数理解析研究所講究録
1002巻 1997年 82-88

Nearly holomorphic Eisenstein liftings

東工大・理　　水本信一郎
(Shin-ichiro Mizumoto)

1. A space of nearly holomorphic modular forms

$n \in \mathbf{Z}_{>0}$ とし、H_n を 次数 n の Siegel 上半空間とする。H_n 上の変数を以下 $z = x + iy$ とかく。ここで x と y は実行列。通常のように

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{R})$$

は H_n に

$$m\langle z\rangle := (az+b)(cz+d)^{-1}$$

で作用する。$\Gamma_n := \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{Z})$, $k \in \mathbf{Z}$ とする。関数

$$f\colon H_n \longrightarrow \mathbf{C}$$

が C^∞*-modular form of weight* $k \in \mathbf{Z}$ *for* Γ_n とは、f が x と y の成分の C^∞-function であり、保型性

$$f(m\langle z\rangle) = \det(cz+d)^k f(z) \quad \left(\forall m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n\right)$$

を満たすことをいう。それら全体のなす $\mathbf{C}$-vector space を $M_k^\infty(\Gamma_n)$ と書く。
次の条件 (i)–(iv) を満たす関数 f を考える。

(i) $f \in M_k^\infty(\Gamma_n)$,
(ii) 与えられた $\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して $\det(y)^\nu f(z)$ は、$\{z \in H_n \,|\, y \geq \delta 1_n\}$ $(\forall \delta > 0)$ で有界な holomorphic function を係数とする、y の成分の多項式。

f が (i) と (ii) を満たすなら、それは次のような Fourier 展開を持つ：

$$f(z) = \det(y)^{-\nu} \sum_{h \geq 0} p(h,y)\mathbf{e}(\sigma(hz)).$$

ここで $p(h,y)$ は y の成分の多項式, h は size n の symmetric positive semi-definite semi-integral matrices を動く。また $\mathbf{e}(x) := e^{2\pi i x}$ であり σ は行列の trace . この係数 $p(h,y)$ が次の条件 (iii),(iv) を満たすものとする:

(iii) 各 h に対して $\det(y)^\nu p(h,y^{-1})$ もまた y の成分の多項式、
(iv) もし $h = \begin{pmatrix} h_1^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(0 \leq r \leq n-1)$ なら $p(h,y)$ は $\det(y)$ と y の左上の $r \times r$ block の成分の多項式。

上の条件 (i)–(iv) を満たす関数 f の全体の成す **C**-vector space を $N_{k,\nu}(\Gamma_n)$ で表す。

Remark. (1) 条件 (i) と (iii) により、$N_{k,\nu}(\Gamma_n)$ の各元は Shimura [Sh2][Sh3] の意味の nearly holomorphic modular form である。
(2) 同様の空間（(i),(ii), (iv) (を modify したもの), 及びあといくつかの条件を加えたもの）が Satoh [Sa1] により研究された。

性質.

(1) $M_k(\Gamma_n)$ を Γ_n に関する weight k の holomorphic modular forms の空間とすると、定義より

$$M_k(\Gamma_n) = N_{k,0}(\Gamma_n) \subset N_{k,1}(\Gamma_n) \subset N_{k,2}(\Gamma_n) \subset \cdots .$$

(2) $f \in N_{k,\nu}(\Gamma_n)$, $g \in N_{\ell,\mu}(\Gamma_n)$ ならば $fg \in N_{k+\ell,\nu+\mu}(\Gamma_n)$.
(3)

$$\dim N_{k,\nu}(\Gamma_n) < \infty.$$

もっと詳しく、$kn \equiv 0 \pmod 2$ を満たしながら $k \to \infty$ となるとき、

$$\dim N_{k,\nu}(\Gamma_n) \asymp_n (\nu+1)k^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

(4) $r \in \mathbf{Z}$, $0 \le r < n$ とする。$f \in N_{k,\nu}(\Gamma_n)$, $z_1 \in H_r$ に対して

$$\Phi^{n,r}(f)(z_1) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 f \begin{pmatrix} z_1 & & & \\ & \xi_1 + it_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_{n-r} + it_{n-r} \end{pmatrix} d\xi_1 \cdots \xi_{n-r}$$

$(t_j > 0)$ とおく（類似の関数についてのこの定義は Satoh [Sa1] による）。すると **C**-linear map

$$\Phi^{n,r} \colon N_{k,\nu}(\Gamma_n) \longrightarrow N_{k,\nu}(\Gamma_r) \otimes_{\mathbf{C}} V_\nu(t_1^{-1}, \ldots, t_{n-r}^{-1})$$

が得られる (*Siegel operator*)。ここで

$$V_\nu(t_1^{-1}, \ldots, t_{n-r}^{-1})$$

は $t_1^{-1}, \ldots, t_{n-r}^{-1} \in \mathbf{R}_{>0}$ に関する多項式で各変数に関する次数が ν 以下のもの全体の成す空間、そして

$$N_{k,\nu}(\Gamma_0) := \mathbf{C} = \{\text{constant functions}\}.$$

$\Phi^{n,n-1}$ の kernel を $N_{k,\nu}^{\text{cusp}}(\Gamma_n)$ と書き、その元を *cusp form* と呼ぶ。
(5)

$$\frac{\partial}{\partial z} := \left(\frac{1+\delta_{j\ell}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z_{j\ell}} \right), \quad \text{但し} \quad z = (z_{j\ell})$$

とする。ここで $\delta_{j\ell}$ は Kronecker の delta. H_n 上の C^∞-functions に作用する Maass operator は

$$\delta_k := (2\pi i)^{-n} \det(y)^{\frac{n-1}{2}-k} \det(\frac{\partial}{\partial z}) \det(y)^{k-\frac{n-1}{2}}$$

で定義される。Shimura に倣って

$$\delta_k^{(\mu)} := \begin{cases} \delta_{k+2\mu-2}\cdots\delta_{k+2}\delta_k & \text{if} \quad \mu \in \mathbf{Z}_{>0}, \\ \mathrm{id} & \text{if} \quad \mu = 0, \end{cases}$$

とおく。このとき

$$\delta_k^{(\mu)} N_{k,\nu}(\Gamma_n) \subset N_{k+2\mu,\nu+\mu}(\Gamma_n), \quad \delta_k^{(\mu)} N_{k,\nu}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma_n) \subset N_{k+2\mu,\nu+\mu}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma_n).$$

(6) $N_{k,\nu}(\Gamma_n)$ 及び $N_{k,\nu}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma_n)$ は Hecke algebra $\mathcal{H}^{(n)}$ の作用のもとで stable. また $N_{k,\nu}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma_n)$ は Hecke eigenforms から成る basis を持つ。

Cusp form の例.

$$S_k(\Gamma_n) := \{\text{cusp forms} \in M_k(\Gamma_n)\} = N_{k,0}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma_n)$$

とするとき

$$\delta_{k-2\nu}^{(\nu)} S_{k-2\nu}(\Gamma_n) \subset N_{k,\nu}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma_n).$$

また $f \in N_{k,\nu}(\Gamma_n)$, $g \in N_{\ell,\mu}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma_n)$ ならば $fg \in N_{k+\ell,\nu+\mu}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma_n)$.

2. Eisenstein liftings

$n \in \mathbf{Z}_{>0}$, $r \in \mathbf{Z}$, $0 \le r \le n$,

$$\Delta_{n,r} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(n-r,n+r)} & * \end{pmatrix} \in \Gamma_n \right\}$$

とする。$f \in S_k(\Gamma_r)$ $(S_k(\Gamma_0) := \mathbf{C})$, $k \in 2\mathbf{Z}_{>0}$ に対して、f に付随した Γ_n に関する Langlands-Klingen 型の nonholomorphic Eisenstein series は次のように定義される：

$$[f]_r^n(z,s) := \sum_{m \in \Delta_{n,r}\backslash\Gamma_n} \left(\frac{\det(\mathrm{Im}(m\langle z\rangle))}{\det(\mathrm{Im}(m\langle z\rangle^*))} \right)^s f(m\langle z\rangle^*)\det(cz+d)^{-k}.$$

ここで $s \in \mathbf{C}$, $z \in H_n$ であり、$m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $\Delta_{n,r}\backslash\Gamma_n$ の一組の完全代表系を動く。また $m\langle z\rangle^*$ は $m\langle z\rangle$ の左上の $r \times r$ block である。右辺は任意の $\delta > 0$ に対し

$$\left\{ (z,s) \in H_n \times \mathbf{C} \,\middle|\, \sigma(x^2) \le \delta^{-1},\ y \ge \delta 1_n,\ \mathrm{Re}(s) \ge \frac{n+r+1-k}{2} + \delta \right\}$$

で一様収束する。$[f]_r^n(z,s)$ は s について全平面に有理型に解析接続される [La][Bö]。

Shimura [Sh4] により $k - 2\nu \ge \frac{n+r}{2} + 2$ のとき $[f]_r^n(z,-\nu)$ は nearly holomorphic である。実際 $[f]_r^n(z,-\nu) \in N_{k,\nu}(\Gamma_n)$ となっている。

Theorem. $n, r \in \mathbf{Z}$, $0 \le r < n$, $\nu \in \mathbf{Z}_{\ge 0}$; $k \in 2\mathbf{Z}$, $k - 2\nu \ge \frac{n+r}{2} + 2$ とする。

(1) $f \in S_k(\Gamma_r)$ に対して

$$\rho_\mu^{r,n}(f)(z) := [f]_r^n(z,-\mu) \quad (0 \le \mu \le \nu,\ \mu \in \mathbf{Z})$$

とおくと

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \rho_\mu^{r,n} : \underbrace{S_k(\Gamma_r) \oplus \cdots \oplus S_k(\Gamma_r)}_{(\nu+1)\text{ times}} \longrightarrow N_{k,\nu}(\Gamma_n)$$

は injective **C**-linear map となる。ここで f が Hecke eigenform ならば、$\rho_\mu^{r,n}(f)$ もそうである。各素数 p に対して $\rho_\mu^{r,n}$ のもとでの Satake p-parameters の対応は

$$\begin{aligned}&(\alpha_0(p), \alpha_1(p), \ldots, \alpha_r(p))\\ &\mapsto (p^{(n-r)\mu}\alpha_0(p), \alpha_1(p), \ldots, \alpha_r(p), p^{k-2\mu-r-1}, p^{k-2\mu-r-2}, \ldots, p^{k-2\mu-n})\end{aligned}$$

となる。特に standard L-functions (下の Remark 参照) の関係は

$$L(s, \rho_\mu^{r,n}(f), \mathrm{St}) = L(s, f, \mathrm{St}) \prod_{j=r+1}^{n} \zeta(s-k+2\mu+j)\zeta(s+k-2\mu-j).$$

さらに

$$\Phi^{n,r}\left(\rho_\mu^{r,n}(f)\right) = (t_1 \cdots t_{n-r})^{-\mu} f. \qquad (*)$$

(2) (Characterization) $k-2\nu \ge n+r+2$ で、$f \in S_k(\Gamma_r)$ が Hecke eigenform のとき、$\rho_\mu^{r,n}(f)$ は $(*)$ を満たす $N_{k,\nu}(\Gamma_n)$ の中の unique Hecke eigenform である。

Remark.
(1) $f \in M_k^\infty(\Gamma_n)$ を Hecke eigenform, $(\alpha_0(p), \alpha_1(p), \ldots, \alpha_n(p))$ を f の Satake p-parameter とするとき、f に付随した standard L-function は (formal に)

$$L(s, f, \mathrm{St}) := \prod_{p:\text{prime}} \left\{ (1-p^{-s}) \prod_{j=1}^{n} (1-\alpha_j(p)p^{-s})(1-\alpha_j(p)^{-1}p^{-s}) \right\}^{-1}$$

により定義される。上の定理に現れる場合や $f \in N_{k,\nu}^{\mathrm{cusp}}(\Gamma_n)$ のとき、この無限積はある右半平面で広義一様に絶対収束することが証明される。
(2) この type の lifting の存在は、次数 2 の場合の数値計算に基づいて、Satoh [Sa1] により予想されていた。
(3) Hecke equivariance の証明の idea は Böcherer 氏による。
(4) $\nu = 0$ の場合（すなわち holomorphic なとき）上の結果は Kurokawa [Ku] によって示された。

3. Applications

上の Theorem (2) には、いくつかの応用がある。

(A) Algebraicity.

次のような $f\in N_{k,\nu}(\Gamma_n)$ 全体を $N_{k,\nu}(\Gamma_n)_{\mathbf{Q}}$ で表す：

$$f(z)=\det(\pi y)^{-\nu}\sum_{h\geq 0}p(h,\pi y)\mathbf{e}(\sigma(hz))$$

と書くとき

$$p(h,y)\in\mathbf{Q}[y_{j\ell}|1\leq j\leq\ell\leq n].$$

すると Theorem の記号で

$$\rho_\mu^{r,n}(f)\in N_{k,\nu}(\Gamma_n)_{\mathbf{Q}}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$$

となっていることが示される。この空間には factor $\mathbf{C}$ への action により、$\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ が作用する。上の characterization により

$$\left(\pi^{-\mu(n-r)}\rho_\mu^{r,n}(f)\right)^\sigma=\pi^{-\mu(n-r)}\rho_\mu^{r,n}(f^\sigma)\quad(\forall\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbf{C})).$$

特に $\pi^{-\mu(n-r)}\rho_\mu^{r,n}$ は Fourier coefficients の algebraicity を保つ。

Remark. Holomorphic case にこの結果は [Ku], [Ha] によって得られていた。

(B) Triple product L-function の特殊値.

$$\mathcal{V}:=\left\{s\in\mathbf{C}^{(2)}\,\middle|\,{}^ts=s\right\}$$

とし、

$$\tau(k)\colon\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})\longrightarrow\mathrm{GL}(\mathcal{V})$$

を

$$\tau(k)(a)\cdot v=\det(a)^kv[{}^ta]\quad(a\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{C}),\ v\in\mathcal{V})$$

で定義される representation とする。$\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ の symmetric square representation を sym^2 とかくと、$\tau(k)\simeq\det^k\otimes\mathrm{sym}^2$ である。$M_{\tau(k)}(\Gamma_2)$ を

$$f(m\langle z\rangle)=\tau(k)(cz+d)\cdot f(z)\quad\left(\forall m=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_2\right)$$

を満たす $\mathcal{V}$-valued holomorphic functions f 全体の成す空間とする。

一方、[Sa2] に従って $N_{k,1}(\Gamma_2)$ の subspace $P_k(\Gamma_2)$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned}P_k(\Gamma_2):=&M_k(\Gamma_2)+\delta_{k-2}M_{k-2}(\Gamma_2)\\&+\left\langle f\delta_jg\,|\,f\in M_{k-2-j}(\Gamma_2),\,g\in M_j(\Gamma_2),\,0\leq j\leq k-2\right\rangle_{\mathbf{C}}.\end{aligned}$$

ここで $k\in 2\mathbf{Z}_{>0}$, また $\langle\cdot\rangle_{\mathbf{C}}$ は $\mathbf{C}$-linear span. [Sa2] により Hecke equivariant map

$$D\colon M_{\tau(k-2)}(\Gamma_2)\longrightarrow P_k(\Gamma_2)$$

が存在する。上の characterization を用いると、この D は2種類の Eisenstein liftings

$$[\cdot]_\tau\colon S_k(\Gamma_1)\longrightarrow M_{\tau(k-2)}(\Gamma_2)$$

及び

$$\rho_1^{1,2}: S_k(\Gamma_1) \longrightarrow N_{k,1}(\Gamma_2)$$

を intertwine することがわかる。

Remark. 講演後、織田・池田両氏より、上の関係がもっと一般の場合に表現論から自然に出てくることを丁寧に説明して頂いた (cf. [Sh3, Propositon 3.3])。ここでは、以下の計算に使うためにこの特殊な場合をとりあげた、ということで御了解願いたい。

$\Delta_{12} \in S_{12}(\Gamma_1)$ を normalized Hecke eigenform とし、$L(s, \Delta_{12}^{\otimes 3})$ をそれに付随した triple product L-function (次数 8 の Euler 積) とする。$L(s, \Delta_{12}^{\otimes 3})$ の critical points (の右半分) は $17, 18, \cdots, 22$ である。$s = 17$ は関数等式の中心で、関数等式の符号がマイナスであることから

$$L(17, \Delta_{12}^{\otimes 3}) = 0$$

である。Garrett の integral representation [Ga1][Ga2] (cf. [Sa3]) より、$0 \leq \mu \leq 4$ に対して $L(22-\mu, \Delta_{12}^{\otimes 3})$ は essential に

$$\left(\left([\Delta_{12}]_1^2\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, -\mu\right), \Delta_{12}(z)\right), \Delta_{12}(w)\right)$$

に等しい。$\mu = 0$ の時この量は holomorphic modular form の理論の範囲内で容易に求まる。$\mu = 1$ の時、上で述べた D と Eisenstein liftings の関係を用いると

$$\begin{aligned}&[\Delta_{12}]_1^2\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, -1\right)\\ =&\frac{64\pi}{5}\Delta_{12}(z)\Delta_{12}(w) - \frac{2\pi}{5}\left(\Delta_{12}(z)\delta_{10}E_{10}(w) + \delta_{10}E_{10}(z)\Delta_{12}(w)\right)\end{aligned}$$

が得られる。ここで $E_{10} \in M_{10}(\Gamma_1)$ は constant term $= 1$ の holomorphic Eisenstein series. このことから

$$\frac{L(21, \Delta_{12}^{\otimes 3})}{\pi^{51}(\Delta_{12}, \Delta_{12})^3} = \frac{2^{54}}{3^{16} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$$

がわかる。この値は Zagier の予想した値 [Za, p.120] と一致する。

References

[Bö] Böcherer, S., *Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe*, J. Reine Angew. Math. **362** (1985), 146–168.

[Ga1] Garrett, P. B., *Pullbacks of Eisenstein series; applications*, Prog. Math., vol. 46, Birkhäuser, 1984, pp. 114–137.

[Ga2] Garrett, P. B., *Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple products*, Ann. Math. **125** (1987), 209–235.

[Ha] Harris, M., *The rationality of holomorphic Eisenstein series*, Inv. math. **63** (1981), 305–310.

[Ku] Kurokawa, N., *On Eisenstein series for Siegel modular groups*, Proc. Japan Acad. **57A** (1981), 51–55; *Part II*, Ibid. **57A** (1981), 315–320.

[La] Langlands, R. P., *On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series*, Lect. Notes in Math. vol. 544, Springer, 1976.

[Sa1] Satoh, T., *Various observations on non-holomorphic modular forms*, Unpublished manuscript (1985).

[Sa2] Satoh, T., *On certain vector valued Siegel modular forms of degree two*, Math. Ann. **274** (1986), 335–352.

[Sa3] Satoh, T., *Some remarks on triple L-functions*, Math. Ann. **276** (1987), 687–698.

[Sh1] Shimura, G., *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. pure appl. Math. **29** (1976), 783–804.

[Sh2] Shimura, G., *On a class of nearly holomorphic automorphic forms*, Ann. Math. **123** (1986), 347–406.

[Sh3] Shimura, G., *Nearly holomorphic functions on hermitian symmetric spaces*, Math. Ann. **278** (1987), 1–28.

[Sh4] Shimura, G., *Eisenstein series and zeta functions on symplectic groups*, Inv. Math. **119** (1995), 539–584.

[Za] Zagier, D., *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*, Lect. Notes in Math., vol. 627, Springer, 1977, pp. 105–169.