証明を与える. その際, 鍵になるのが次の補題である.

補題 3.10([AKT])

$$(S) : \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q(x, \eta)\right) \psi = 0, \quad Q(x, \eta) = Q_0(x) + \eta^{-1} Q_1(x) + \dots$$

$$(\tilde{S}) \quad \left(-\frac{d^2}{dy^2} + \eta^2 \tilde{Q}(y, \eta)\right) \tilde{\psi} = 0, \quad \tilde{Q}(y, \eta) = \tilde{Q}_0(y) + \eta^{-1} \tilde{Q}_1(y) + \dots$$

さらに, (S), (\tilde{S}) に対応する Riccati 方程式の解を S_{\pm} , \tilde{S}_{\pm} で表す. この時 η のべき級数

$$y(x, \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^{-j} y_j(x)$$

について以下は同値である.

$$(i) \quad Q(x, \eta) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tilde{Q}(y(x, \eta), \eta) - \frac{1}{2\eta^2} \{y(x, \eta); x\} \quad \text{が成り立つ.}$$

(但し, $\sqrt{Q_0(x)}$ 等の分枝に関して $\sqrt{Q_0(x)} = y'_0 \sqrt{\tilde{Q}_0(y_0(x))}$ が成立していると仮定する.)

$$(ii) \quad S_{\pm}(x, \eta) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tilde{S}_{\pm}(y(x, \eta), \eta) - \frac{1}{2} \frac{y''(x, \eta)}{y'(x, \eta)} \quad \text{が成り立つ.}$$

$$(iii) \quad S_{\text{odd}}(x, \eta) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \tilde{S}_{\text{odd}}(y(x, \eta), \eta) \quad \text{が成り立つ.}$$

そして、この時 x に依らない定数 $C_{\pm}(\eta) = C_{\pm,0} + C_{\pm,1}\eta^{-1} + \dots$ があって、 (S) 及び (\tilde{S}) の WKB 解 ψ_{\pm} , $\tilde{\psi}_{\pm}$ の間に次の関係式が成り立つ:

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = C_{\pm}(\eta) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{-1/2} \tilde{\psi}_{\pm}(y(x, \eta), \eta) \quad (17)$$

ただし、 $\{y; x\}$ は Schwartz 微分である:

$$\{y; x\} = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2.$$

この補題を用いて接続公式は次のように証明される。つまり、まず各 turning point に対して canonical な方程式 (simple turning point に対しては Airy 方程式, double turning point に対しては Weber 方程式) とその WKB 解の接続公式を準備しておく。次に元の方程式を canonical なものに変換することで (つまり、補題 3.10(i) or (ii) or (iii) を満たす $y(x, \eta)$ を構成することで)、それらの WKB 解の間に関係をつけ、それによって元の WKB 解の接続公式を得るのである。

方程式 (8) の double turning point $x = 0$ における変換を考えよう。まず、Weber 方程式 ($F = F_0 + F_1\eta^{-1} + \dots$ は定数)

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \eta^2 \left(\frac{1}{4}y^2 + \eta^{-1}F \right) \right) \tilde{\psi} = 0$$

の WKB 解を次で定義する:

$$\tilde{\psi}(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{S}_{\text{odd}}}} y^{\pm F} \exp(\pm \eta y^2/4) \exp\left(\pm \int_{\infty}^y (\tilde{S}_{\text{odd}} - \eta \tilde{S}_{-1} - F/y) dy\right)$$

$$\tilde{S}_{\text{odd}} = \eta \frac{y}{2} + \frac{F_0}{y} + \eta^{-1} \left(\frac{F_1}{y} - \frac{1}{y^3} \left(F_0^2 + \frac{3}{4} \right) \right) + \dots$$

(但し、 \tilde{S}_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) の満たす方程式 $2\tilde{S}_{-1}\tilde{S}_j + \Sigma(\dots) = F_j + \dots$ と $\tilde{S}_{-1} = y/2$ から $\tilde{S}_{\text{odd},j}$ が F_j/y を含むことがわかり、これは、0 からも、 ∞ からも可積分でないので \exp の外に出した。 $\tilde{S}_{\text{odd}} - \eta \tilde{S}_{-1} - F/y$ は ∞ から可積分であることが帰納法からわかる。)

さて、

$$\begin{cases} Q(x, \eta) = Q_0(x) + \eta^{-1} Q_1(x) + \dots, \\ Q_0(x) = \frac{x^2}{4} + (x \text{ の } 3 \text{ 次以上}) \end{cases}$$

(各 $Q_j(x)$ は $x = 0$ で正則) に対して、

$$Q(x, \eta) = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{1}{4}y^2 + \eta^{-1}F \right) - \frac{1}{2\eta^2} \{y; x\}$$

を満たす $y(x, \eta) = y_0(x) + \eta^{-1}y_1(x) + \dots$ を求める (今考えている (I) の場合は

$$Q_0(x) = \frac{x^2(1-x^{2N})}{4}, \quad Q_1(x) = -E$$

であるが, (II) の場合を考えて少し一般的に議論しておく). 両辺の η に関して 0 次の項を比べると,

$$\frac{y_0^2 y_0'^2}{4} = Q_0(x)$$

となるので,

$$\begin{aligned} y_0 &= \left(4 \int_0^x \sqrt{Q_0(x)} dx \right)^{1/2} \\ &= x + (2 \text{次以上}) : x=0 \text{で正則} \end{aligned}$$

を得る. 次に, 両辺の η に関して -1 次の項を比べると

$$\frac{1}{2} (y_0' y_1' y_0^2 + y_0'^2 y_0 y_1) + y_0'^2 F_0 = Q_1(x)$$

となるから,

$$y_0 y_1 = 2 \int_0^x \frac{Q_1(x) - y_0'^2 F_0}{y_0 y_0'} dx$$

を得る. ここで,

$$\begin{aligned} y_0 y_0' &\sim x + O(x^2) \\ y_0'^2 F_0 - Q_1(x) &\sim F_0 - Q_1(0) + O(x) \end{aligned}$$

であるから, $F_0 = Q_1(0)$ でなければならず, この時 $y_1(x)$ は $x=0$ で正則に定まる (このために定数 F を導入したのである).

さらに, η に関して $-j$ ($j=2, 3, \dots$) 次の項に対しても,

$$\frac{1}{2} (y_0' y_j' y_0^2 + y_0'^2 y_0 y_j) = \frac{1}{2} y_0 y_0' \frac{d}{dx} y_0 y_j = (\text{わかっている関数}) - y_0'^2 F_{j-1}$$

となっていることがわかるので, 各 y_j を求めることができる (そして F_j は順番に決まっていく) (実は [KT] の議論を用いれば

$$F = \text{Res}_{x=0} S_{\text{odd}} \quad (18)$$

を示すことができる).

こうして, 非調和振動子を double turning point において Weber 方程式に変換することができた.

次に

$$Q_0(x) = \frac{x^2(1-x^{2N})}{4}, \quad Q_1(x) = -E, \quad Q_j(x) = 0 \quad (j \geq 2)$$

の場合に $C_{\pm}(\eta)$ と F を η の 0 次まで求める. F は簡単で, 式 (18) から (あるいはそれ以前の議論から),

$$F = -E + O(\eta^{-1}) \quad (19)$$

となる. $C_{\pm}(\eta)$ は (17) の両辺:

$$\begin{aligned} &\exp\left(\pm \eta \int_0^x \sqrt{Q_0(x)} dx\right) \exp\left(\pm \int_{\infty}^x (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1})\right) \\ &= C_{\pm}(\eta) y^{\pm F} \exp(\pm \eta y^2/4) \exp\left(\pm \int_{\infty}^y (\tilde{S}_{\text{odd}} - \eta \tilde{S}_{-1} - F/y) dy\right) \end{aligned} \quad (20)$$

を見比べればよい(ここで補題 3.10 (iii) から従う関係式

$$\frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{S}_{\text{odd}}}}$$

を用いた). 両辺の leading term は,

$$\exp\left(\pm\eta\int_0^x\sqrt{Q_0(x)}dx\right)\exp\left(\pm\int_\infty^x S_{\text{odd},0}dx\right) = C_{\pm,0}y_0^{\pm F_0}\exp\left(\pm(\eta y_0^2/4 + y_0 y_1/2)\right)$$

となるから,

$$\begin{aligned} C_{\pm,0} &= \lim_{x\rightarrow 0}\exp\left(\pm\left(\int_\infty^x S_{\text{odd},0}dx - F_0\log y_0 - \frac{y_0 y_1}{2}\right)\right) \\ &= \lim_{x\rightarrow 0}\exp\left(\pm\left(\int_\infty^x S_{\text{odd},0}dx - F_0\log y_0\right)\right) \\ &= \exp\pm\frac{E}{2N}(\log 4 - i\pi) \end{aligned}$$

を得る ($C_{\pm,0}$ は y_1 には依存しないことに注意). 後は Weber 方程式の接続公式をつかって, 定理 3.8を得る.

Simple turning point の場合も同様にできる. a を (8) の simple turning point として, Airy 方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \eta^2 y\right)\tilde{\psi} = 0$$

への変換は, まず, 両辺の η の 0 次の項を比べると,

$$y_0'^2 y_0 = Q_0(x)$$

となるので,

$$y_0(x) = \left(\frac{3}{2}\int_a^x\sqrt{Q_0(x)}dx\right)^{2/3}$$

を得る. η に関して高次の項は全て,

$$y_0'(2y_0\frac{d}{dx} + y_0')y_j = (\text{与えられた関数})$$

という形をしているので, $y_0'(a) \neq 0$ に注意すれば, 全て解くことができ $x = a$ で正則な関数 $y_j(x)$ を得る. 更に, Airy 方程式の WKB 解を

$$\tilde{\psi}(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{S}_{\text{odd}}}}\exp\pm\int_0^\infty\tilde{S}_{\text{odd}}dy$$

$$\tilde{S}_{\text{odd}} = \eta\sqrt{y} + \dots$$

とした時,

$$\psi_\pm(x, \eta) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1/2}\tilde{\psi}_\pm(y(x, \eta), \eta)$$

が成り立つ. 従って, Airy 方程式の接続公式を用いて定理 3.7を得るのである.

4 Secular equation とその解

この節では前節で構成した WKB 解を用いて, secular equation を導く. この節では固有値 $E^K(\lambda)$ の $\arg \lambda$ に関する依存性だけが問題だから, 簡単のため $E^K(\arg \lambda)$ で今までの $E^K(\lambda)$ を表すことにする.

求めるべきものは λ -plane 内の cut における固有値の境界値の差 $\Delta E^K(\pi) = E^K(\pi - 0) - E^K(-\pi + 0)$ であったので, cut の上下での固有値 $E^K(\pm(\pi - 0))$ の満たす関係式を求める (以下簡単のため $\Sigma_+(\pm(\pi - 0))$ を Σ_+ で, $\Sigma_-(\pm(\pi - 0))$ を Σ_- で表す).

命題 2.5 を用いれば Σ_+ で境界条件を満たす解を解析接続したものが Σ_- でも境界条件を満たすという条件で固有値が決まる. さて, 今の場合 Σ_+, Σ_- で境界条件を満たすのは, $\sqrt{Q_0(x)}$ の分枝の選び方から, そこで subdominant である ψ_- である. 従って ψ_- を Σ_+ から解析接続させたものが Σ_- において

$$K_+(\eta, E)\psi_+ + K_-(\eta, E)\psi_-$$

となる時, secular equation は

$$K_+(\eta, E) = 0$$

となる.

ところで, $\arg \lambda = \pi$ であれば turning point を結ぶ Stokes curve が存在するので, それを避けるために cut を少し回転させて (注意 2.3 参照) そこでの固有値の差を求める. どちらに回してもいいのだが, ここでは下に回すことにして $\epsilon > 0$ を十分小さくにとって cut を $\{\arg \lambda = \pi + \epsilon\}$ とする. 従って求めるものは $E^K(\pm(\pi - 0) + \epsilon)$ の関係式となる.

さて, 解析接続の path と交わってくる Stokes curve の数は N と共に増加していく (図 5, 6, 7 参照). ところが, N が増す毎に現れる Stokes curve 上では ψ_+ は dominant である (従ってその curve を横切る時に ψ_+ の係数は変わらない) ことと, turning point の位置関係を考えると, それらの Stokes curve は secular equation に影響を及ぼさないことがわかる. 今考えている問題に効いてくるのは実軸上の turning point から出ている Stokes curve だけである.

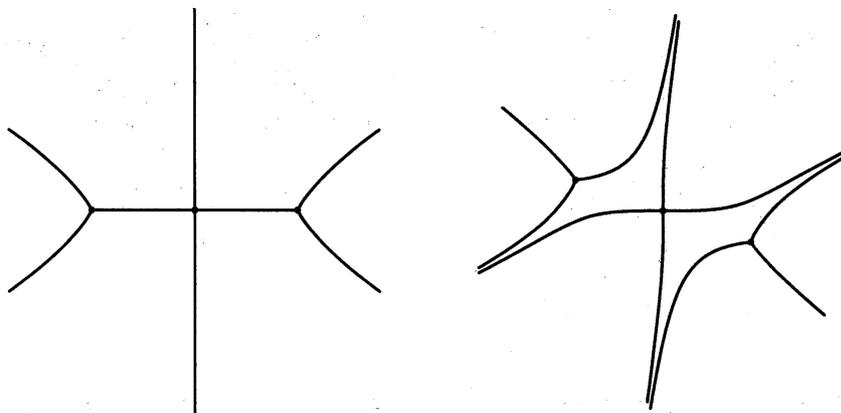


図 5: $N = 1$ の時の Stokes curve. 左: $\theta = \pm\pi$, 右: $\theta = \pm\pi + \epsilon$.

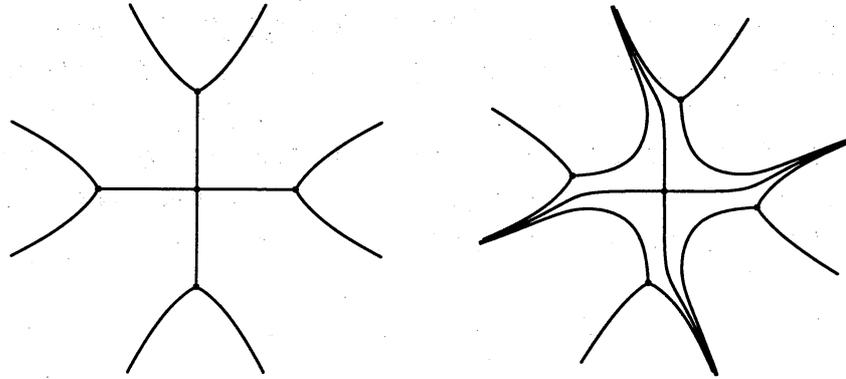


図 6: $N = 2$ の時の Stokes curve. 左: $\theta = \pm\pi$, 右: $\theta = \pm\pi + \epsilon$.

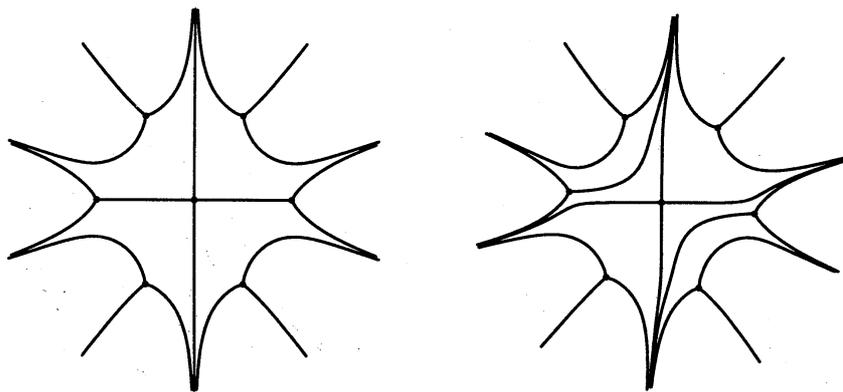


図 7: $N = 3$ の時の Stokes curve. 左: $\theta = \pm\pi$, 右: $\theta = \pm\pi + \epsilon$.

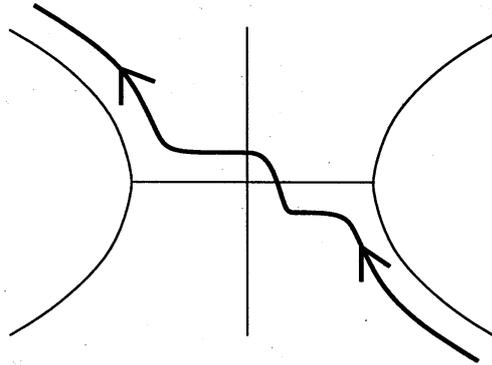


図 8: $\theta = \pi + \epsilon$ の解析接続の経路.

4.1 $\arg \lambda = \pi + \epsilon$ の時の固有値

$\arg \lambda = \pi + \epsilon$ の時の解析接続の path は図 8 の通り (図 2 も参照). 第 3 節で述べた接続公式を用いると,

$$\begin{aligned} K_+(\eta, E) = & i(B_2(\eta, E) \\ & + A_-(\eta, E) - A_+(\eta, E) + B_1(\eta, E)B_2(\eta, E)A_+(\eta, E) \\ & + B_1(\eta, E)A_+(\eta, E)A_-(\eta, E)). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= \exp(-2\eta \int_0^{\pm 1} S_{-1} dx) \exp(-2 \int_{\infty}^{\pm 1} (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx), \\ B_1 &= \frac{C_-}{C_+} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-F + 1/2)} \eta^{-F}, \\ B_2 &= \frac{C_+}{C_-} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(F + 1/2)} e^{-i\pi F} \eta^F. \end{aligned}$$

さて

$$2 \int_0^{\pm 1} S_{-1} dx = \frac{B(\frac{1}{N}, \frac{3}{2})}{2N}$$

が成り立ってるからこの値を ω とおくと, 上の secular equation (21) は $e^{-\eta\omega}$ に関して 0 次, 1 次, 2 次 という形をしているので

$$E = E_0(\eta) + E_1(\eta)e^{-\eta\omega} + E_2(\eta)e^{-2\eta\omega} + \dots,$$

$$E_j(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{j,n} \eta^{-n}$$

という形で解を求める. Secular equation に代入して $e^{-\eta\omega}$ に関して 1 次まで求めれば,

$$B_2(\eta, E_0) = 0, \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial B_2}{\partial E} E_1 + \bar{A}_- - \bar{A}_+ + B_1 B_2 \bar{A}_+ \right) \Big|_{E=E_0} = 0. \quad (22)$$

$$\left(\text{ここで } \bar{A}_\pm = A_\pm e^{\eta\omega} = \exp \left(-2 \int_\infty^{\pm 1} (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx \right) \right).$$

まず, 式(21)は

$$\frac{1}{\Gamma(F + \frac{1}{2})} = 0$$

と同値なので, (19)を用いると,

$$F + \frac{1}{2} = -E_0^K + \frac{1}{2} + O(\eta^{-1}) = -K, \quad (K = 0, 1, 2, \dots),$$

つまり,

$$E_0^K = K + \frac{1}{2} + O(\eta^{-1}), \quad (23)$$

を得る.

次に式(22)を解く. まず,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_2}{\partial E} \Big|_{E=E_0^K} &= \frac{\partial B_2}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial E} \Big|_{E=E_0^K} \\ &= (-1 + O(\eta^{-1})) \left(\frac{C_+}{C_-} \sqrt{2\pi} \eta^F e^{-i\pi F} \frac{\partial}{\partial F} \frac{1}{\Gamma(F + \frac{1}{2})} \right) \Big|_{E=E_0^K} \\ &= -i \frac{C_+}{C_-} \sqrt{2\pi} \eta^{-K-1/2} K! + O(\eta^{-1}) \end{aligned}$$

がわかる. ここで,

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\Gamma(z)} \Big|_{z=-n} = (-1)^n n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を使った. さらに,

$$\begin{aligned} (\bar{A}_- - \bar{A}_+) \Big|_{E=E_0^K} &= \bar{A}_+ (\bar{A}_- \bar{A}_+^{-1} - 1) \Big|_{E=E_0^K} \\ &= \bar{A}_+ (e^{-2\pi i F} - 1) \\ &= -2 \exp \left(i\pi \frac{K + 1/2}{N} \right) + O(\eta^{-1}) \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} \bar{A}_+ &= \exp \left(-2 \int_\infty^1 (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx \right) \\ &= \exp \left(-2 \int_\infty^1 S_0 dx \right) + O(\eta^{-1}) \\ &= e^{iE\pi/N} + O(\eta^{-1}) \end{aligned}$$

であることと, γ を $\bar{A}_- \bar{A}_+^{-1}$ の積分路として

$$\begin{aligned} \bar{A}_- \bar{A}_+^{-1} &= \exp \left(- \int_\gamma (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx \right) \\ &= \exp \left(-2\pi i \operatorname{Res}_{x=0} S_{\text{odd}} \right) \\ &= e^{-2\pi i F} \end{aligned}$$

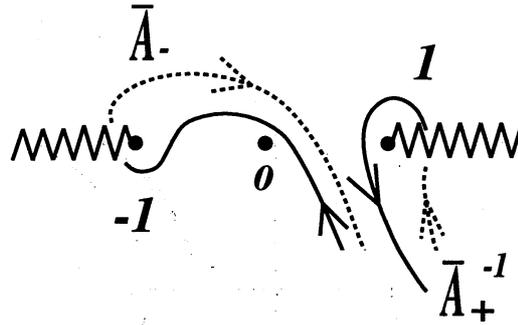


図 9: \bar{A}_+^{-1} と \bar{A}_- の積分路.

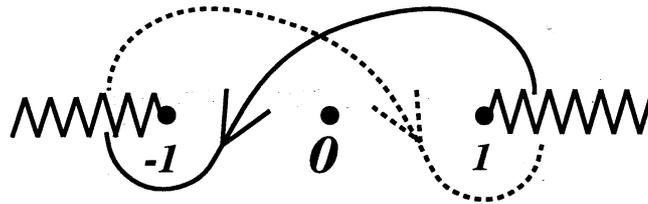


図 10: $\bar{A}_- \bar{A}_+^{-1}$ の積分路 γ .

であることを用いた (図 9, 図 10 参照). また,

$$\begin{aligned} (B_1 B_2)|_{E=E_0^K} &= \frac{2\pi}{\Gamma(F+1/2)\Gamma(-F+1/2)} e^{-i\pi F} \Big|_{E=E_0^K} \\ &= 2 (\cos \pi F) e^{-i\pi F} \Big|_{F=-K-\frac{1}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. これらの式を使って (22) を解くと,

$$E_1^K = \frac{2i}{\sqrt{2\pi K!}} \eta^{K+\frac{1}{2}} 4^{(K+\frac{1}{2})/N} (1 + O(\eta^{-1})),$$

を得る.

4.2 $\arg \lambda = -\pi + \epsilon$ の時の固有値

$\arg \lambda = -\pi + \epsilon$ の時の解析接続の path は図 11 の通り. この時の secular equation は,

$$\frac{1}{\Gamma(F + \frac{1}{2})} = 0 \quad (24)$$

これは (21) と同じで解は

$$E^K = K + \frac{1}{2} + O(\eta^{-1})$$

となる.

5 A_n^K の漸近的振舞い

前節で $\arg \lambda = \pm\pi + \epsilon$ での固有値の形を求めた. それらの差は

$$\Delta E^K = E_1^K e^{-\eta\omega} + \dots$$

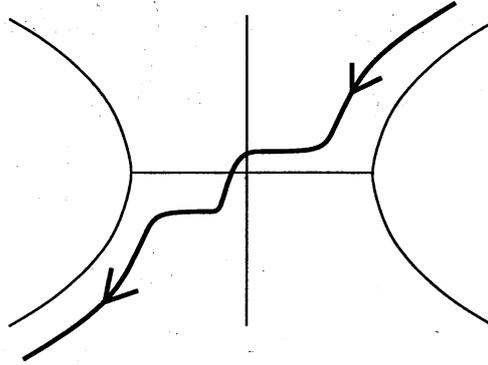


図 11: $\theta = -\pi + \epsilon$ の解析接続の path .

$$E_1^K = \frac{2i}{\sqrt{2\pi K!}} \eta^{K+\frac{1}{2}} 4^{(K+\frac{1}{2})/N} (1 + O(\eta^{-1}))$$

であることがわかった.

補題 5.1 $(0, \infty)$ で連続な関数 $F(\eta)$ が, ある $t_j \in \mathbf{C}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), $p, q \in \mathbf{R}$, $n_0 = 1, 2, \dots$, に対して

$$F(\eta) = \begin{cases} e^{-\eta} \eta^p \left(1 + \sum_{j=1}^{n_0} t_j \eta^{-j} + O(\eta^{-n_0-1}) \right) & (\eta \rightarrow \infty) \\ O(\eta^q) & (\eta \rightarrow 0) \end{cases}$$

を満たすとする. この時 $\alpha > 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ の下で

$$\int_0^\infty F(\eta) \eta^\alpha d\eta = \Gamma(\alpha + p + 1) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n_0} \frac{t_j}{(\alpha + p) \cdots (\alpha + p - j + 1)} + O\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n_0+1}\right) \right\}$$

が成り立つ.

証明.

$F(\eta) \eta^\alpha$ が α が十分大きい時 $(0, \infty)$ で絶対可積分であることは明らか.

仮定より, $\eta_0 > 0$ と $C_1 > 0$ が存在して, $\eta \geq \eta_0$ なる任意の η に対して,

$$\left| F(\eta) - e^{-\eta} \eta^p \left(1 + \sum_{j=1}^{n_0} t_j \eta^{-j} \right) \right| < C_1 \eta^{p-n_0-1} e^{-\eta}$$

が成り立つ. さて

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty F(\eta) \eta^\alpha d\eta - \Gamma(\alpha + p + 1) \left(1 + \sum_{j=1}^{n_0} t_j \frac{1}{(\alpha + p) \cdots (\alpha + p - j + 1)} \right) \\ &= \int_0^\infty \left(F(\eta) - e^{-\eta} \eta^p \left(1 + \sum_{j=1}^{n_0} t_j \eta^{-j} \right) \right) \eta^\alpha d\eta \\ &= I_0 + I_1, \end{aligned}$$

但し

$$\begin{cases} I_0 = \int_0^{\eta_0} \left(F(\eta) - e^{-\eta} \eta^p \left(1 + \sum_{j=1}^{n_0} t_j \eta^{-j} \right) \right) \eta^\alpha d\eta \\ I_1 = \int_{\eta_0}^{\infty} \left(F(\eta) - e^{-\eta} \eta^p \left(1 + \sum_{j=1}^{n_0} t_j \eta^{-j} \right) \right) \eta^\alpha d\eta \end{cases}$$

と置く. α が十分大きい時, ある α によらない定数 C_0 が存在して

$$\begin{aligned} |I_0| &\leq \int_0^{\eta_0} \left| F(\eta) - e^{-\eta} \eta^p \left(1 + \sum_{j=1}^{n_0} t_j \eta^{-j} \right) \right| \eta^\alpha d\eta \\ &= C_0 \eta_0^{\alpha+p-n_0} \end{aligned}$$

が成り立ち, また

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C_1 \int_{\eta_0}^{\infty} \left(\eta^{p-n_0-1} e^{-\eta} \right) \eta^\alpha d\eta \\ &\leq C_1 \int_0^{\infty} \eta^{\alpha+p-n_0-1} e^{-\eta} d\eta \\ &= C_1 \Gamma(\alpha+p-n_0) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, ある定数 C , α_0 が存在して, $\alpha > \alpha_0$ に対して,

$$\frac{|I|}{\Gamma(\alpha+p+1)} \leq C_0 \frac{\eta_0^{\alpha+p-n_0}}{\Gamma(\alpha+p+1)} + C_1 \frac{\Gamma(\alpha+p-n_0)}{\Gamma(\alpha+p+1)} \leq C \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n_0+1}$$

これで補題が示された. \square

従って求めたいものは (6) に代入することで得られて,

$$A_n^K = \frac{(-1)^{n+1} N}{K! \sqrt{2\pi^3}} 4^{(K+\frac{1}{2})/N} \omega^{-K-\frac{1}{2}-nN} \Gamma(K + \frac{1}{2} + nN) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

($n \rightarrow \infty$).

となることがわかる. これが最初に述べた結果 (I) である.

6 ポテンシャルの regular perturbation

さてこの節では (II) の問題を考える.

固有値の解析的な性質は変わらず ([S]), 従って dispersion relation (6) は (A_n^K を B_n^K に取り替えて) そのまま正しい. 命題 2.5 も変更はない.

3 節で導入したのと同じ scaling

$$\begin{aligned} \lambda &\longrightarrow \eta^{-N} e^{i\theta} \quad (\theta = \arg \lambda), \\ x &\longrightarrow \sqrt{\eta} x. \end{aligned}$$

の下で, 考えている微分方程式は

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q(x, \eta) \right) \psi = 0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
Q(x, \eta) &= \frac{1}{4} x^2 \left\{ 1 + e^{i\theta} \left(x^{2N} + \eta^{-1} a_1 x^{2(N-1)} + \cdots + \eta^{-N} a_N \right) \right\} - \eta^{-1} E \\
&= \frac{1}{4} x^2 (1 - x^{2N}) - \eta^{-1} \left(E + \frac{1}{4} a_1 x^{2N} \right) - \frac{1}{4} \sum_{j=2}^N \eta^{-j} a_j x^{2(N-j)}
\end{aligned}$$

となる (但し $\theta = \pm\pi$ の時を考えればいいので, 簡単のため $e^{i\theta} = -1$ とおいた). 従って (I) の時と同じ手続きで S_{odd} を求めると

$$S_{\text{odd}} = \eta \sqrt{Q_0(x)} - \frac{E + a x^{2N}}{2\sqrt{Q_0(x)}} + \cdots$$

を得る (簡単のため $a = a_1/4$ とした). WKB 解の normalization を決めなければならないが, 帰納法を用いると, 各 $j = 0, 1, 2, \dots$ に対してある 0 以上の整数 α_j, β_j と (複素) 数 $P_{j,l}$ が存在して

$$S_{\text{odd},j} = \frac{\sum_{l=0}^{\alpha_j} P_{j,l} x^l}{\left(\sqrt{Q_0(x)}\right)^{\beta_j}}$$

となることがわかるから,

$$S_{\text{odd},j}^{(\infty)} := \frac{\sum_{l=0}^{\beta_j-1} P_{j,l} x^l}{\left(\sqrt{Q_0(x)}\right)^{\beta_j}} = \frac{\cdots + P_{j,\beta_j-2} x^{-2} + P_{j,\beta_j-1} x^{-1}}{\left(\sqrt{1 - x^{2N}/2}\right)^{\beta_j}}$$

$$S_{\text{odd},j}^{(0)} := \frac{\sum_{l=\beta_j}^{\alpha_j} P_{j,l} x^l}{\left(\sqrt{Q_0(x)}\right)^{\beta_j}} = \frac{P_{j,\beta_j} + P_{j,\beta_j+1} x + \cdots}{\left(\sqrt{1 - x^{2N}/2}\right)^{\beta_j}}$$

と定義する. さらに,

$$S_{\text{odd},-1}^{(0)} := \sqrt{Q_0(x)}$$

とにおいて WKB 解の normalization を次で決める.

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_0^x S_{\text{odd}}^{(0)} dx\right) \exp\left(\pm \int_{\infty}^x S_{\text{odd}}^{(\infty)} dx\right).$$

今の場合だと次のようになる:

$$S_{\text{odd}}^{(0)} = \sum_{j=-1}^{\infty} S_{\text{odd},j}^{(0)} \eta^{-j} = \eta \sqrt{Q_0(x)} - \frac{ax^{2N}}{2\sqrt{Q_0(x)}} + O(\eta^{-1}),$$

$$S_{\text{odd}}^{(\infty)} = \sum_{j=-1}^{\infty} S_{\text{odd},j}^{(\infty)} \eta^{-j} = -\frac{E}{2\sqrt{Q_0(x)}} + O(\eta^{-1}).$$

さて, この WKB 解を用いて A_n^K を求めるのと同じ手続きで B_n^K を求めればいいが, $Q(x, \eta)$ の leading term $Q_0(x)$ が変わらないので turning point, Stokes curve 等は変わらない. さらに, simple turning point に対する接続公式 (定理 3.7) もそのままいい.

定理 3.8 において定数 $C_{\pm}(\eta)$ は変更を受けるが, η に関して 0 次の項 $C_{\pm,0}$ は $y_1(x)$ に依らないので変わらず,

$$C_{\pm,0} = \exp \pm \frac{E}{2N} (\log 4 - i\pi)$$

である。また、 F もやはり η に関して 0 次の項は (19) と同じで

$$F = -E + O(\eta^{-1})$$

となる。

従って 4 節と同じ手続きで secular equation を得る。まず、 $\arg \lambda = \pi + \epsilon$ の場合は secular equation (21) の形は変わらず、 A_{\pm} 、 $B_{1,2}$ は

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= \exp\left(-2 \int_0^{\pm 1} S_{\text{odd}}^{(0)} dx\right) \exp\left(-2 \int_{\infty}^{\pm 1} S_{\text{odd}}^{(\infty)} dx\right), \\ B_1 &= \frac{C_-}{C_+} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-F + 1/2)} \eta^{-F}, \\ B_2 &= \frac{C_+}{C_-} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(F + 1/2)} e^{-i\pi F} \eta^F. \end{aligned}$$

となる。4 節と同じく E を $e^{-\eta\omega}$ で展開して (21), (22) を得る。

$$\bar{A}_- - \bar{A}_+ = \bar{A}_+ (e^{-2\pi i F} - 1)$$

であるから、 E_1^K は (22) に注意すると、leading term については (I) の E_1^K に

$$\begin{aligned} \exp\left(-2 \int_0^1 S_{\text{odd},0}^{(0)} dx\right) &= \exp\left(2a \int_0^1 \frac{x^{2N-1}}{\sqrt{1-x^{2N}}} dx\right) \\ &= \exp\left(\frac{2a}{N}\right) \end{aligned}$$

をかけたものになる。 $\arg \lambda = \pi + \epsilon$ の場合も同様にして、secular equation (24) を得る。これより、 B_n^K を求めることができる。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n^K}{A_n^K} &= e^{2a/N} \\ &= e^{a_1/2N} \end{aligned}$$

これが結果 (II) である。

7 謝辞

この論文を書くにあたり、懇切に指導して頂いた河合先生 ならびに 竹井先生 に深く感謝します。また、いくつかの注意を与えてくれた小嶋泉先生に感謝します。

8 付録

この付録では、ここで与えた考察のきっかけとなった Bender-Wu [BW] の議論を紹介する。内容としては第 2 節の続きである。

まず、解析関数の鏡像の原理より

$$E^K(\bar{\lambda}) = \overline{E^K(\lambda)}$$

が成り立つことに注意すると、式(6)は

$$A_n^K = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Im } E^K(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

となる。従って、 $\lambda = -\epsilon$ ($\epsilon > 0$) が小さいパラメータの時に $\text{Im } E^K(\lambda)$ を求めればよく、方程式(1)と $\theta = \pi$ の時の境界条件(7)を考えればいいが、

$$E = E_{(0)} + E_{(1)}$$

$$\begin{cases} E_{(0)} = K + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_{(0),n} \epsilon^n \quad (E_{(0),n} \in \mathbf{R}), \\ E_{(1)} : E_{(0)} \text{ に比べて指数的に小さい.} \end{cases}$$

と分解できるという Ansatz を置いて(物理的にはトンネル効果があるから... , という説明がつく), 問題は $E_{(1)}$ を求めることになる。

$$V(x) = \frac{1}{4}x^2(1 - \epsilon x^{2N}) - E$$

とおき、その零点のうち正のものを x_0, x_1 ($x_0 < x_1$) とおく:

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt{4E} + \frac{1}{2}(4E)^{N+\frac{1}{2}}\epsilon + O(\epsilon^2), \\ x_1 = \epsilon^{-\frac{1}{2N}} - \frac{2E}{N}\epsilon^{\frac{1}{2N}} + O(\epsilon^{\frac{3}{2N}}). \end{cases}$$

従って x_1 は大きいことに注意。正の実軸 $\{x > 0\}$ 上で図12のような領域を定め、左から順に領域 A, B, C, D, E と名付ける。

領域 A 領域 A では方程式(1)を Weber 方程式で近似する:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2 - E\right)\psi_A = 0.$$

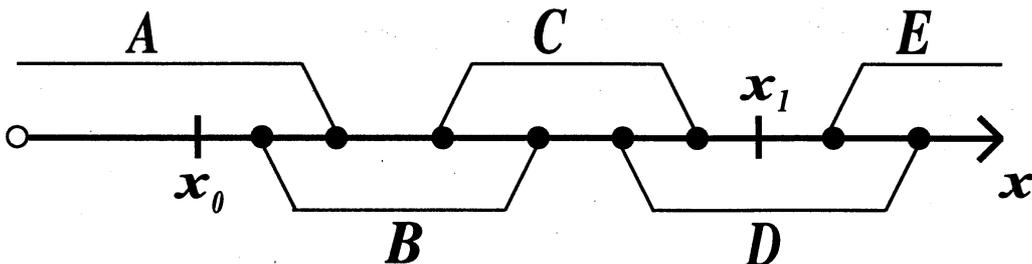


図12: 領域 A, B, C, D, E.

解には対称か反対称という条件を課す (boundary condition). こうすれば,

$$\psi_A(x) = \frac{1}{2} [D_{E-1/2}(x) + (-1)^K D_{E-1/2}(-x)]$$

となる ($1/2$ は解の normalization であり, $(-1)^K$ が解の parity を表している). $E = E_{(0)} + E_{(1)}$ であったから $E_{(1)}$ について展開すると,

$$\psi_A(x) = \psi_A|_{E_{(1)}=0} + E_{(1)} \left. \frac{\partial \psi_A}{\partial E_{(1)}} \right|_{E_{(1)}=0} + \dots$$

となる.

$$\begin{aligned} \psi_{A(0)}(x) &= \psi_A|_{E_{(1)}=0} \\ \psi_{A(1)}(x) &= E_{(1)} \left. \frac{\partial \psi_A}{\partial E_{(1)}} \right|_{E_{(1)}=0} \end{aligned}$$

とおく. 次に注意.

$$\begin{cases} \psi_{A(0)}(x) = \frac{1}{2} [D_{E_{(0)}-1/2}(x) + (-1)^K D_{E_{(0)}-1/2}(-x)] \\ \quad \sim D_K(x) \\ \psi_{A(1)}(x) : \psi_{A(0)}(x) \text{ に比べて指数的に小さい.} \end{cases}$$

領域 B, C 解を WKB 解で近似する.

$$\psi_{B,\pm}(x) = V^{-1/4} \exp(\pm \int_{x_0}^x \sqrt{V} dx),$$

$$\psi_{C,\pm}(x) = V^{-1/4} \exp(\pm \int_{x_1}^x \sqrt{V} dx).$$

領域 D 領域 D では方程式 (1) を Airy 方程式で近似する:

$$\left(-\frac{d^2}{dR^2} + R \right) \psi_D = 0.$$

ここで

$$R = Z^{1/3} (x_1 - x), \quad Z = \frac{N \epsilon^{-1/2N}}{2}$$

とおいた ($V(x) = -Z(x - x_1) + O((x - x_1)^2)$ である). 従って解は定数 D, D' を用いて

$$\psi_D(x) = D \text{Bi}(R) + D' \text{Ai}(R)$$

となる. ただし $\text{Ai}(z), \text{Bi}(z)$ は $\rho \rightarrow \infty$ の下で次の漸近形を持つ Airy 方程式の解である:

$$\begin{cases} \text{Ai}(\rho) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} \rho^{3/2}\right), \\ \text{Bi}(\rho) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} \rho^{3/2}\right), \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \text{Ai}(-\rho) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}\rho^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right), \\ \text{Bi}(-\rho) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}\rho^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right). \end{cases} \quad (27)$$

領域 E 解を WKB 解で近似するのだが、境界条件から 2 つある WKB 解のうち 1 つが選ばれる：

$$\psi_E(x) = V^{-1/4} \exp\left(-\int_{x_1}^x \sqrt{V} dx\right).$$

さて、以上で各領域での解を作ったわけであるが、それらの漸近形を比べることにより “matching” していく。

領域 A (Weber)	領域 B (WKB)	領域 C (WKB)	領域 D (Airy)	領域 E (WKB)
$\psi_{A(0)}(x) \Rightarrow$	$B \psi_{B,-}(x) \Rightarrow$	$C \psi_{C-}(x) \Rightarrow$	$D \text{Bi}(R) \Rightarrow$	
+	+	+	+	$E \psi_E(x)$
$\psi_{A(1)}(x) \Leftarrow$	$B' \psi_{B,+}(x) \Leftarrow$	$C' \psi_{C,+}(x) \Leftarrow$	$D' \text{Ai}(R) \Leftarrow$	

ただし、 B, B', C, C', D, D', E は適当な定数であり、この定数を決めていく順番が表に書かれている矢印である。それぞれの解の漸近形を求めて矢印に沿って定数を決めていくのである。

領域 A \Leftrightarrow 領域 B

具体的に領域 A から領域 B への matching を行なってみる。まず、 ψ_A は $x \rightarrow \infty$ の下で

$$\begin{cases} \psi_{A(0)}(x) \sim x^K e^{-x^2/4} \\ \psi_{A(1)}(x) \sim E_{(1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} K! x^{-K-1} e^{x^2/4} \end{cases}$$

となる。ここで $x \rightarrow \infty$, ($\pi/4 < \arg x < 5\pi/4$) の下で

$$D_\lambda(x) \sim x^\lambda e^{-x^2/4} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\lambda)} e^{\lambda\pi i} x^{-\lambda-1} e^{x^2/4}$$

となることを用いた。

一方、 $\psi_{B(0)}$ は、領域 A との交わりの上では、

$$V(x) \sim \frac{1}{4}x^2 - E$$

とみなすので、

$$\begin{cases} V(x)^{-1/4} \sim \sqrt{\frac{2}{x}} \\ \int_{x_0}^x \sqrt{V} dx \sim \frac{1}{4} \left(x^2 - x_0^2 \log x + \frac{x_0^2}{2} \left(\log \frac{x_0^2}{4} - 1 \right) \right) \end{cases}$$

となるから (但し今は第 0 近似で考えているから x_0^2 は $4(K+1/2)$ を指すとする)、

$$\begin{cases} B \psi_{B,-}(x) \sim B \sqrt{2} e^{-\frac{x_0^2}{8} (\log \frac{x_0^2}{4} - 1)} x^K \exp(-x^2/4) \\ B \psi_{B,+}(x) \sim B' \sqrt{2} e^{\frac{x_0^2}{8} (\log \frac{x_0^2}{4} - 1)} x^{-K-1} \exp(x^2/4) \end{cases}$$

となる。2つの漸近形が一致するという条件より、

$$\sqrt{2} \exp\left(-\frac{x_0^2}{8} \left(\log \frac{x_0^2}{4} - 1\right)\right) B = 1 \quad (28)$$

$$\sqrt{2} \exp\left(\frac{x_0^2}{8} \left(\log \frac{x_0^2}{4} - 1\right)\right) B' = E_{(1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} K! \quad (29)$$

を得る。特に定数 B が

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{x_0^2}{8} \left(\log \frac{x_0^2}{4} - 1\right)\right)$$

と決まる。

この手続きを続けていけばいい。

領域 B ⇔ 領域 C

これは自明にできて、

$$B \exp\left(-\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{V} dx\right) = C$$

$$B' \exp\left(\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{V} dx\right) = C'$$

となる。

領域 C ⇔ 領域 D

まず、領域 C における WKB 解 ψ_C の漸近形は

$$\psi_C \sim C Z^{-\frac{1}{6}} R^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}}\right) + C' Z^{-\frac{1}{6}} R^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}}\right)$$

となる。領域 D における ψ_D の漸近形は (26) からわかって、

$$D = Z^{-\frac{1}{6}} \sqrt{\pi} C$$

$$D' = 2 Z^{-\frac{1}{6}} \sqrt{\pi} C'$$

を得る。

領域 D ⇔ 領域 E

領域 E における WKB 解 ψ_E の漸近形は

$$\psi_E(x) \sim E Z^{-\frac{1}{6}} R^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}}\right)$$

となる。領域 D における ψ_D の漸近形は (27) からわかって、

$$D' = -i D$$

を得る。

後は、今まで得られた $E_{(1)}, B, C, D, B', C', D'$ の関係式を

$$2 \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{V} dx = \frac{\epsilon^{-1/N}}{2(N+2)} B\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{2}\right) + \frac{K + \frac{1}{2}}{2} \left\{ \log\left(K - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{N} \log \frac{\epsilon}{4} \right\} + O(\epsilon^{\frac{1}{N}})$$

を用いて解けばよくて,

$$E_{(1)} = \frac{i}{\sqrt{2\pi K!}} \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^{(K+1/2)/N} \exp\left(-\frac{\epsilon^{-1/N}}{2N} B\left(\frac{1}{N}, \frac{3}{2}\right)\right)$$

を得る.

参考文献

- [**AKT**] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei : The Bender-Wu analysis and the Voros theory. ICM-90 Satellite Conf. Proc. "Special Functions", Springer-Verlag, 1991, pp.1-29.
- [**BB**] T.I.Banks and C.M.Bender : Anharmonic oscillator with polynomial self-interaction. J. Math. Phys., **13** (1972), pp.1320-1324.
- [**BW1**] C.M.Bender and T.T.Wu : Anharmonic oscillator. Phys. Rev., **184** (1969), pp.1231-1260.
- [**BW2**] —————: Anharmonic oscillator. II. A study of perturbation theory in large order. Phys. Rev. D, **7** (1973), pp.1620-1636.
- [**D**] F.J.Dyson : Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. Phys.Rev., **85** (1952), pp.631-632.
- [**DDP1**] E.Delabaere, H.Dillinger, and F.Pharm : Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques. Annales de l'Institut Fourier, Tome 43 Fascicule 1 (1993), pp.163-199.
- [**DDP2**] —————: Exact semi-classical expansions for one dimensional quantum oscillators. Prépublication No. 441, Univ. Nice-Sophia-Antipolis, 1996.
- [**DP**] E.Delabaere and F.Pharm : Unfolding the quartic oscillator. Prépublication No. 463, Univ. Nice-Sophia-Antipolis, 1996.
- [**KT**] T.Kawai and Y.Takei : Secular equations through the exact WKB analysis. "Méthodes résurgentes", Hermann, 1994, pp.85-102.
- [**T**] Y.Takei : On the connection formula for the first Painlevé equation. 数理解析研究所講究録 **931**, pp.70 - 99, 1995.
- [**S**] B.Simon : Coupling constant analyticity for the anharmonic oscillator. Ann. Phys., **58** (1976), pp. 76-136.
- [**V**] A.Voros : The return of the quartic oscillator. The complex WKB method. Ann. Inst. Henri. Poincaré, **39** (1983), pp. 211-338.