数理解析研究所講究録
1002巻 1997年 32-39

ON NEWFORMS OF HALF-INTEGRAL WEIGHT AND VERY-NEWFORMS.

上田 勝 (UEDA MASARU, 奈良女子大学 理学部)

【序文】 二次形式のテータ級数の研究に見られるように、保型形式の整数論の研究においては、ウェイトが整数の場合と半整数の場合とが共に等しく重要であり、かつ興味深い対象である。

整数ウェイトの場合における研究では、ニューフォームの理論が確立しており、この理論は大変有用であり重要であった。

今回の講演の目的は、半整数ウェイトの場合に類似したニューフォームの理論を確立するという筆者の以前からの試みの現状報告である。

特に今回の講演では、半整数ウェイトの尖点形式の空間に含まれる Kohnen 空間と呼ばれる重要な標準部分空間に対し，付帯条件なしの完全な形でニューフォームの理論が構築できた事を報告する。

§1. 整数ウェイトの場合.

始めに、整数ウェイトの場合のニューフォームの理論について思い出しておこう。

k, N を正の整数であるとする。$\mathfrak{H} := \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を複素上半平面。そして、$\Gamma_0(N) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}\}$ と記号を置く。この時、

$$S(2k, N) := \left\{ \begin{array}{l} f : \mathfrak{H} \to \mathbf{C}\ ;\ (1)\ f \text{ は } \mathfrak{H} \text{ 上の正則関数である.} \\ (2) \text{ すべての } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N) \text{ に対して} \\ \quad f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^{2k} f(z) \text{ が成り立つ.} \\ (3)\ f \text{ は } \Gamma_0(N) \text{ のすべてのカスプでゼロの値をとる.} \end{array} \right\}$$

と定める．この空間をウェイト $2k$, レベル N の尖点形式の空間と呼ぼう．さて，この空間に対する作用素として，任意の正の整数 A に対して

$$(f|\delta_A)(z) := f(Az)$$

と定めよう．そしてこの作用素を用いて，次のような空間を考える．

$$S^1(2k, N) := \sum_{\substack{0<A,B,\ AB|N \\ B \neq N}} S(2k, B)|\delta_A\ .$$

この空間 $S^1(2k, N)$ は $S(2k, N)$ の部分空間に成り，これを "Oldform" のなす空間と呼ぶ．そしてこの "Oldform" のなす部分空間のピーターソン内積による $S(2k, N)$ の中での直交補空間として，"Newform" のなす部分空間 $S^0(2k, N)$ を定義する．

このニューフォームの空間については次のような著しい事実が知られている．

(1) $S^0(2k,N)$ はすべてのヘッケ作用素 $T(n)$ $(n\in\mathbf{N})$ に関する同時固有関数からなる $\mathbf{C}$-基底を持つ: $f|T(n)=c_nf$ $(c_n\in\mathbf{C})$. □

(2) 上のような同時固有関数でもある基底は，Strong Multiplicity One theorem (=S.M.O.) を満足する．詳しくいうと，これは次のような意味である．『f, $g\in S^0(2k,N)$ を二つのゼロではない同時固有関数であるとする．更に f と g はほとんど全ての n, つまり有る整数 A と互いに素になる全ての $n\in\mathbf{N}$ に対して同じ固有値をもつと仮定する．このとき，$\mathbf{C}f=\mathbf{C}g$ が成立する.』 □

この SMO より，同時固有関数は複素数による積を除いて一意的に決定されることが分かる．そこで，同時固有関数をその最初のフーリエ係数が 1 になるように正規化しておこう．このように正規化した同時固有関数である基底を Primitive Form と呼ぶことにする．

§2. 半整数ウェイトの場合

次にウェイトが半整数の場合を考えよう．説明上の理由から次の仮定の下で話しを進めていく．

【技術的仮定】　　$k\geq 2.$

$k=1$ の場合にも本質的な枠組みはまったく変わらないのであるが，用語的な複雑さが出てくるので，避けるだけのことである．必要な方は参考文献 [U1–3] を見られたい．

半整数ウェイトの場合には，$4|N$ という場合のみ考えるのが自然であるので，この仮定を以下置いておく．χ を Modulo N で定義された even Dirichlet 指標で$\chi^2=1$ となるものであるとする．

$\gamma\in\Gamma_0(4)$ に対して，$j(\gamma,z):=\left(\frac{-1}{d}\right)^{-1/2}\left(\frac{c}{d}\right)(cz+d)^{1/2}$, と置く．ここで $\left(\frac{*}{*}\right)$ は Kronecker Symbol である．

さてこの記号のもとで，次の様に半整数ウェイトの尖点形式の空間を定義する．

$$S(k+1/2,N,\chi):=\left\{\begin{array}{l} f:\mathfrak{H}\to\mathbf{C}\ ;\ (1)\ f\ \text{は}\ \mathfrak{H}\ \text{上の正則関数である.} \\ (2)\ \text{すべての}\ \gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)\ \text{に対して} \\ \quad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\chi(d)j(\gamma,z)^{2k+1}f(z)\ \text{が成り立つ.} \\ (3)\ f\ \text{は}\ \Gamma_0(N)\ \text{のすべてのカスプでゼロになる.}\end{array}\right\}$$

この空間をウェイト $k+1/2$, レベル N, 指標 χ の尖点形式の空間と呼ぼう．

我々はこの半整数ウェイトの場合にも，整数ウェイトの場合と同様にヘッケ作用素$\tilde{T}(n)$ を定義することができる．ただし，この場合 n が平方数でないと$\tilde{T}(n)$ は自明に zero になってしまうことが知られている．そこで，以下では平方数の場合のみ考えることとし，$\tilde{T}(n^2)$ の様に書くことにする．

さて，半整数ウェイトについての基本的な結果として，G.Shimura, S.Niwa, Cipra による次のような著しい事実が知られている．

(1) $S(k+1/2,N,\chi)$ は全てのヘッケ作用素 $\tilde{T}(n^2)$ $(n,N)=1$ の同時固有関数からなる直交基底を持つ． □

(2) f をそのような基底の一つであるとする．そして固有値を $f|\tilde{T}(n^2) = \lambda_n f$, $\lambda_n \in \mathbf{C}$, $(n, N) = 1$ とする．このときウェイト $2k$ のある Primitive Form $F \in S^0(2k, N')$, $0 < N'|(N/2)$ が存在して $(n, N) = 1$ となる全ての n に対して $F|T(n) = \lambda_n F$ となる． □

この時，対応 $f \Rightarrow F$ を Shimura Correspondence という．このような対応が存在することは，整数ウェイトの保型形式の空間と半整数ウェイトの保型形式の空間の間に，ヘッケ加群としての構造上の対応が存在することを意味する．もし，Shimura Correspondence が 1 対 1 ならば，話は単純であるが，残念ながらこの Shimura Correspondence は一般には 1 対 1 対応にはならないことが知られている．

実際，S.Niwa [N] はヘッケ作用素のトレースを計算することにより，正の整数 k と Primitive Form $F \in S(2k, 1)$ を適当に選べば，F に Shimura correspondence により対応する相異なる二つの同時固有関数 f_1, $f_2 \in S(k+1/2, 4, 1)$ で $\mathbf{C}f_1 \neq \mathbf{C}f_2$ となるものが存在する事を示した．

この Niwa により見いだされた事実は，$S(k+1/2, 4, 1)$ に関する S.M.O. Theorem が其のままでは成立しないことを意味するわけである．

この事に関して，Kohnen [K] により，新しい概念が導入された．それを説明しよう．

N が丁度 4 で割り切れていると仮定する．つまり，$N = 4 \times$ (正の奇数) であると仮定する．この場合に次のような部分空間を考えよう．

$$S(k+1/2, N, \chi)_K := \left\{ \begin{array}{l} f = \sum_{n \geq 1} a(n)\mathbf{e}(nz) \in S(k+1/2, N, \chi) \ ; \\ a(n) = 0 \text{ if } (-1)^k \chi_2(-1)n \equiv 2, 3 \pmod 4 \end{array} \right\},$$

ここで χ_2 は χ の 2-成分である．また，$\mathbf{e}(z) := \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ である．

この部分空間（以下 Kohnen Space と呼ぼう）はウェイト $2k$, 奇数レベルの尖点形式の空間に Shimura Correspondence により対応する自然な部分空間であると考えることができる．

概念図をかいてみると，次のような感じである．M を正の奇数，χ を $4M$ で定義された even Dirichlet 指標で，$\chi^2 = 1$ となるものとする時，ヘッケ作用素のトレースの計算により次のようなことを示すことができる ([K],[U1])．

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & S(k+1/2, 8M, \chi) & \supseteq & S(k+1/2, 4M, \chi) & \supseteq & S(k+1/2, 4M, \chi)_K \\ & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \cdots & S(2k, 4M) & \supseteq & S(2k, 2M) & \supseteq & S(2k, M) \end{array}$$

ここで，$\Downarrow$ は Shimura Correspondence により対応することを意味する．また，特に，レベル 4 で $\chi = 1$ の時の絵をかいてみると，次のような感じになる．

$$\begin{array}{|c|ccc|c|} \hline S(k+1/2, 4, 1) & & * \Rightarrow & & S(2k, 2) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ S(k+1/2, 4, 1)_K & & * \Rightarrow & & S(2k, 1) \\ \oplus & & & & \oplus \\ \text{a copy of } S(k+1/2, 4, 1)_K & & * \Rightarrow & & \text{a copy of } S(2k, 1) \\ \oplus & & & & \oplus \\ \text{the orthogonal complement of the above subspaces} & & * \Rightarrow & & S^0(2k, 2) \\ \hline \end{array}$$

ここで，$*\Rightarrow$ は Shimura Correspondence によって 1 対 1 対応がつくことを意味する．

Kohnen [K] はこの Kohnen Space $S(k+1/2,4M,\chi)_K$ に対して，M が**平方因子のない正の奇数**で有る場合にニューフォームの理論を確立することに成功した．それについて説明しよう．

k, M, χ を上と同様なものであるとしよう．この時，"Oldform" のなす部分空間を次のように定義する．

$$S_{\mathrm{old}}(k+1/2,4M,\chi)_K := \sum_{\substack{0<A,B|M \\ B\neq M}} S(k+1/2,4B,\chi)_K\,|U(A^2)\,.$$

ここで，$U(A^2)$ は次の式で定義される Shift 作用素である．

$$\sum_{n\geq 1} a(n)\mathbf{e}(nz)|U(A^2) := \sum_{n\geq 1} a(A^2n)\mathbf{e}(nz)\,.$$

そして，"Newform" のなす空間をこの "Oldform" のなす空間 $S_{\mathrm{old}}(k+1/2,4M,\chi)_K$ の Kohnen Space $S(k+1/2,4M,\chi)_K$ の中での直交補空間であるとして定義する．それを，$S_{\mathrm{new}}(k+1/2,4M,\chi)_K$ とあらわそう．

ここで，正確にいえば，"Oldform" の空間の定義には不備がある．即ちχ が $4B$ で定義されない場合はどうするかということである．これは，適当な Shift 作用素を作用させて，Trivial な指標の場合に帰着させ，それをもう一度引き戻すというテクニックで対応する．これについては [K], [U1] を見られたい．

さて，この時 Kohnen [K] は次の著しい結果を得た．

Theorem([K]) M が平方因子を持たない正の奇数であると仮定する．この仮定のもとで以下が成立する．

(1) $S_{\mathrm{new}}(k+1/2,4M,\chi)_K$ はヘッケ作用素 $\tilde{T}(n^2)$, $(n,M)=1$ および $U(p^2)$, (p は M の任意の素因数) の同時固有関数からなる $\mathbf{C}$-基底を持つ．

(2) (1) に置ける基底の中のそれぞれの同時固有関数は Shimura Correspondence によって，$S^0(2k,M)$ の中の Primitive Form に 1 対 1 全射で対応する．したがって，特に S.M.O. Theorem が $S_{\mathrm{new}}(k+1/2,4M,\chi)_K$ に対して成立する． □

しかし残念ながら，この Kohnen の Formulation では，M に平方因子が出てくる場合を扱うことはできない．すこし記号を導入して説明しよう．

ψ を modulo r で定義された原始 Dirichlet 指標とする．この時 ψ に関する Twisting 作用素 R_ψ を次の式で定義する:

$$\sum_{n\geq 1} a(n)\mathbf{e}(nz)|R_\psi := \sum_{n\geq 1} a(n)\psi(n)\mathbf{e}(nz)\,.$$

特に，ψ が奇素数 p に関する Legendre 記号である時に，その Twisting 作用素を R_p という略号で表すことにする．

さらに，任意の正の奇数 A に対して，次の記号を定義する．

$$S^2(2k,A) := \sum_{0<B|A,\ \psi^2=1} \left(S^0(2k,B)|R_\psi \cap S^0(2k,A)\right)$$

ここで，ψ は $\psi^2=1$ を満たす原始指標を走る．つまりこの空間は，より低いレベルの尖点形式からの Twisting 作用素による Lift になっている部分である．

この空間 $S^2(2k,A)$ の $S^0(2k,A)$ の中における直交補空間を $S^*(2k,A)$ と表し，この空間の要素を "very-newform" とよび，この空間を very-newform のなす空間と呼ぼう．

この空間は，Atkin-Lehner 作用素 $W(p)$ による固有空間に細かく分解される．それを次のような記号であらわそう．

$$S^{*,\tau}(2k,A) := \{f\in S^*(2k,A)\ ;\ f|W(p)=\tau(p)f \text{ for all prime divisors } p \text{ of } M\}\ .$$

ここで，τ は A の奇素因子全体の集合から $\{\pm 1\}$ への任意の写像である．

この記号の下で，ヘッケ作用素のトレースの計算結果から次のようなヘッケ加群としての分解が得られた [U4].

p を奇素数とする．この時，ヘッケ加群として

$$\begin{aligned} S\bigl(k+1/2,4p^2,\mathbf{1}\bigr)_K &\cong 2\times S^{*,1}(2k,p^2)\\ &\qquad \oplus (1+\left(\frac{-1}{p}\right))\left\{S^0(2k,p)|R_p\oplus S(2k,1)|R_p\right\}\\ &\qquad \oplus 2\times S^0(2k,p)\oplus 4\times S^0(2k,1)\ . \end{aligned}$$

ここで，式の最初の行の上付き添え字の，1 は定数写像としての 1 である．この分解に出てくる重複度の 2 という数字から，この $S\bigl(k+1/2,4p^2,\mathbf{1}\bigr)_K$ に対しては Kohnen の Formulation が適用できないことが直ちに分かるのである．

筆者は，この重複度を取り除くために Twisting 作用素を用い，レベルに関する付帯条件無しに Kohnen Space に関するニューフォームの理論を確立することに成功した [U2]．それを次のセクションで説明する．

§3. Kohnen Space に対する Newform の Formulation.

k を任意の正の整数，M を任意の正の奇数（平方因子を持ってもかまわない）とする．また，χ を $4M$ で定義された even Dirichlet 指標で，$\chi^2=\mathbf{1}$ を満たすものであるとしよう．

また，$\Pi := \{M$ の素因数で $p^2|M$ を満たすもの $\}$ という記号を用いる．更に，δ_A, Shift 作用素 $U(A)$, Twisting 作用素 R_ψ 等を前と同じものとする．この時，

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}(k+1/2,4M,\chi)_K := &\sum_{\substack{0<B|M\\ B\neq M}}\ \sum_{\substack{0<A|(M/B)\\ \xi(\frac{A}{\cdot})=\chi}} S(k+1/2,4B,\xi)_K\,|\delta_A\\ &+\sum_{\substack{0<B|M\\ B\neq M}}\ \sum_{\substack{0<A|(M/B)^2\\ \xi(\frac{A}{\cdot})=\chi}}\ \sum_{\substack{\psi^2=\mathbf{1}\\ \mathfrak{f}(\psi)|l_\Pi}} S(k+1/2,4B,\xi)_K\,|U(A)R_\psi \end{aligned}$$

と定める．ここで，ξ は Modulo $4B$ で定義される Dirichlet 指標で，$\xi\left(\frac{A}{\cdot}\right)=\chi$ が Modulo $4M$ の指標として成り立つようなものを走る．また，ψ は Modulo $\mathfrak{f}(\psi)$ で定義された原始指標であり，$\psi^2=\mathbf{1}$ かつ $\mathfrak{f}(\psi)|l_\Pi := \prod_{p\in\Pi}p$ となるものを走る．

この定義式の右辺の第一項は，整数ウェイトの場合の "Oldform" の定義に一致している．また，第二項の方は，Kohnen の Formulation に出てきた "Oldform" の定義の拡張になっている．

この $\mathfrak{O}(k+1/2,4M,\chi)_K$ は Kohnen Space の部分空間になる．そして，この部分空間の直交補空間を $\mathfrak{N}(k+1/2,4M,\chi)_K$ と置く．

この補空間が SMO を満たすのならば単純明解であるが，残念ながら，そうはならない．この部分に重複度が出てくる．これを解消するために Twisting 作用素 R_p, $p \in \Pi$ を用いる．

まず，$\mathfrak{N}(k+1/2,4M,\chi)_K$ はこれらの R_p, $p \in \Pi$ で固定される事が分かる．R_p は Semi-simple 作用素になるので，これで分解することができる．それを次のように表わそう．

$$\mathfrak{N}(k+1/2,4M,\chi)_K = \bigoplus_{\kappa \in \mathrm{Map}(\Pi,\{\pm1\})} \mathfrak{N}^{\emptyset,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K\,,$$

$$\mathfrak{N}^{\emptyset,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K = \{f \in \mathfrak{N}(k+1/2,4M,\chi)_K\ ;\ f|R_p = \kappa(p)f \text{ for all } p \in \Pi\}.$$

ここで，$\mathrm{Map}(\Pi,\{\pm1\})$ は Π から $\{\pm1\}$ への写像全体の集合である．

この $\mathfrak{N}^{\emptyset,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K$ が求めるニューフォームの空間である．この空間は，次のような著しい性質を持つ．

Theorem ([U2]) (1) $\mathfrak{N}^{\emptyset,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K$ は全てのヘッケ作用素 $\tilde{T}(p^2)$, (p は素数で $p \nmid M$ なるもの全てを動く), および $U(p^2)$ (p は M の素因数全てを動く) に関する同時固有関数からなる $\mathbf{C}$-基底を持つ．それらは複素数の積を除き一意的に定まる．

f をそのような基底の中の任意の要素とする．そして，それぞれの固有値を，$f|\tilde{T}(p^2) = \lambda_p f$, $p \nmid M$ かつ $f|U(p^2) = \lambda_p f$, $p|M$ とする．この時 $F|T(p) = \lambda_p F$, $p \nmid M$ かつ $F|U(p) = \lambda_p F$, $p|M$ となる Primitive Form $F \in S^0(2k,M)$ が一意的に存在する．ここで，$T(p)$ は整数ウェイトでのヘッケ作用素である．

(2) $\mathfrak{N}^{\emptyset,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K$ に対する SMO theorem が成立する．したがって，ヘッケ加群としての埋めこみ

$$\mathfrak{N}^{\emptyset,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K \hookrightarrow S^0(2k,M)$$

が存在する．この時，この埋めこみの像が問題である．これに関していえば，どのような Primitive Form が像に出てくるか，[U2] に置いて具体的，明示的に決定されている．

(3) $\mathfrak{N}(k+1/2,4M,\chi)_K$ は一般に SMO を満たすとは限らない．反例については [U2] を見られたい．

$\mathfrak{O}(k+1/2,4M,\chi)_K$ もヘッケ作用素からなる同時固有関数を持つ．それらの固有値のシステムは M より低いレベルの Primitive Form に対応する．

(4) 以上のことから帰納的に $S(k+1/2,4M,\chi)$ は $\mathfrak{N}^{\emptyset,\kappa}(k+1/2,4B,\xi)_K$ のタイプのニューフォームの空間と δ_A, $U(A)$, R_ψ という自然な作用素達を用いて再構成（あるいは生成）されることが分かる．

これらの作用素達は，フーリエ係数にほとんど影響を与えないので，フーリエ係数を調べるに当たっては，このニューフォームの空間 $\mathfrak{N}^{\emptyset,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K$ の元のみを調べれば十分であることが分かる． □

さて，最後にもう少し細かいことについて述べておこう．上の定理で述べたように，ニューフォームの空間 $\mathfrak{N}^{\emptyset,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K$ はヘッケ加群として $S^0(2k,M)$ の中に埋めこまれる．しかしこの $S^0(2k,M)$ の中には，より低いレベルの尖点形式から Twisting 作用素により持ち上げられた部分が存在する．前の記号でいえば，$S^2(2k,M)$ の部分である．

そこで,「これを除いた "very-newform" の空間に対応する半整数ウェイトの空間を抜き出せないだろうか？」という疑問がおこる．このような部分こそ真のニューフォームと言えるのではないかという事でもある．

この問題については，ほぼ同様な枠組みで解決することができる ([U3])．ただし，残念ながらある特殊な場合は除かねばならない．結果を説明するために少し記号を定義する．

$$\mathfrak{O}^*(k+1/2,4M,\chi)_K := \sum_{\substack{0<B|M \\ B\neq M}} \sum_{\substack{0<A|(M/B) \\ \xi\left(\frac{A}{}\right)=\chi}} S(k+1/2,4B,\xi)_K\,|\delta_A$$
$$+ \sum_{\substack{0<B|M \\ B\neq M}} \sum_{0<A|(M/B)^2} \sum_{\substack{\xi,\psi \\ \xi\left(\frac{A}{}\right)\psi^2=\chi}} S(k+1/2,4B,\xi)_K\,|U(A)R_\psi$$

と定める．ここで，ξ は Modulo $4B$ で定義される Dirichlet 指標で，$\xi^2=\mathbf{1}$ となるもの，また，ψ は Modulo $\mathfrak{f}(\psi)$ で定義された原始指標であり，$\psi^4=\mathbf{1}$ かつ $\mathfrak{f}(\psi)|l_\Pi := \prod_{p\in\Pi} p$ となるもので，$\xi\left(\frac{A}{}\right)\psi^2=\chi$ が Modulo $4M$ の指標として成り立つようなものを走る．□

この $\mathfrak{O}^*(k+1/2,4M,\chi)_K$ は Kohnen Space $S(k+1/2,4M,\chi)_K$ の部分空間である事が示される．そして，$S(k+1/2,4M,\chi)_K$ の中での $\mathfrak{O}^*(k+1/2,4M,\chi)_K$ の直交補空間を $\mathfrak{N}^*(k+1/2,4M,\chi)_K$ と定義する．更にこの直交補空間を Twisting 作用素 R_p, $p\in\Pi$ で固有空間に分解する．

$$\mathfrak{N}^*(k+1/2,4M,\chi)_K = \bigoplus_{\kappa\in \mathrm{Map}(\Pi,\{\pm1\})} \mathfrak{N}^{*,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K$$
$$\mathfrak{N}^{*,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K = \{f\in\mathfrak{N}^*(k+1/2,4M,\chi)_K; f|R_p=\kappa(p)f \text{ for all } p\in\Pi\}$$

ここで，$\mathrm{Map}(\Pi,\{\pm1\})$ は Π から $\{\pm1\}$ への写像全体の集合である．□

さて，この記号のもとで次の結果が得られた ([U3])．

Theorem ([U3]) 記号を上の通りとする．指標 χ について次の仮定を置く．

『$p^2||M$ かつ $p\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ を満たす全ての $p\in\Pi$ に対して，$\chi_p=\mathbf{1}$ である』

この仮定のもとで，$\mathfrak{N}^{*,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K$ は次のような性質を持つ．

(1) $\mathfrak{N}^{*,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K$ は全てのヘッケ作用素 $\tilde{T}(p^2)$, (p は素数で $p\nmid M$ なるもの全てを動く), および $U(p^2)$ (p は M の素因数全てを動く) に関する同時固有関数からなる $\mathbf{C}$-基底を持つ．それらは複素数の積を除き一意的に定まる．

f をそのような基底の中の任意の要素とする．そして，それぞれの固有値を，$f|\tilde{T}(p^2)=\lambda_p f$, $p\nmid M$ かつ $f|U(p^2)=\lambda_p f$, $p|M$ とする．この時 $F|T(p)=\lambda_p F$,

$p\nmid M$ かつ $F|U(p)=\lambda_p F$, $p|M$ となる very-new Primitive Form $F\in S^*(2k,M)$ が一意的に存在する．ここで，$T(p)$ は整数ウェイトでのヘッケ作用素である．

(2) $\mathfrak{N}^{*,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K$ に対する SMO theorem が成立する．したがって，ヘッケ加群としての very-newform の空間の中への埋めこみ

$$\mathfrak{N}^{*,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K \hookrightarrow S^*(2k,M)$$

が存在する．この時，この埋めこみの像が問題である．これに関していえば，どのような very-new Primitive Form が像に出てくるか，[U3] に置いて具体的，明示的に決定されている．

(3) 明らかに，$\mathfrak{N}^*\kappa(k+1/2,4M,\chi)_K \subseteq \mathfrak{N}^{\emptyset,\kappa}(k+1/2,4M,\chi)_K$ が成り立つ． □

§4. **最後に** 幾つか気がついたことをコメントしておく．

（1）これらの結果の証明方法は次の通りである．まず半整数ウェイトのヘッケ作用素のトレースを計算する．次に，それらと整数ウェイトのヘッケ作用素のトレースの間に**トレース関係式**を見いだす（この関係式自体も興味深い）．最後にそれらの変形をして，ニューフォームの空間を抽出するというものである．

（2）前にかいた概念図を見ていただければ分かるように Kohnen Space はあくまでも，最初の段階にすぎない．レベルに 2 の巾がついてくるところが問題である．これについていうと，4, 8 のところはほぼ同様に解決できている．より高いところにおいては，ややことなる状況が存在する．たとえば，Trace Relation の形がまったく異なってくる．これらについてはもう少し問題は面倒である．

（3）これらの結果は，$\chi^2=1$ という指標についてのみのものであるが，これは本質的な理由というものでは無く，単に計算上の技術上のものである，筆者は信じている．

REFERENCES

[K] W. Kohnen, Newforms of half-integral weight, J. reine und angew. Math. **333** (1982), 32–72.

[N] S. Niwa, On Shimura's trace formula, Nagoya Math. J. **66** (1977), 183–202.

[U1] M. Ueda, On twisting operators and newforms of half-integral weight, Nagoya Math. J. **131** (1993), 135–205.

[U2] M. Ueda, On twisting operators and newforms of half-integral weight II –complete theory of newforms for Kohnen space , (M.P.I. Preprint series 96-71, to appear in Nagoya Math. J.).

[U3] M. Ueda, On twisting operators and newforms of half-integral weight III –Subspace corresponding to very-newforms , (M.P.I. Preprint series 96-150, to appear).

[U4] M. Ueda, The decomposition of the spaces of cusp forms of half-integral weight and trace formula of Hecke operators, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 505–555.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
NARA WOMEN'S UNIVERSITY
Nara 630 Japan
(E-Mail: m-ueda@cc.nara-wu.ac.jp)