

離散時間可積分系と数値計算法

大阪大学基礎工学研究科 中村 佳正 (Yoshimasa Nakamura)

1 可積分系の差分化と数値計算アルゴリズム

近年の可積分系研究の動向の中で特筆すべきは応用数学・応用数理的側面の進展であろう。とりわけ、最適化アルゴリズム、固有値計算法、加速法などの数値計算法と可積分系との密接なかかわりの認識を足掛かりとして新しい研究領域が形成されつつある。そこでは、可積分系が単なる非線形微分方程式の解法ではなく、連続・離散を問わず何らかの量を厳密かつ具体的に計算するための数理的方法論となっている。

本論では可積分系の数値計算法への応用、特に、可積分系の差分化によるアルゴリズム開発について著者とその周辺による最新の研究成果を解説する。問題の設定を明らかにするために、可積分系と応用数学のもう一つの接点、可積分系の差分法について少し詳しく触れることとする。また、可積分系と数値計算法の出合いはソリトン理論の成立より古く、今から40年以上も前にさかのぼることを例示する。

差分法についてよく知られた注意 (cf. [7]) をここでも導入とする。連続時間 $0 \leq t < \infty$ に依存する変数 $r(t)$ の差分化を $r_n, n = 0, 1, 2, \dots$, とかく。ここに、 t と n は差分間隔 $\varepsilon > 0$ を用いて互いに

$$t = n\varepsilon$$

の関係にあるとする。従って、 r_n は $r(t) = r(n\varepsilon)$ の差分近似を表す。

まず例として線形方程式の Euler 前進差分を取り上げよう。この差分法によって微分方程式 (連続系)

$$\frac{dr(t)}{dt} = r(t)$$

は差分化されて差分方程式 (差分系)

$$r_{n+1} - r_n = \varepsilon r_n$$

となるが、逆に、差分系は $\varepsilon \rightarrow 0$ なる極限操作によってもとの連続系にもどる。

この差分系は $1 + \varepsilon$ を公比とする等比数列の漸化式であるからその一般項 (差分系の解) は容易にわかり $r_n = r_0(1 + \varepsilon)^n$ である。 $(1 + \varepsilon)^n = (1 + \varepsilon)^{t/\varepsilon}$ は指数関数 e^t の差分近似となっている。 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon} = e$ に注意せよ。ゆえに、線形方程式の Euler 差分は、解のレベルにおいても、任意の初期値 $r(0)$ と任意に大きな差分間隔 ε について連続系の解 $r(t) = r(0)e^t$ を近似している。

非線形方程式についてはこのようなことは一般に期待できない。典型的な例としてロジスティック方程式

$$\frac{dr(t)}{dt} = r(t)(1 - r(t))$$

をみよう。Euler 前進差分によって差分系

$$r_{n+1} - r_n = \varepsilon r_n(1 - r_n)$$

を得るが、この差分系は有名なロジスティック写像と等価で、差分間隔が $2.57 \leq \varepsilon \leq 3$ のとき解はカオスの挙動を起こすことが知られている。連続系の挙動とは全く異なる振る舞い（数値カオス）は安易な差分化への戒めとなっている。 $\varepsilon = 3$ のときを除いてこの差分系の解の表式はわかっていない。

ロジスティック方程式については森下差分とよばれる巧妙な差分化が存在する。まず変数変換

$$y(t) \equiv \frac{1}{r(t)} - 1$$

によりロジスティック方程式を線形方程式 $dy(t)/dt = -y(t)$ に変換する。このレベルで Euler 後退差分を行い $y_{n+1} - y_n = -\varepsilon y_{n+1}$ とする。最後に、逆変換

$$r_n \equiv \frac{1}{1 + y_n}$$

により非線形レベルでの差分系

$$r_{n+1} - r_n = \varepsilon r_n(1 - r_{n+1})$$

を得る。この差分系の解は

$$r_n = \frac{r_0(1 + \varepsilon)^n}{1 - r_0(1 - (1 + \varepsilon)^n)}$$

で与えられ、 $0 < r_0 < 1$ なる任意の初期値と任意に大きな差分間隔 ε について、 $n \rightarrow \infty$ で連続系の安定な平衡点 $r(\infty) = 1$ に収束する。もちろん解は連続極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ でロジスティック方程式の解に移行する。このような差分化は線形化可能な非線形微分方程式（素朴な意味での可積分系）なら常に可能と考えられるが、もとの非線形の変数に戻したとき大きな ε について連続系の挙動を再現するには方程式ごとに工夫を必要とする。後退差分をとったのもそのためである。もし前進差分を採用すれば $y_{n+1} - y_n = -\varepsilon y_n$ より

$$r_{n+1} - r_n = \varepsilon r_{n+1}(1 - r_n)$$

を得るが、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$ となるためには $\varepsilon < 1$ でなければならない。注目すべきは、後退差分の場合に差分間隔 ε を大きくすればするほど平衡点への収束に至る計算回数が減少することである。

以上の例を通じて可積分系、すなわち、なんらかの意味で線形化可能な非線形微分方程式の「可積分差分」の概念を導入することができよう。ここでは線形化された微分方程式の差分化をもとの非線形の変数による表現に戻したもので次の性質をもつ差分系を可積分差分とよぶことにする。

- 1) 差分系の解を書き下すことが可能で解は連続系の解の差分近似となっている。
- 2) 連続系が保存量, $I_0(r(t))$: t について一定, をもてば, 差分系も差分間隔 ε に依存した保存量, $I_\varepsilon(r_n)$: n について一定, をもつ。
- 3) 任意に大きな差分間隔 ε と広い範囲の初期値について連続系の解の挙動を再現する。
- 4) 連続系に安定な平衡点が存在すれば, 同じ平衡点に指数関数的に収束する。

可積分差分の例は Rutishauser[23], 森下正明 (1965) を先駆けとするが, 性質 1), 2) を満たす差分系を離散時間可積分系とよべば, その体系化は広田良吾氏 (cf. [5]-[9]) による。広田氏のソリトン方程式のタウ関数レベルでの差分化は §3 で論じるように, より基本的には線形分散関係式の Euler 差分である。性質 2) の保存量の存在により差分系の解は連続系の解を忠実にトレースするのではなく, 連続系の解を ε に依存して変形した軌道上を時間発展することがわかる。ゆえに, 可積分差分であることは ε が大きくても連続系の解をひどく逸脱しないことを保証する (cf. [19])。性質 3), 4) は後述するように応用数理的な観点とカオス系を除く目的で付加された要請である。線形化を経た前進差分によるロジスティック方程式の差分化は, 本論の定義では, 離散時間可積分系であっても 3) に反し可積分差分とはよべない。

可積分差分の問題点としては既に述べたことを含めて以下があげられよう。

- i) 可積分系に対してのみ適用可能である。
- ii) 線形レベルでの差分化といえども Euler 前進差分とは限らない。連続時間系の定数や初期値をも差分間隔 ε による変形をしなければならないことがある。
- iii) もとの非線形レベルの変数に戻す手続きに方程式ごとの工夫を要する。
- iv) 丸め誤差に対する数値安定性や線形安定性, 陽解法であるかどうかの保証はない。
- v) 初期値によっては差分系の解に特異点が現れることがある。

可積分系といえども偏微分方程式では勝手な初期値からの時間発展を書き下すことはできない。ゆえに, たとえ可積分系専用であっても信頼のおける数値計算法の開発は重要である。タウ関数のような特殊解から差分化の指針を得ることは怪しむにはあたらない。そればかりか, 可積分系に摂動項やノイズ項が加わった近可積分系に対しても可積分な部分に注目した差分法がかなり有効ではないかとの期待がある。問題点 i) についてこの方面の研究者間では以上のように了解されている。しかし, まだ広く知られているわけではない。問題点 ii) と iii) については今後さらに事例を増やす中である程度解決されていくであろう。変数のとり方が複数あれば, いくつかの離散時間可積分系が得られ, 性質 3) によりそれらを絞り込んでいくことになる。iv) の数値安定性については保存量による誤差の把握が

考えられる。陰解法の場合は緩和法を必要とするが計算量と誤差が新たな問題となる。問題点 v) を例示するためロジスティック方程式の可積分差分を

$$r_{n+1} = \frac{(1-\varepsilon)r_n}{1+\varepsilon r_n}$$

と離散 Riccati 方程式の形に書く。 $r_n < 0$ の範囲では初期値の設定によって $1 + \varepsilon r_n = 0$ となりえる。ロジスティック方程式の解が有限時間で爆発することに対応する現象であるが、数値計算法として好ましいことではない。 $r_{n+1} = \infty$ となっても適当な極限操作によって次のステップを $r_{n+2} = (1-\varepsilon)/\varepsilon$ と与えれば r_{n+2} 以降は有限の値を回復することに注意しよう。特異点（この場合は極）が閉じ込められているとみて、この性質を離散パンルベ性ということがある [22]。v) の対処法としては初期値を取り替えて特異点を避けたり、プログラム上で例外処理を行うなどがある。いずれにせよ、Runge-Kutta 法や擬スペクトル法のような汎用的な数値計算法に満足できない局面では、可積分差分のような方程式に内在する構造に注目した処方が重要となろう。

なお、ii) を逆手にとって、前進差分、q-差分どころか不等間隔差分にまで拡張しても可積分な離散時間ソリトン方程式を構成できるとのことである（本研究会における広田氏の講演）。もはや可積分系の時間の流れは一樣でも一方向でもない。従属変数の離散化（高橋氏と時弘氏の講演）とあわせて、完全に離散的なマッピングだけの世界が離散時間可積分系の住む世界となりそうである。離散力学系一般において可積分系はいかに特徴づけられるのだろうか。この点で佐藤理論の時間離散化の試み（辻本氏の講演）や具体的な解をもつ場合のロジスティック写像（カオス系）の一般化（梅野氏の講演）は示唆的である。解をもつこととカオス性は相反する概念ではないので、解をもつような差分化は必ずしも可積分差分を結果しないことになる。しかし、解や線形化を超えたところに決定的な手がかりが見あたらないのも事実である。そこで当面は対象を可積分系に限るだけでなく、差分化の方法と結果の両方に条件を設け、線形化を経由して得られた差分系が性質 3) をも満足することを要請するのである。

さて、もし可積分系が同時に勾配系であれば、その可積分な差分化を通じて、より少ない計算回数で勾配系の平衡点を与える数値計算アルゴリズムの開発が可能になるであろう。性質 3), 4) がその根拠である。勾配系でなくとも、平衡点や解が最適化問題、固有値問題、近似問題、代数方程式などの解を与えるようなそんな可積分系であればよい。差分法を非線形現象やモデルの理解のための微分方程式のシミュレーションではなく、見方を変えて、アルゴリズム開発に用いるのである。また、知られたアルゴリズムの連続極限が可積分系となることがわかれば、解の表現や保存量などからアルゴリズムの数理構造の解明が進むと期待される。本稿 § 2 と § 3 では

「可積分系の可積分差分によるアルゴリズム開発」

に関する最新の結果を解説する。可積分系と数値計算アルゴリズムについての研究の流れは § 4 でまとめる。

2 Rayleigh 商の勾配系の可積分差分とベキ乗法

この節では平衡点をもつ可積分系として Rayleigh 商の勾配系を取り上げ、その可積分差分により与えられた実対称行列の最大固有値を計算するアルゴリズムを実現する [20].

A を

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N-1} < \lambda_N$$

なる固有値をもつ $N \times N$ 実対称行列、 \mathbf{x} を N 次ベクトルとする. Rayleigh 商

$$R_A(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \equiv \frac{\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

について $\lambda_N = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} R_A(\mathbf{x})$ がよく知られている. そこで A の最大固有値 λ_N を球面上の $R_A(\mathbf{x})$ の勾配系 (最急上昇方程式)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle \mathbf{x} \quad (1)$$

の平衡点 (λ_N の固有ベクトル) を通じて求めよう. 初期値が $\|\mathbf{x}(0)\|=1$ を満たすものとするれば, $\|\mathbf{x}(t)\|=1$ は明らかである. この勾配系はニューラルネットによる主成分分析や回帰直線の最小 2 乗推定にも登場する. 数理生物学には突然変異のないレプリケーター方程式として現れる.

A を対角化する直交行列 P によって $\mathbf{r}(t) \equiv P^\top \mathbf{x}(t)$ なる変数変換をすれば (1) は

$$\frac{dr_j^2}{dt} = 2\lambda_j r_j^2 - 2r_j^2 \sum_{k=1}^N \lambda_k r_k^2, \quad \|\mathbf{r}(t)\|=1 \quad (2)$$

に簡単化される. 以下 (2) の可積分差分を先に考える. (2) は唯一の安定な平衡点 $\mathbf{r}(\infty) = (0, \dots, 0, 1)^\top$ をもち, 有限非周期戸田方程式を等エネルギー曲面上に制限した力学系 [10] に一致する. ここでは λ_j は質点の運動量 (保存量) という力学的意味をもつ.

変形された勾配系 (2) の文献 [14] における線形化を出発点とする. 有限非周期戸田方程式は Cauchy 指数 N の N 次有理関数のパラメータ空間上の 1 パラメータ流とみなせる. この流れは対応する可制御可観測システムの伝達関数の零点の軌跡となっている [11]. システムに対する Markov パラメータの導入によって戸田方程式の流れは線形化される. 実際, 変数 $h_k(t) \equiv \sum_{j=1}^N \lambda_j^k r_j^2(t)$, $k = 0, 1, \dots$, および $g_k(t) \equiv g_0(t) h_k(t)$, $d \log g_0(t) / dt \equiv 2h_1(t)$ の導入によって (2) は線形系

$$\frac{dg_k}{dt} = 2g_{k+1} \quad (3)$$

に帰着する. 変数 g_k のうち独立なものは N 個で, 解は

$$g_k(t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^k r_j^2(0) \exp(2\lambda_j t)$$

により与えられる.

さて, ε を差分間隔とし, $t = n\varepsilon, n = 0, 1, \dots$, なる n について時間変数を差分化しよう. 線形系における微分を Euler の前進差分で

$$\frac{dg_k(t)}{dt} \implies \Delta_n g_k(n) \equiv \frac{g_k(n+1) - g_k(n)}{\varepsilon} \quad (4)$$

と置き換える. 差分系では $g_k(t) = g_k(n\varepsilon)$ の差分近似を $g_k(n)$ とかいている. 連続極限で $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_k(n) = g_k(t)$ となる解は一意的ではないが (§1 の問題点 ii)), 以下, ε をパラメータとする

$$g_k(n) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^k(\varepsilon) r_j^2(0) (1 + 2\varepsilon \lambda_j(\varepsilon))^n$$

なる解を考えよう. ここに, $\lambda_j(\varepsilon)$ は $\lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j / (1 - 2\varepsilon \lambda_0)$ なる量, λ_0 は $\lambda_0 < \lambda_1$ なる任意の定数である. 連続系での定数 λ_j も差分変形されていることに注意する. $n = t/\varepsilon$ において $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば $g_k(n) \rightarrow g_k(t)$ が確かめられる.

連続極限で $h_k(n) \rightarrow h_k(t), r_j(n) \rightarrow r_j(t)$ となる変数 $h_k(n), r_j(n)$ の導入も一意ではないが, ここでは

$$h_k(n) \equiv \frac{g_k(n-1)}{g_0(n)}, \quad \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^k(\varepsilon) r_j^2(n)}{1 + 2\varepsilon \lambda_j(\varepsilon)} \equiv h_k(n) \quad (5)$$

による変数変換を行う. 特に, $h_k(n)$ の導入は試行錯誤を経て発見されたもので, このよう
に選んだとき差分系は比較的簡単な形となる. 問題点 iii) を想起されたい.

以上の結果, 変形された勾配系 (2) の可積分差分

$$\Delta_n r_j^2(n) = 2\lambda_j(\varepsilon) r_j^2(n) - r_j^2(n+1) \sum_{i=1}^N \lambda_i(\varepsilon) r_i^2(n) \quad (6)$$

を得る. 実際, §1 の性質 1) ~ 4) は以下のように確認される. 差分系 (6) は具体的に解けて解は

$$r_j^2(n) = \frac{r_j^2(0) (1 + 2\varepsilon(\lambda_j - \lambda_0))^n}{\sum_{i=1}^N r_i^2(0) (1 + 2\varepsilon(\lambda_i - \lambda_0))^n} \quad (7)$$

で与えられる. 解 $r_j(n)$ は任意の時刻 n において連続系の拘束条件 $\|\mathbf{r}(n)\| = 1$ を満たす. さらに,

定理 1 ほとんどすべての初期値に対して差分間隔 ε が

$$\varepsilon > 0 \quad \text{または} \quad \varepsilon < \varepsilon_0 \equiv -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_N - 2\lambda_0} \quad (8)$$

を満たせば, かつその場合に限り, 解 (7) は $n \rightarrow \infty$ において連続系の安定な平衡点に収束する.

ほとんどすべての初期値とは, (6) を離散 Riccati 方程式系

$$r_j^2(n+1) = \frac{(1 + 2\varepsilon(\lambda_j - \lambda_0))r_j^2(n)}{\sum_{i=1}^N (1 + 2\varepsilon(\lambda_i - \lambda_0))r_i^2(n)}$$

の形にかいたとき、すべての時刻で分母がゼロにならないような初期値のことである。この場合を除外すれば差分間隔 ε は正だけでなく負の値もとることができる。

差分系 (6) は行列とベクトルを用いて

$$\mathbf{r}(n+2) = \frac{(I + 2\varepsilon(D - \lambda_0 I))\mathbf{r}(n)}{\|(I + 2\varepsilon(D - \lambda_0 I))\mathbf{r}(n)\|}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

と表すことができる。ここに D は A を直交行列 P によって対角化した行列、 n はひとつおきの時間発展である。 $\mathbf{r}(n)$ についての表現をもとの変数 $\mathbf{x}(n)$ に戻せば Rayleigh 商の勾配系 (1) の可積分差分

$$\mathbf{x}(n+2) = \frac{\left(A - \left(\lambda_0 - \frac{1}{2\varepsilon}\right)I\right)\mathbf{x}(n)}{\left\|\left(A - \left(\lambda_0 - \frac{1}{2\varepsilon}\right)I\right)\mathbf{x}(n)\right\|} \quad (9)$$

を得る。 $\mathbf{x}(n)$ は $n \rightarrow \infty$ で最大固有値 λ_N に対応する固有ベクトルに収束し、これに対応最大固有値 λ_N を計算するアルゴリズムが実現されたが、(9) は原点移動

$$u \equiv \lambda_0 - \frac{1}{2\varepsilon}$$

をとともなうベキ乗法の漸化式に他ならない。

しかし、可積分差分を通じて定式化されたベキ乗法には具体的な解の情報が使える利点がある。実際、以下が証明できる。

定理 2 最大固有値 λ_N に最も速く収束するような原点移動と差分間隔の大きさは、それぞれ、

$$u_{\text{opt}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_{N-1}}{2}, \quad \varepsilon_{\text{opt}} = -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_{N-1} - 2\lambda_0} < \varepsilon_0 \quad (10)$$

である。

この節において実対称行列の Rayleigh 商の勾配系の可積分差分が得られた。差分系の解は広い範囲の差分間隔 ε について連続系の安定な平衡点に収束する。なお、差分系のひとつおきの時間発展は原点移動を伴うベキ乗法の漸化式に他ならない。この差分系の解を用いてベキ乗法における最適な原点移動の大きさを決定することができた。最適な原点移動の大きさは意外にも ε が負となる場合であった。可積分な勾配系の可積分差分といえども必ずしも新しいアルゴリズムとなるとは限らないが、既成のアルゴリズムの改良や理解の助けになりうるということがわかる。

3 離散時間戸田分子による Laplace 変換の計算

ソリトン理論のキーワードのひとつにタウ関数とよばれる線形微分方程式系の解のなす行列式がある。ソリトン方程式はタウ関数の満たすべき方程式（広田形式, bilinear form）に変換され、線形系の解を用いて比較的容易にソリトン解を構成することができる。有限非周期戸田方程式のような有限自由度可積分系に対してもソリトン解とは異なるタイプのタウ関数（分子型のタウ関数）を導入できる (cf. [6])。実はこのタウ関数は離散時間可積分系概念を通じて 1950 年代の数値解析の研究に深いかわりをもつ。この節では分子型のタウ関数をもつ離散時間可積分系による Laplace 変換の計算法について概説する。

分子型の解は戸田方程式に代表される離散空間上の可積分系に特有にみられる。ソリトン解が無限戸田格子の解であったのに対して、分子解は有限非周期または半無限格子の解で、同一の方程式の異なる境界条件と自由度のもとでの解ということになる。[6] に従って、分子解を持つ場合の戸田方程式を境界条件を込めて戸田分子ということにする。分子という名は格子点が $t \rightarrow \infty$ では自由粒子とみなせること [10] に由来する。一方、ソリトン解をもつ場合に限り戸田格子とよんで区別することができる。

ここでは、まず、連続時間の戸田分子のタウ関数を準備する。タウ関数が線形方程式の解の定める行列式で与えられる点はソリトン解の場合と同様であるが明瞭な相違点もある。線形系

$$\frac{dg_k}{dt} = g_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

によって定まる Hankel 行列式

$$\tau_k(t) \equiv \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{k-1} \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k-1} & g_k & \cdots & g_{2k-2} \end{vmatrix} (t), \quad \tau_0(t) \equiv 1 \quad (11)$$

が戸田分子のタウ関数である。有限 (N 格子) 系の場合は (3) に帰着し $\tau_{N+1} = \tau_{N+2} = \dots = 0$ なる付帯条件がある。Hankel 行列式についての Jacobi の公式

$$\tau_k \cdot \begin{vmatrix} g_0 & \cdots & g_{k-2} & g_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{k-2} & \cdots & g_{2k-4} & g_{2k-2} \\ g_k & \cdots & g_{2k-2} & g_{2k} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g_0 & \cdots & g_{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-2} & \cdots & g_{2k-3} \\ g_k & \cdots & g_{2k-1} \end{vmatrix}^2 = \tau_{k-1} \cdot \tau_{k+1}$$

よりタウ関数は

$$\tau_k \cdot \frac{d^2 \tau_k}{dt^2} - \left(\frac{d\tau_k}{dt} \right)^2 = \tau_{k-1} \cdot \tau_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

を満たすことが従う。(12) は戸田分子の広田形式に他ならない。 $\tau_k(t)$ の成分の満たす線形系 $dg_k/dt = g_{k+1}$ が戸田分子の線形分散関係式である。戸田分子の解の $t \rightarrow \infty$ での挙動は、ソ

リトン解とは異なり, $\tau_k(t) \rightarrow 0$ となる. なお戸田格子の広田形式では右辺が $\tau_{k-1} \cdot \tau_{k+1} - \tau_k^2$ となり, かつ $\tau_k(t)$ は Wronski 行列式であるので注意を要する.

変数変換

$$V_k(t) \equiv \frac{d^2 \log \tau_k}{dt^2}, \quad J_k(t) \equiv \frac{d \log(\tau_{k-1}/\tau_k)}{dt} \quad (13)$$

によって (12) から戸田分子方程式

$$\frac{dV_k}{dt} = V_k(J_k - J_{k+1}), \quad \frac{dJ_k}{dt} = V_{k-1} - V_k, \quad V_0(t) = 0 \quad (14)$$

を回復する. 条件 $V_0(t) = 0$ が戸田分子を特徴づけている. なお, 再度の変数変換 $V_k(t) \equiv \exp(Q_k(t) - Q_{k+1}(t))$ によりよく知られた完全積分可能な Hamilton 系の表現

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_k},$$

$$H(Q_k, P_k) \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N P_k^2 + \sum_{k=1}^N \exp(Q_{k-1} - Q_k)$$

を得る. ここで添字 k が差分化された空間座標を表すことがはっきりする. 以上の戸田分子の変形は実際の研究の流れを逆にたどったものであるが, 戸田分子の可積分差分を行う上で都合がよい.

有限戸田分子の一般解は

$$g_0(t) = \sum_{j=1}^N \exp(\lambda_j t + \omega_j), \quad \lambda_j \neq \lambda_\ell$$

により与えられ, 対応するタウ関数は $\tau_k(t) > 0, k = 1, \dots, N$, を満足する. これにより有限戸田分子は正定値 Hankel 行列の空間上で線形化されるとわかる [14]. 最初は確率分布族のパラメータ空間として導入された甘利俊一氏の情報幾何 (双対平坦構造をもつ Riemann 多様体の幾何学) であるが, 正定値 Hankel 行列の空間もその一例となっている (cf. [21]). 戸田分子を線形化する変数 $\{g_k\}$ はこの空間の ∇ -アフィン座標, $-\log \tau_N$ は双対ポテンシャル他ならない.

さて, タウ関数のレベルでの差分化について述べよう. Hankel 行列の各成分はいずれも $g_0(t)$ の導関数であることに注意し, §2 と同様に微分を Euler の前進差分 (4) で, 高階微分は高階差分で置き換える. この結果, (11) から連続系のタウ関数 $\tau_k(t) = \tau_k(n\varepsilon)$ の差分近似

$$\tau_k(n) \equiv \begin{vmatrix} g_0(n) & \Delta_n g_0(n) & \cdots & \Delta_n^{k-1} g_0(n) \\ \Delta_n g_0(n) & \Delta_n^2 g_0(n) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_n^{k-1} g_0(n) & & \cdots & \Delta_n^{2k-2} g_0(n) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{k(k-1)}} \begin{vmatrix} g_0(n) & g_0(n+1) & \cdots & g_0(n+k-1) \\ g_0(n+1) & g_0(n+2) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_0(n+k-1) & & \cdots & g_0(n+2k-2) \end{vmatrix} \quad (15)$$

が得られる。連続の場合と同様に Jacobi の公式より 離散時間戸田分子の広田形式

$$\tau_k(n)\tau_k(n+2) - \tau_k(n+1)^2 = \varepsilon^2 \tau_{k-1}(n+2)\tau_{k+1}(n), \quad \tau_0(n) \equiv 1 \quad (16)$$

に到達する。これが実際に戸田分子の差分化であることは以下のようにして確かめられる。
変数変換

$$V_k(n) \equiv \frac{\tau_{k-1}(n+1)\tau_{k+1}(n)}{\tau_k(n)\tau_k(n+1)}, \quad J_k(n) \equiv \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\tau_{k-1}(n)\tau_k(n+1)}{\tau_{k-1}(n+1)\tau_k(n)} \right) \quad (17)$$

により (16) から

$$\begin{aligned} \Delta_n V_k(n) &= V_k(n+1)J_k(n+1) - V_k(n)J_{k+1}(n), \\ \Delta_n J_k(n) &= V_{k-1}(n+1) - V_k(n), \quad V_0(n) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

を得るが、これは明らかに連続極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ で戸田分子方程式 (14) に移行する。(15) より任意の ε について $n \rightarrow \infty$ で $\tau_k(n) \rightarrow 0$ だから、§1 性質 3) の意味で (16) は (12) の可積分差分といえる。差分化 $\tau_k(t) \Rightarrow \tau_k(n)$ を bilinear form を保存する差分化ということがある。これは当初戸田格子の bilinear form において $D_t^2 \tau_k(t) \cdot \tau_k(t)$ を $(2/\varepsilon)^2 \sinh^2(\varepsilon D_n/2) \tau_k(n) \cdot \tau_k(n)$ と置き換えることでソリトン解をもつ離散時間戸田格子が得られた経緯 [5] による。 D_t は広田の微分作用素。しかし、 $\tau_k(t) \Rightarrow \tau_k(n)$ はもはや作業仮説ではなく、より基本的な線形レベルでの差分化 (4) の帰結であることに注意しよう (cf. [9]).

離散時間戸田分子 (18) を再度変形するため

$$J_k(n) = -\frac{q_k^{(n)} - 1}{\varepsilon}, \quad V_k(n) = \frac{e_k^{(n)}}{\varepsilon^2} \quad (19)$$

なる変数 $\{q_k^{(n)}, e_k^{(n)}\}$ を導入する。この結果、偏差分方程式

$$q_k^{(n)} e_{k-1}^{(n)} = q_{k-1}^{(n+1)} e_{k-1}^{(n+1)}, \quad q_k^{(n)} + e_k^{(n)} = q_k^{(n+1)} + e_{k-1}^{(n+1)} \quad (20)$$

を得るが、(20) は Rutishauser [23] によって 1954 年に定式化された有理関数の極をその Taylor 展開の係数から計算する qd アルゴリズム (商差法) の漸化式に他ならない。qd アルゴリズムの $k = 1, \dots, N$ の部分は

$$J_n \equiv \begin{pmatrix} q_1^{(n)} & q_1^{(n)} e_1^{(n)} & & & & & 0 \\ 1 & q_2^{(n)} + e_1^{(n)} & q_2^{(n)} e_2^{(n)} & & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & & q_{N-1}^{(n)} e_{N-1}^{(n)} & \\ & & & & 1 & q_N^{(n)} + e_{N-1}^{(n)} & \end{pmatrix},$$

$$R_n \equiv \begin{pmatrix} 1 & e_1^{(n)} & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & e_{N-1}^{(n)} & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて $J_{n+1} = R_n J_n R_n^{-1}$ と行列表示されるが、これより直ちに $I_\varepsilon \equiv \text{tr}(J_n^j)$, $j = 1, 2, \dots$, は n について一定で、離散時間戸田分子の保存量となることがわかる (cf. [8]). Rutishauser[24] はこの表示を用いて 3 重対角行列 J_0 に対する LR アルゴリズムの収束性を証明した。

なお, Rutishauser[23] は qd アルゴリズム (20) の定式化後, (19) に従って $J_k(n), V_k(n)$ を導入し, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限計算を行って連続戸田分子 (14) を得ていた. Moser は [10] において連続戸田分子を再発見したことになる. さらに興味深いのは, Rutishauser[24] は (14) の Lax 表示 $dJ/dt = [R, J]$ を通じて行列の LR 分解と随伴軌道による解の構成法まで与えていたことである. たびたび引用される Symes[25] は QR 分解によるその焼き直しに過ぎない. ソリトン解や無限次元代数構造の概念には到達していないものの, 戸田方程式, タウ関数, Lax 表示, 随伴軌道の方法という可積分系研究における基本的要素が, 通常いわれる 1967 年以降ではなく, 1950 年代の数値計算法の研究の中で既に芽吹いていたのである. しかも, 連続と離散の双方の意味で.

差分方程式 (20) の解 $\{q_k^{(n)}, e_k^{(n)}\}$ は (17), (19) を用いて離散時間戸田分子のタウ関数 $\tau_k(n)$ の比によって

$$q_k^{(n)} = \frac{\tau_{k-1}(n)\tau_k(n+1)}{\tau_{k-1}(n+1)\tau_k(n)}, \quad e_k^{(n)} = \frac{\tau_{k-1}(n+1)\tau_{k+1}(n)}{\tau_k(n)\tau_k(n+1)}$$

と書き下される. しかし, 行列式 $\tau_k(n)$ を直接計算する必要はない. $q_1^{(n)} = g_0(n+1)/g_0(n)$, $e_0^{(n)} = 0$ なる初期値に対して, 計算を qd 表

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & q_1^{(0)} \\ & & & & & & e_1^{(0)} \\ e_0^{(1)} & & & & & & q_1^{(1)} & & & q_2^{(0)} \\ & & & & & & e_1^{(1)} & & & e_2^{(0)} \\ e_0^{(2)} & & & & & & q_1^{(2)} & & & q_2^{(1)} & \dots \\ & & & & & & e_1^{(2)} & & & \dots \\ e_0^{(3)} & & & & & & q_1^{(3)} & & & \dots \\ & & & & & & \vdots & & & \dots \\ & & & & & & \vdots & & & \dots \end{array}$$

に従って左から右方向に実行すれば $\{q_k^{(n)}, e_k^{(n)}\}$ は逐次的に定まる. $g_0(n)$ が与えられた有理型関数の Taylor 展開の係数であれば, それぞれ, $q_k^{(n)}$ は $n \rightarrow \infty$ で有理型関数の k 番目の極の逆数に, $e_k^{(n)}$ はゼロに収束する. しかし, この有理型関数の極の計算法は丸め誤差に起因して数値不安定である. §1 問題点 iv) 参照. この不安定性を解消した qd アルゴリズムの運用法が [4] で論じられている.

以下では離散時間戸田分子の新しい応用として, 与えられた関数やデータ列の Laplace 変換の計算法について報告する.

qd アルゴリズムには有理関数近似式の計算法としての側面がある。形式的べき級数 $P = g_0(0) + g_0(1)x^1 + g_0(2)x^2 + \dots$, $x \in \mathbb{C}$ に対して

$$\tau_k(0) \neq 0, \quad \tau_k(1) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

であれば、かつそのときに限り、連分数

$$C = \frac{g_0(0)}{1 - \frac{q_1^{(0)}x}{1 - \frac{e_1^{(0)}x}{1 - \frac{q_2^{(0)}x}{1 - \frac{e_2^{(0)}x}{1 - \dots}}}}}$$

$$\equiv \left| \frac{g_0(0)}{1} \right| - \left| \frac{q_1^{(0)}x}{1} \right| - \left| \frac{e_1^{(0)}x}{1} \right| - \left| \frac{q_2^{(0)}x}{1} \right| - \left| \frac{e_2^{(0)}x}{1} \right| - \dots$$

を有限の連分数で打ち切れればそれは P の有限次までの近似という意味で、 C は P を近似する [4]。この事実より、 $g(n\varepsilon) \equiv g_0(n)$, $e^{-\zeta\varepsilon} \equiv x$ と書けば、形式的には

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n\varepsilon)e^{-\zeta n\varepsilon} \varepsilon$$

$$= \left| \frac{g(0)e^{\zeta\varepsilon}}{\frac{e^{\zeta\varepsilon} - 1}{\varepsilon} - \frac{q_1^{(0)} - 1}{\varepsilon}} \right| - \left| \frac{\frac{q_1^{(0)}e_1^{(0)}}{\varepsilon^2}}{\frac{e^{\zeta\varepsilon} - 1}{\varepsilon} - \frac{e_1^{(0)}}{\varepsilon} - \frac{q_2^{(0)} - 1}{\varepsilon}} \right| - \left| \frac{\frac{q_2^{(0)}e_2^{(0)}}{\varepsilon^2}}{\frac{e^{\zeta\varepsilon} - 1}{\varepsilon} - \frac{e_2^{(0)}}{\varepsilon} - \frac{q_3^{(0)} - 1}{\varepsilon}} \right| - \dots$$

が成り立つ。ここで極限操作 $\varepsilon = \Delta t \rightarrow 0$ を行う。ただし、 $n\varepsilon \rightarrow t$ とする。左辺は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} g(n\varepsilon)e^{-\zeta n\varepsilon} \varepsilon = \int_0^{\infty} g(t)e^{-\zeta t} dt$$

となり与えられた関数 $g(t)$ の Laplace 変換に移行する。 $g(n\varepsilon)$ は $g(t)$ のサンプル値である。一方、(19) より

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{q_k^{(0)} - 1}{\varepsilon} = -J_k(0), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e_k^{(0)}}{\varepsilon^2} = V_k(0)$$

だから、以下の Laplace 変換のタウ関数表示を得る [17]。

定理 3 関数 $g(t)$ の Laplace 変換は、もし存在すれば、連分数

$$G(\zeta) = \left| \frac{g(0)}{\zeta + J_1(0)} \right| - \left| \frac{V_1(0)}{\zeta + J_2(0)} \right| - \left| \frac{V_2(0)}{\zeta + J_3(0)} \right| - \dots \quad (21)$$

によって (有限次で打ち切った連分数近似の意味で) 近似される. ここに, $V_k(0)$, $J_k(0)$ 等は連続戸田分子の解の $t=0$ での値で, (11), (13) に従って $g(t)$ とその導関数 $g_j = d^j g(t)/dt^j$ を成分とするタウ関数 $\tau_k(t)$ により書き下される. 実際,

$$V_k(t) = \frac{d^2 \log \tau_k}{dt^2}, \quad J_k(t) = \frac{d \log(\tau_{k-1}/\tau_k)}{dt}, \quad \tau_k = \begin{vmatrix} g_0 & \cdots & g_{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1} & \cdots & g_{2k-2} \end{vmatrix}.$$

定理 3 は $g(t)$ の積分変換が $g(t)$ の導関数の計算によって連分数近似されることを主張する. なお, Laplace 変換が有理関数となる場合は (21) の展開は有限で切れる.

例として $g(t) = \cos t$ を考えよう.

$$V_1(t) = -\frac{1}{\cos^2 t}, \quad V_2(t) = 0, \quad J_1(t) = \tan t, \quad J_2(t) = -\tan t$$

であるから $g(t)$ の Laplace 変換は確かに

$$G(\zeta) = \frac{1}{\zeta - 0} - \frac{-1}{\zeta - 0} = \frac{\zeta}{\zeta^2 + 1}$$

となる. また, $g(t) = (at + b)e^t$ については

$$V_1(t) = -\frac{a^2}{(at + b)^2}, \quad V_2(t) = 0, \\ J_1(t) = -\frac{at + a + b}{at + b}, \quad J_2(t) = -\frac{at - a + b}{at + b}$$

より $g(t)$ の Laplace 変換は

$$G(\zeta) = \frac{b}{\zeta - \frac{a+b}{b}} - \frac{-\frac{a^2}{b^2}}{\zeta - \frac{-a+b}{b}} = \frac{b\zeta + a - b}{(\zeta - 1)^2}$$

となる. 以上の例では展開は有限で途切れる.

一方, $g(t) = a \exp(-\frac{1}{2}t^2)$ については $\tau_k(t)$ は Hermite 多項式を乗じた $g(t)$ を成分とする Hankel 行列式となる. この結果,

$$V_k(t) = -k, \quad J_k(t) = t, \quad k = 1, 2, \dots$$

より $g(t)$ の Laplace 変換の連分数展開

$$G(\zeta) = \frac{a}{\zeta} + \frac{1}{\zeta} + \frac{2}{\zeta} + \frac{3}{\zeta} + \dots$$

を得る.

$g(t) = \sin t$ など $g(0) = 0$ のときはこのままでは $g(t)$ の Laplace 変換の計算はできないが, あらかじめ $g(t) + \alpha$, $\alpha \neq 0$, としてからタウ関数を計算し, 後で連分数から α/ζ を減ずればよい.

もし関数 $g(t)$ のかわりにデータ列 $g(0), g(\varepsilon), g(2\varepsilon), \dots, g(N\varepsilon)$ が与えられたならば, 離散時間戸田分子のタウ関数 $\tau_k(n)$ による連分数近似の形でデータ列の Laplace 変換を数値的に計算できる. ε が小さい時の近似 $(\exp(\zeta\varepsilon) - 1)/\varepsilon \approx \zeta$ を部分的に用いて有理関数を計算すれば, Laplace 変換の近似式

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n\varepsilon)e^{-\zeta n\varepsilon} \approx \frac{c_0}{\left| \zeta - \frac{q_1^{(0)} - 1}{\varepsilon} \right|} - \frac{\frac{q_1^{(0)}e_1^{(0)}}{\varepsilon^2}}{\left| \zeta - \frac{e_1^{(0)}}{\varepsilon} - \frac{q_2^{(0)} - 1}{\varepsilon} \right|} - \frac{\frac{q_2^{(0)}e_2^{(0)}}{\varepsilon^2}}{\left| \zeta - \frac{e_2^{(0)}}{\varepsilon} - \frac{q_3^{(0)} - 1}{\varepsilon} \right|} - \dots \quad (22)$$

を得る. もちろん, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限では (22) は (21) に移行する. ここに有理関数の係数はデータ列 $c_j \equiv g(j\varepsilon)$ によって

$$q_1^{(0)} = \frac{c_1}{c_0}, \quad q_k^{(0)} = \frac{\tau_{k-1}(0)\tau_k(1)}{\tau_{k-1}(1)\tau_k(0)}, \quad e_k^{(0)} = \frac{\tau_{k-1}(1)\tau_{k+1}(0)}{\tau_k(0)\tau_k(1)},$$

$$\tau_k(\ell) = \frac{1}{\varepsilon^{k(k-1)}} \begin{vmatrix} c_\ell & \cdots & c_{\ell+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{\ell+k-1} & \cdots & c_{\ell+2k-2} \end{vmatrix}, \quad \ell = 0, 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

と表される.

この計算法のポイントは Hankel 行列式 $\tau_k(\ell)$ の代数的な計算により Laplace 変換の近似式が得られることである. 漸化式 (20) によって大量の Hankel 行列式 $\tau_k(n)$ の直接的な計算を回避できるため, このアルゴリズムの計算量は $O(N^2)$ である. 実際の観測データのようにノイズを含む場合は差分間隔 ε はあまりちいさすぎない方がよいが, おおきすぎれば近似式 (22) 自身の誤差が増大する. ノイズの影響を抑えるにはデータのなんらかの平均化が必要となろう.

また, 近似 $(\exp(\zeta\varepsilon) - 1)/\varepsilon \approx \zeta$ を用いずに, $z = \exp(\zeta\varepsilon)$ についてみれば, データ列 $\{c_j, j = 0, \dots, 2N - 1\}$ の z -変換の計算法が定式化される.

$$\sum_{j=0}^{2N-1} c_j z^{-j} = \frac{c_0 z}{\left| z - q_1^{(0)} \right|} - \frac{\frac{q_1^{(0)}e_1^{(0)}}{\varepsilon}}{\left| z - \frac{e_1^{(0)}}{\varepsilon} - \frac{q_2^{(0)}}{\varepsilon} \right|} - \dots - \frac{\frac{q_{N-1}^{(0)}e_{N-1}^{(0)}}{\varepsilon}}{\left| z - \frac{e_{N-1}^{(0)}}{\varepsilon} - \frac{q_N^{(0)}}{\varepsilon} \right|} \quad (23)$$

データ数 $2N$ と Hankel 行列のランクが記述するデータの独立性によって (23) の有理関数の次数が決まる. これは $\tau_k(n) = 0$ となると $e_{k-1}^{(n)} = 0$ だから (20) の第 1 式より qd アルゴリズムが停止するためである. 観測データではノイズなどに起因して $\tau_k(n)$ がゼロとなることはなく有理関数の次数は N となる. システム同定などに応用する際, データを増やせば伝達関数の見かけの次数はいくらでも増大するが, データの独立性やノイズの統計的性質を考慮してどんな規範で展開を打ち切るかが問題となろう.

なお、与えられた有理型関数 $G(\zeta)$ の Taylor 展開に対して qd アルゴリズム (20) を適用すると $\lim_{n \rightarrow \infty} q_k^{(n)}$ により $G(\zeta)$ の極が求められ、部分分数展開を経て $G(\zeta)$ から $g(t)$ への逆 Laplace 変換の計算法が定式化される。この場合は [4] に従って丸め誤差に起因する数値不安定性を解消しなければならない。

4 研究の流れ

本稿では非線形可積分系と数値計算法の密接なかかわり、特に、可積分系の可積分差分による数値計算アルゴリズムの開発について著者とその周辺による最近の成果を解説した。§1 の研究協力者は近藤弘一君（同志社大）§2 は梶原健司氏（同志社大）塩谷泰教君（現岡山白陵高等・中学）§3 は野中大亮君（同志社大）矢崎健介君（現ローム）渡辺賢治君（現オラクル）などである。

可積分系における数値計算法の側面は以下のステップで研究が進行してきたと考えられる。従来の見方 [18] を一歩進めてなるべく系統的に並べてみよう。

第1段階 既知のアルゴリズムの連続極限として定まる可積分系の研究

- 1) qd アルゴリズムの連続極限（すなわち、連続戸田分子）の導出とその Lax 表示と解（Rutishauser, 1954[23], 1958[24]）
- 2) Jacobi 行列の固有値計算の QR 法の連続極限（QR flow）の Lax 表示と可積分性（D-L-T, 1989[3]）
- 3) 線形計画問題の Karmarkar の内点アルゴリズムの連続極限の Lax 表示と解（N, 1994[13]）
- 4) 対称行列の固有値計算の Jacobi 法の連続極限と Lax 型勾配系（N, 1997[15]）

第2段階 可積分系の離散時間発展と既知のアルゴリズムとの同値性の発見

- 1) 戸田分子の可積分差分としての qd アルゴリズム（Rutishauser, 1954[23]）
- 2) 有限戸田分子の $t = 0$ から $t = 1$ への時間発展と Jacobi 行列の指数関数の固有値計算の QR 法の同値性（Symes, 1982[25]）
- 3) 離散時間 potential KdV 方程式と数列の収束の加速法 ϵ -アルゴリズムの同値性（P-G-R, 1993[22], see also A-O-K, 1987[1]）

第3段階 既知のアルゴリズムを起源としない新しい連続時間可積分系の提出

- 1) ソート機能をもつ 2 重括弧の Lax 型勾配系による固有値計算（Brockett, 1991[2]）
- 2) ソート機能のない 2 重括弧の Lax 型勾配系による固有値計算（N, 1992[12]）

第4段階 可積分系の可積分差分によるアルゴリズムの設計と改良

- 1) 有限体上の戸田分子のタウ関数による BCH-Goppa 復号法 (N, 1995[16])
- 2) Rayleigh 商の勾配系の可積分差分によるベキ乗法の最適な原点移動の決定 (NKS, 1996[20], 本稿 § 2)
- 3) 戸田分子による Laplace 変換の計算 (N, 1996[17], 本稿 § 3)

Rutishauser 以来 40 年余り. アルゴリズムの構造を調べるための連続極限の議論 (第 1 段階) と既知の可積分系と既知のアルゴリズムとの出会い (第 2 段階) を経て, やっと新しい可積分系の探索 (第 3 段階) とアルゴリズムの開発 (第 4 段階) の緒についたところである.

21 世紀は離散の時代といわれている. 可積分系の可積分差分によるアルゴリズム開発もその一翼を担うはずである. 離散可積分系に基づいて展開される 21 世紀の離散解析, その輪郭がおぼろげながらも見えてきたのではないだろうか.

参考文献

- [1] M. Arai, K. Okamoto and Y. Kametaka, An addition formula for $\cot(x)$, Aitken-Steffensen acceleration and Cauchy matrix, J-TOKYO-MATH 87-14, preprint, 1987; cf. Aitken-Steffensen acceleration and a new addition formula for Fibonacci numbers, *Proc. Japan Acad., Ser. A* **62**(1986), 5-7.
- [2] R.W. Brockett, Dynamical systems that sort lists, diagonalize matrices and solve linear programming problems, *Linear Algebra Appl.* **146**(1991), 79-91.
- [3] P. Deift, L.C. Li and C. Tomei, Matrix factorization and integrable systems, *Commun. Pure Appl. Math.* **42**(1989), 443-521.
- [4] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis Vol. 2*, Wiley, 1977.
- [5] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations II. Discrete-time Toda equation, *J. Phys. Soc. Japan* **43**(1977), 2074-2078.
- [6] R. Hirota, Toda molecule equations, in: *Algebraic Analysis Vol. 1*, Academic, 1988, pp. 203-216.
- [7] 広田 良吾, 差分学のすすめ, 応用数理 **3**(1993), 48-57, ソリトン-微分から差分へ-, 数理科学, **370**(1994), 22-26, 辻本 諭・広田 良吾, 非線形可積分系の差分化とその現状, 数理解析研講究録 **889**(1994), 77-84.
- [8] R. Hirota and S. Tsujimoto, Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations, *J. Phys. Soc. Japan* **64**(1995), 3125-3127.
- [9] R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, Difference scheme of soliton equations, in: *Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physical and Biological Systems*, Plenum, 1993, pp. 7-15.
- [10] J. Moser, Finitely many points on the line under the influence of an exponential potential - An integrable system, in: *Lec. Notes in Phys.*, Vol. 38, Springer, 1975, pp. 467-497.

- [11] Y. Nakamura, Geometry of rational functions and nonlinear integrable systems, *SIAM J. Math. Anal.* **22**(1991), 1744–1754.
- [12] Y. Nakamura, A new nonlinear dynamical system that leads to eigenvalues, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **9**(1992), 133–139.
- [13] Y. Nakamura, Lax pair and fixed point analysis of Karmarkar's projective scaling trajectory for linear programming, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **11**(1994), 1–9.
- [14] Y. Nakamura, A tau-function for the finite Toda molecule, and information spaces, in: *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc. Vol. 179, 1994, pp. 205–211.
- [15] Y. Nakamura, Jacobi algorithm for symmetric eigenvalue problem and integrable gradient system of Lax form, *Japan J. Indust. Appl. Math.* to appear.
- [16] Y. Nakamura, The BCH-Goppa decoding as a moment problem and a tau-function over finite fields, *Phys. Lett. A* **223**(1996), 75–81.
- [17] Y. Nakamura, Calculating Laplace transforms in terms of the Toda molecule, preprint, 1996.
- [18] 中村 佳正, 非線形可積分系の応用解析の展開, 応用数理 **2**(1992), 330–342, アルゴリズム・情報幾何・非線形可積分系, 数理解析研講究録 **889**(1994), 1–18, 非線形可積分系—無限自由度と離散時間系への道標—, 数理科学 **384**(1995), 24–29.
- [19] Y. Nakamura and T. Hashimoto, On the discretization of the three-dimensional Volterra system, *Phys. Lett. A* **193**(1994), 42–46.
- [20] Y. Nakamura, K. Kajiwara and H. Shiotani, On an integrable discretization of the Rayleigh quotient gradient system and the power method with the optimal shift, preprint 1996.
- [21] A. Ohara, S-I. Amari, Differential geometric structures of stable state feedback systems with dual connections, *Kybernetika* **30**(1994), 369–386.
- [22] V. Papageorgiou, B. Grammaticos and A. Ramani, Integrable lattices and convergence acceleration algorithms, *Phys. Lett. A* **179**(1993), 111–115.
- [23] Von H. Rutishauser, Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus, *Z. angew. Math. Physik* **5**(1954), 233–251, Ein infinitesimales Analogon zum Quotienten-Differenzen-Algorithmus, *Arch. Math.* **5**(1954), 132–137.
- [24] H. Rutishauser, Solution of eigenvalue problems with the LR-transformation, *Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser.* **49**(1958), 47–81.
- [25] W.W. Symes, The QR algorithm and scattering for the finite nonperiodic Toda lattice, *Physica* **4D**(1982), 275–280.