

TRIPLE L-FUNCTION の GAMMA
FACTOR について (HOLOMORPHIC CASE)

池田 保 (京都大学大学院理学研究科)

§1. Triple L-function の積分表示

Triple L-function の理論の復習からはじめることにする。Real place 上の問題を考えているので基礎体は \mathbb{Q} として考えて一般性を失わない。 \mathbb{A} を \mathbb{Q} の adèle ring とする。 ψ を $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{A}$ の additive character で、 $\psi_\infty(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ となるよう正規化する。 $\pi_i, (i = 1, 2, 3)$ を $GL_2(\mathbb{A})$ の既約な cuspidal automorphic representation で cusp form φ_i で生成されているものとする。以下では記号的に $\Pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3$ とかくことにする。 π_i の central character を ω_i とし、 $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3$ とする。Bad prime の集合 S は level を割る有限素点と無限遠素点をすべて含んでいるとする。

$p \notin S$ に対して、 $\pi_{i,p}$ の Satake parameter を

$$A_{i,p} \in GL_2(\mathbb{C}) = {}^LGL_2$$

とする。Triple L-function の素点 p における local factor を

$$\begin{aligned} L_p(s, \Pi) &= L_p(s, \pi_{1,p} \times \pi_{2,p} \times \pi_{3,p}) \\ &= \det(\mathbf{1}_8 - A_{1,p} \otimes A_{2,p} \otimes A_{3,p} \cdot p^{-s})^{-1} \end{aligned}$$

で定義する。

代数群 H, P, M, G を

$$H = GSp_3 = \left\{ g \in GL_6 \mid g \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & -\mathbf{1}_3 \\ \mathbf{1}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} {}^t g = m(g) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & -\mathbf{1}_3 \\ \mathbf{1}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}, m(g) \in GL_1 \right\},$$

$$P = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} mA & * \\ \hline \mathbf{0}_3 & {}^t A^{-1} \end{array} \right) \in H, m \in GL_1, A \in GL_3 \right\},$$

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} mA & \mathbf{0}_3 \\ \hline \mathbf{0}_3 & {}^t A^{-1} \end{array} \right) \in H, m \in GL_1, A \in GL_3 \right\},$$

$$G = \left\{ g = (g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}) \in GL_2^3 \mid \det g^{(1)} = \det g^{(2)} = \det g^{(3)} \right\}.$$

と定義する。 G の H への diagonal embedding を ι であらわす。 K を $H(\mathbb{A})$ の standard maximal compact subgroup とする。 $s \in \mathbb{C}$ に対して誘導表現の空間 $I(\omega, s)$ を

$$I(\omega, s) = \left\{ f : H(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} f(ph) = \omega(m \det A) |m|^{3s + \frac{3}{2}} |\det A|^{2s+1} f(h), \\ p = \left(\begin{array}{c|c} mA & * \\ \hline \mathbf{0}_3 & {}_tA^{-1} \end{array} \right) \in P(\mathbb{A}), h \in H(\mathbb{A}) \end{array} \right\}$$

と定義する。 $f^{(s)}(h)$ を $\mathbb{C} \times H(\mathbb{A})$ 上の関数で、 $s \in \mathbb{C}$ を fix した時には $f^{(s)} \in I(\omega, s)$ であって、 $f^{(s)}$ の K への制限は s に depend しないものとする。 このような $f^{(s)}$ に対して、 Eisenstein series $E(h; f^{(s)})$ を

$$E(h; f^{(s)}) = \sum_{\gamma \in P \backslash H} f^{(s)}(\gamma h)$$

と定義する。 $E(h; f^{(s)})$ は $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ の時絶対収束し、 全 s 平面に解析接続される。

$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3$ を $G(\mathbb{A})$ 上の関数とみる。 この時次のような積分を考える。

$$\int_{G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} E(\iota(g); f^{(s)}) \varphi(g) dg$$

ここで、 $Z \simeq \mathrm{GL}_1$ は G の center の連結成分とする。 φ_i の Fourier 係数として得られる Whittaker 関数を W_i とする。 すなわち、

$$W_i(g) = \int_{\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}} \varphi_i \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \psi(-x) dx.$$

さらに、 $f^{(s)}$, W_i は decomposable であるとする：

$$f^{(s)} = \prod_v f_v^{(s)}, \quad W_i = \prod_v W_{i,v}.$$

φ と同様に $W = W_1 \times W_2 \times W_3$ とおくことにする。 この時、 上の積分は local integral の積に分解する：

$$\int_{G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} E(\iota(g); f^{(s)}) \varphi(g) dg = \prod_v \int_{R_{0,v} \backslash G_v} f_v^{(s)}(\eta_0 \iota(g)) W_v(g) dg$$

ここで

$$\eta_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & -1 \\ 1 & -1 & & \\ & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & -1 & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & n_1 \\ 0 & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & n_2 \\ 0 & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & n_3 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathrm{GL}_1, n_1 + n_2 + n_3 = 0 \right\},$$

とする。 $v \notin S$ ならば measure を適当に正規化すれば、

$$\int_{R_0, v \backslash G_v} f_v^{(s)}(\eta_0 \iota(g)) W_v(g) dg = L_v(2s+1, \omega)^{-1} L_v(4s, \omega^2)^{-1} L_v(s, \Pi)$$

が成り立つ。

$$w = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & -1 \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & -1 & \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ \hline 1 & & & & & \end{array} \right)$$

とし、intertwining operator $M_w : I(\omega, s) \rightarrow I(\omega^{-1}, 1-s)$ を

$$M_w f(h) = \omega(m(h)) \int_N f(w^{-1}nh) dn$$

と定義する。(関数等式を対称的な形に書くために、通常の設定を $\omega(m(h))$ で twist したものを採用している。) ただし、

$$N = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_3 & x \\ \hline \mathbf{0}_3 & \mathbf{1}_3 \end{array} \right) \mid x \in \mathrm{Sym}_3(\mathbb{Q}) \right\}$$

は P の unipotent radical である。 M_w は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ の時、絶対収束し、全 s 平面に解析接続できる。 Eisenstein series の関数等式より、

$$\int_{G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} E(\iota(g); f^{(s)}) \varphi(g) dg = \int_{G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} E(\iota(g); M_w f^{(s)}) \bar{\varphi}(g) dg$$

が成り立つことに注意する。ただし、 $\bar{\varphi}_i(g) = \omega_i(\det g)^{-1} \varphi_i(g) \in \bar{\pi}_i$ で $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 \times \bar{\varphi}_2 \times \bar{\varphi}_3$ とする。

§2. Local theory の復習

Bad prime $v \in S$ に対しても local factor $L_v(s, \Pi)$ および epsilon factor $\varepsilon(s, \Pi, \psi)$ を定義することがこの節の目標である。この節では代数群は \mathbb{Q}_v 上定義されたものとし、 $I(\omega, s)$ M_w などは局所体上の類似物とする。これらは次の (1) から (4) の条件をみたすことが望ましい。

- (1) $v = p$ が finite なら、 $L_v(s, \Pi)^{-1}$ は定数項が 1 の p^{-s} の多項式である。
- (2) $\varepsilon(s, \Pi, \psi)$ は cq^s , $c, q \in \mathbb{C}$ の形の関数である。
- (3) v が infinite なら、 $L_v(s, \Pi)$ は s の exponential function と gamma function の積である。
- (4) 適当な local functional equation が成り立つ。

Normalized intertwining operator M_w^* を

$$M_w^* = \varepsilon'(2s-2, \omega, \psi) \varepsilon'(4s-3, \omega^2, \psi) \cdot M_w$$

と定義する。ただし、

$$\varepsilon'(s, \omega, \psi) = \varepsilon(s, \omega, \psi) \frac{L(1-s, \omega^{-1})}{L(s, \omega)}.$$

$H \times \mathbb{C}$ 上の関数 $f^{(s)}(h)$ が $I(\omega, s)$ の good section であるとは次の条件がみたされることであるとする。

- (1) $h \in H$ を fix した時、 $f^{(s)}$ は s の meromorphic function. v が finite の時には、さらに、 $\mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$ の元であるとする。
- (2) $s \in \mathbb{C}$ を fix した時、 $f^{(s)} \in I(\omega, s)$.
- (3) $f^{(s)}(h)$ は right K -finite.
- (4) $L(2s+1, \omega)^{-1} L(4s, \omega^2)^{-1} f^{(s)}$ は s に関して holomorphic.
- (5) $L(3-2s, \omega^{-1})^{-1} L(4-4s, \omega^{-2})^{-1} M_w f^{(s)}$ は s に関して holomorphic.

この時、 $f^{(s)}$ が $I(\omega, s)$ の good section であることと、 $M_w^*(f^{(s)})$ が $I(\omega^{-1}, 1-s)$ の good section であることは同値であることが証明できる。また、前節で考えたような、 K 上への制限が s に depend しないような $f^{(s)}$ は good section であることが証明できる。さらに、 ω が不分岐で ψ が order 0 の時、 $f_0^{(s)}$ を K への制限が $L(2s+1, \omega) L(4s, \omega^2)$ であるような K -fixed vector とすれば、 $f_0^{(s)}$ は good section であり、 $M_w^* f^{(s)} = f^{(1-s)}$ である。さらに

$$\Psi(f^{(s)}, W) = \int_{\mathbb{Q}_v^* \backslash N_0 \backslash G} f^{(s)}(\eta_0 \iota(g)) W(g) dg$$

とかくことにすれば、 $\Psi(f^{(s)}, W)$ は $\text{Re } s > 0$ の時絶対収束し、 $v \notin S$ のとき、 $\Psi(f_0^{(s)}, W_0) = \det(1_g - A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \cdot q^{-s})^{-1}$ である。ここで、 W_0 は Π に属する標準的な class 1 Whittaker function である。

さて、次の (1) から (3) を満たすような零点を持たない meromorphic function $l(s, \Pi)$ が存在することが証明できる。さらに、 k が non-archimedean なら、 $l(s, \Pi)^{-1} \in \mathbb{C}[q^{-s}]$ で、定数項は 1 であるようにとれる。

- (1) $I(\omega, s)$ の任意の good section $f^{(s)}$ および Π の任意の Whittaker function W にたいして、 $l(s, \Pi)^{-1} \Psi(f^{(s)}, W)$ は holomorphic.
- (2) $l'(s)$ が上の性質をもつなら、 $l(s, \Pi) l'(s)^{-1}$ は holomorphic.
- (3) Π が class 1 なら、 $l(s, \Pi) = \det(1_g - A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \cdot q^{-s})^{-1}$ ととれる。

また、 $\tilde{W}_i(g) = \omega_i^{-1}(\det g) W_i(g)$, $\tilde{W} = \tilde{W}_1 \times \tilde{W}_2 \times \tilde{W}_3$ とおく時、零点を持たない entire function $e(s, \Pi, \psi)$ が存在して、local functional equation

$$\frac{\Psi(M_w^* f^{(s)}, \tilde{W})}{l(1-s, \tilde{\Pi})} = e(s, \Pi, \psi) \frac{\Psi(f^{(s)}, W)}{l(s, \Pi)}$$

が成り立つ。 $v = p$ が finite なら、 $e(s, \Pi, \psi) = ap^{cs}$, $a \in \mathbb{C}^\times$, $c \in \mathbb{Z}$ である。このことから、 v が finite なら、 local factor $L(s, \Pi)$ として $l(s, \Pi)$ をとり、 epsilon factor $\varepsilon(s, \Pi, \psi)$ として $e(s, \Pi, \psi)$ ととれば望ましい局所関数等式が成り立つことがわかる。さらにこの場合 π_1, π_2, π_3 のうち、 supercuspidal でないものが2つ以上あれば、この L -factor と ε -factor は π_1, π_2, π_3 の Langlands parameter から定まる L -factor と ε -factor に一致することを示すことができる。また、 v が archimedean の場合、 Π の Langlands parameter によって定まる Γ factor と $l(s, \Pi)$ は invertible function を除いて一致することが示される。

§3 Real holomorphic case

前節のような局所理論を応用して triple L -function の特殊値などを研究しようとするとき local integral $\Psi(f^{(s)}; W)$ が実際に explicit に計算できなければ困る。この節では v が実素点で $\pi_{i,v}$ が holomorphic な cusp form から生成されている場合を考える。以下、代数群は \mathbb{R} 上定義されているとし、記号から v を省略する。

$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathbb{Z}^3$, $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \kappa_3$ とする。

π_i は次の (1) (2) で特徴づけられる $GL_2(\mathbb{R})$ の既約表現とする。

- (1) π_i の $SL_2(\mathbb{R})$ への制限は $\mathcal{D}_{\kappa_i}^+ \oplus \mathcal{D}_{\kappa_i}^-$ と同形。
- (2) π_i の central character $\omega_i(x)$ は $|x|^{1-\kappa_i} \text{sgn}(x)^{\kappa_i}$ に等しい。

$\omega(x) = \omega_1(x)\omega_2(x)\omega_3(x)$ とおく。次の4つの場合分けを考える。

$$\begin{cases} \kappa_1 < \kappa_2 + \kappa_3, \kappa_2 \equiv \kappa_3 \pmod{2} & \text{(Case DE "definite even")} \\ \kappa_1 \geq \kappa_2 + \kappa_3, \kappa_2 \equiv \kappa_3 \pmod{2} & \text{(Case IE "indefinite even")} \\ \kappa_1 < \kappa_2 + \kappa_3, \kappa_2 \equiv \kappa_3 + 1 \pmod{2} & \text{(Case DO "definite odd")} \\ \kappa_1 \geq \kappa_2 + \kappa_3, \kappa_2 \equiv \kappa_3 + 1 \pmod{2} & \text{(Case IO "indefinite odd")} \end{cases}$$

Π の Langlands parameter から定まる L -factor $L(s, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3)$ と ε -factor $\varepsilon(s, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3, \psi)$ は次のように与えられる。

$$L(s, \Pi) = \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - \kappa_1 + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - \kappa_2 + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - \kappa_3 + 1) & \text{(Case D)} \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - \kappa_2 - \kappa_3 + 2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - \kappa_2 + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - \kappa_3 + 1) & \text{(Case I)} \end{cases}$$

$$\varepsilon(s, \Pi, \psi) = \begin{cases} (-1)^{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 1} & \text{(Case D)} \\ 1 & \text{(Case I)} \end{cases}$$

ここで $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$.

$g \in H(\mathbb{R})$ の岩沢分解を

$$g = \begin{pmatrix} mA & * \\ \mathbf{0}_3 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & V \\ -V & U \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}^\times, A \in GL_3(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} U & V \\ -V & U \end{pmatrix} \in Sp_3(\mathbb{R}) \cap SO(6)$$

とする。

ϕ が $O(3) \backslash U(3)$ 上の ω -semi-spherical function であるとは ϕ が $U(3)$ の右作用で finite で $O(3)$ の左作用で $\omega \cdot \det$ に関して covariant であることとする。 ϕ をこのようなものとするとき、 $H(\mathbb{R})$ 上の関数 $f_\phi^{(s)}$ を

$$f_\phi^{(s)}(g) = \omega(m \det A) |m^3 \det A^2|^{s+(1/2)} \overline{\phi(u)}$$

で定義する。ここで $u = U + \sqrt{-1}V \in U(3)$ とする。

$H \times \mathbb{C}$ 上の関数 $F^{(s)}$ が normalized section であるとは次の (1), (2) を満たすこととする。

(1) $s \in \mathbb{C}$ を fix したとき、 $F^{(s)} \in I(\omega, s)$.

(2) $F^{(s)}$ は $L(2s+1, \omega)L(4s, \omega^2)P(s)f_\phi^{(s)}$, $P(s) \in \mathbb{C}(s)$ という形の関数の有限和でかける。

定理: $F^{(s)}$ が $I(\omega, s)$ の normalized section であるためには $M_w^* F^{(s)}$ が $I(\omega^{-1}, 1-s)$ の normalized section であることが必要十分である。

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^3$, $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \lambda_3 \pmod{2}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ が与えられたとき、

$$d_\lambda(s) = 2^{2s - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 + 3} \Gamma_{\mathbb{R}}(2s - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 + 3 + |\lambda_1 + 1|) \\ \times \Gamma_{\mathbb{R}}(2s - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 + 3 + |\lambda_2|) \Gamma_{\mathbb{R}}(2s - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 + 3 + |\lambda_3 - 1|).$$

と定義する。ここで $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$. $d_\lambda(s)$ は右半平面 $\text{Re} \geq (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2)/2$ (関数等式の中心の右側) において零点も極も持たないことに注意する。

ϕ が $U(3)$ -type τ_λ をもつとする。ここで τ_λ は Young diagram λ で定まる $U(3)$ の既約表現である。

このとき、normalized intertwining operator M_w^* の作用は

$$M_w^*(d_\lambda(s)f_\phi^{(s)}) = \varepsilon(\lambda)d_\lambda(1-s)f_\phi^{(1-s)}$$

で与えられる。ここで

$$\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \equiv 1 \pmod{2} \text{ または } \lambda_1 \lambda_3 \leq 0 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。このことから、normalized good section の全体はこのような形のもので $\mathbb{C}[s]$ 上生成されることがわかる。

定理: $F^{(s)}$ が $I(\omega, s)$ の normalized good section で、 Π に属する Whittaker function W は G の compact subgroup $SO(2)^3$ の作用で finite であるとする。このとき、局所関数等式

$$\frac{\Psi(M_w^* F^{(s)}, \bar{W})}{L(1-s, \bar{\Pi})} = \varepsilon(s, \Pi, \psi) \frac{\Psi(f^{(s)}, W)}{L(s, \Pi)}$$

が成り立つ。この両辺は s の多項式である。

以下では $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^3$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ を次のように与える。

$$\lambda = \begin{cases} (\kappa_1, \kappa_1, \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_1) & \text{(Case E),} \\ (\kappa_1 + 1, \kappa_1 - 1, \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_1) & \text{(Case O)} \end{cases}$$

$$\mu = \kappa_1 - \kappa_2, \quad \nu = \begin{cases} (\kappa_2 - \kappa_3)/2 & \text{(Case E)} \\ (\kappa_2 - \kappa_3 - 1)/2 & \text{(Case O).} \end{cases}$$

$u \in SO(6) \cap Sp_3(\mathbb{R}) \simeq U(3)$ 上の ω -semi-spherical function $H_{\lambda|\kappa}$ を Case E の場合には

$$(\det u)^{\kappa_1} \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{2^{\mu-2i} \mu! (\mu+\nu)!}{i! (\mu-2i)! (\nu+i)!} \bar{H}_{33}^{\nu+i} \bar{H}_{23}^{\mu-2i} \bar{H}_{22}^i$$

Case O の場合には

$$\begin{aligned} & (\det u)^{\kappa_1-1} \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{2^{\mu-2i+1} \mu! (\mu+\nu)!}{i! (\mu-2i)! (\nu+i)!} H_{12} \bar{H}_{33}^{\nu+i} \bar{H}_{23}^{\mu-2i} \bar{H}_{22}^i \\ & + (\det u)^{\kappa_1-1} \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{2^{\mu-2i} \mu! (\mu+\nu)!}{i! (\mu-2i-1)! (\nu+i)!} H_{11} \bar{H}_{13} \bar{H}_{33}^{\nu+i} \bar{H}_{23}^{\mu-2i-1} \bar{H}_{22}^i \\ & + (\det u)^{\kappa_1-1} \sum_{i=0}^{[\mu/2]} \frac{2^{\mu-2i+1} \mu! (\mu+\nu)!}{(i-1)! (\mu-2i)! (\nu+i)!} H_{11} \bar{H}_{12} \bar{H}_{33}^{\nu+i} \bar{H}_{23}^{\mu-2i} \bar{H}_{22}^{i-1} \end{aligned}$$

と定義する。ここで $u \in U(3)$ に対して H_{ij} は ${}^t u u$ の ij 成分、 \bar{H}_{ij} は H_{ij} の複素共役とする。 $H_{\lambda|\kappa}$ の $U(3)$ -type は τ_λ で weight は κ である。 $\phi = H_{\lambda|\kappa}$ のときは $f_\phi^{(s)}$ を $f_{\lambda|\kappa}^{(s)}$ と省略してかくことにする。

λ が上のように与えられている場合には $d_\lambda(s)$ は次のようになる。

$$2^{1-\kappa_1} \pi^{-3s+\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3-4} \Gamma(2s-\kappa_2-\kappa_3+3) \Gamma(s-\kappa_1+1) \quad (\text{Case DE})$$

$$2^{1-\kappa_1} \pi^{-3s+2\kappa_2+2\kappa_3-5} \Gamma(2s-\kappa_2-\kappa_3+3) \Gamma(s-\kappa_2-\kappa_3+2) \quad (\text{Case IE})$$

$$2^{2-\kappa_1} \pi^{-3s+\kappa_2+\kappa_3-4} (2s-\kappa_2-\kappa_3+3) \Gamma(2s-\kappa_2-\kappa_3+2) \Gamma(s-\kappa_1+1) \quad (\text{Case DO})$$

$$2^{2-\kappa_1} \pi^{-3s+2\kappa_2+2\kappa_3-5} (2s-\kappa_2-\kappa_3+3) \Gamma(2s-\kappa_2-\kappa_3+2) \Gamma(s-\kappa_2-\kappa_3+2) \quad (\text{Case IO})$$

π_i の weight κ_i の Whittaker 関数を W_i とする。

$$W_i \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2e^{-2\pi a} a^{\kappa_i/2} & a > 0, \\ 0 & a < 0. \end{cases}$$

$$W(g_1, g_2, g_3) = W_1(g_1)W_2(g_2)W_3(g_3).$$

定理： Triple L -function の局所積分 $d_\lambda(s) \Psi(f_{\lambda|\kappa}^{(s)}, W)$ は次のようになる。

$$\begin{cases} 2^{2-\kappa_1} (\sqrt{-1})^{\kappa_1} \frac{(2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3)!}{(\kappa_1-\kappa_3)!} L(s, \Pi) & (\text{Case DE}) \\ 2^{3-\kappa_2-\kappa_3} (\sqrt{-1})^{\kappa_1} \frac{(2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3)!}{(\kappa_1-\kappa_3)!} L(s, \Pi) & (\text{Case IE}) \\ 2^{4-\kappa_1} (\sqrt{-1})^{\kappa_1+1} \frac{(2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3-1)!}{(\kappa_1-\kappa_3-1)!} L(s, \Pi) & (\text{Case DO}) \\ 2^{5-\kappa_2-\kappa_3} (\sqrt{-1})^{\kappa_1+1} \frac{(2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3-1)!}{(\kappa_1-\kappa_3-1)!} L(s, \Pi) & (\text{Case IO}) \end{cases}$$

この定理の証明には次の補題が用いられる。

Lemma.

$$I(\alpha, \beta; l_1, l_2, l_3) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (x+y+z+\sqrt{-1}n)^{-s-\alpha} (x+y+z-\sqrt{-1}n)^{-s-\beta} \\ \times e^{-2\pi(x+y+z-\sqrt{-1}n)} x^{s+l_1} y^{s+l_2} z^{s+l_3} dn d^{\times}x d^{\times}y d^{\times}z.$$

とおけば、 $I(\alpha, \beta; l_1, l_2, l_3)$ は

$$2^{-4s-2l_1-2l_2-2l_3+\alpha+\beta} \pi^{-s-l_1-l_2-l_3+\alpha+\beta} \Gamma(s+\alpha)^{-1} \Gamma(2s+l_1+l_2+l_3-\alpha+1)^{-1} \\ \times \Gamma(s+l_1) \Gamma(s+l_2) \Gamma(s+l_3) \Gamma(s+l_1+l_2+l_3-\alpha-\beta+1).$$

に等しい。

Lemma.

$$\sum_{j=0}^M \sum_{l=0}^N (-1)^{j+l} \binom{M}{j} \binom{N}{l} \frac{\Gamma(A+j)\Gamma(B+l)}{\Gamma(A+B+j+l)} = \frac{\Gamma(A+N)\Gamma(B+M)}{\Gamma(A+B+N+M)}.$$

References

REFERENCES

1. D. Blasius, *Critical values of certain tensor product L-functions*, Inv. Math. 90 (1987), 181–188.
2. S. Böcherer, R. Schulze-Pillot, *On the central critical value of the triple product L-function*, preprint (1995).
3. P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc. Symp. Pure Math. 33-2 (1979), 313–346.
4. P. Garrett, *Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple products*, Annals of Math. 125 (1987), 209–235.
5. P. B. Garrett, M. Harris, *Special values of triple product L-functions*, Amer. J. Math. 115 (1993), 161–240.
6. A. Guillemonat, *On some semi-spherical representations of an Hermitian symmetric pair of the tubular type*, Math. Ann. 246 (1980), 93–116.
7. M. Harris, *Period invariants of Hilbert modular forms. I. Trilinear differential operators and L-functions*, Cohomology of arithmetic groups and automorphic forms, Lecture Notes in Math., vol. 1447, Springer, Berlin, 1990, pp. 155–202.
8. M. Harris, *Period invariants of Hilbert modular forms. II*, Comp. Math. 94 (1994), 201–226.
9. M. Harris, S. Kudla, *The central critical value of a triple product L-function*, Ann. of Math. 133 (1991), 605–672.
10. M. Harris, J. Tilouine, *p-adic measures and square roots of triple product L-functions*, preprint (1996).
11. T. Ikeda, *On the functional equations of the triple L-functions*, J. Math. Kyoto Univ. 29 (1989), 175–219.
12. T. Ikeda, *On the location of poles of the triple L-functions*, Comp. Math. 83 (1992), 187–237.
13. T. Ikeda, *On the gamma factors of the triple L-functions*, to appear.
14. S. Kudla, S. Rallis, *Degenerate principal series and invariant distributions*, Israel J. Math. 69 (1990), 25–45.
15. S. Mizumoto, *Integrality of critical values of triple product L-functions*, Analytic number theory, Lecture Notes in Math. 1434, Springer, Berlin, 1990, pp. 188–195.
16. T. Orloff, *Special values and mixed weight triple products*, Inv. Math. 90 (1987), 169–188.

17. I. Piatetski-Shapiro, S. Rallis, *Rankin triple L functions*, *Comp. Math.* **64** (1987), 31–115.
18. D. Prasad, *Trilinear forms for $GL(2)$ and local epsilon factors*, *Comp. Math.* **75** (1990), 1–46.
19. T. Satoh, *On triple L-functions*, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **62** (1986), 396–398.
20. T. Satoh, *Some remarks on triple L-functions*, *Math. Ann.* **276** (1987), 687–698.
21. T. Satoh, *Vector valued modular forms of degree two and their application to triple L-functions*, *Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties*, *Adv. Stud. Pure Math.* **15**, Academic Press, 1989, pp. 89–97.