

Homotopy invariant of smooth maps of rational homology 3-sphere into S^2

佐久間 一浩 (高知高専)

§ 0. 序

Millett & Rolfsen [MR] は、球面間の写像 $f: S^{2m+1} \rightarrow S^m$ に対して定義されるホップ不変量をホモロジー球面間の写像の場合に拡張して、特に $n=2$ の場合でガイフェルトファイバー構造によって決められる射影に関して“ホップ不変量”の値を計算した。彼らの計算結果によれば、その値は特異ファイバーの order の積となる。つまり写像のホモトピー不変量である“ホップ不変量”はガイフェルトファイバー構造を持つ場合は、特異ファイバーの様子だけで完全に決まる。

そこで本稿では彼らの結果を踏まえて、自然に起こる次の問題を考察する。

“任意の写像に対して、ホップ不変量はどのような値を取り得るだろうか？ また、その値はホモロジー球面のいかなる構造から制限を受けるか？”

球面の場合、 n が偶数ならば、任意の整数値（但し、 n が 2, 4, 8 に限る）を取り、 n が奇数ならば常に値は 0。

しかし、一般にホモロジ-球面を考えた場合には事情は少し異なる。これは定義を見れば容易に推察出来る。まずは、

Millett & Rolfen による定義を述べよう。

以下、 $\mathcal{L} = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ を連想したい。

$g: M^{2n-1} \rightarrow N^n$ ($n \geq 2$) を \mathcal{L} -ホモロジ-球面の間で連続写像とする。 C_g で、写像 g の写像柱を表す。カップ積を用いて \mathcal{L} -ホモロジ-群を考える。簡単な計算から、

$$H^n(C_g) \cong H^n(N^n) \cong \mathcal{L}, \quad H^{2n}(C_g) \cong \mathcal{L}$$

がわかる。 C_g のホモトピー型が写像 g のホモトピー不変量を決めるので、次の様に定める訳である。

$\alpha_n \in H^n(C_g), \beta_{2n} \in H^{2n}(C_g)$ を生成元とし、写像 g のホップ不変量 $H(g)$ を次の等式を満たす値とする。

$$\alpha_n \cup \alpha_n = H(g) \beta_{2n} \quad (H(g) \in \mathcal{L}).$$

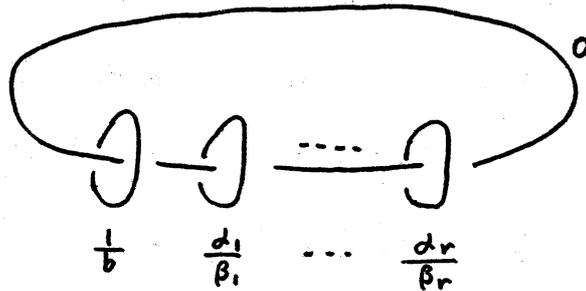
$H(g)$ は、写像 g のホモトピー類の選び方に依らないことがすぐわかる。

§ 1. Millett - Rolfen の定理

ここでは前節で述べた Millett & Rolfen の結果を少し詳しく紹介する。 M^3 を \mathcal{L} -ホモロジ-球面で底空間が S^2 のガイフェルトファイバー構造を持つとする。ガイフェルト不変量を表示すれば、一般に次の様に書ける。

$$M^3 = \{ b ; (d_1, \beta_1), \dots, (d_r, \beta_r) \}$$

で、 b はオイラー数、 (d_i, β_i) は特異フョクバーの型、 r は特異フョクバーの数を表す。 M^3 をカービ-計算で表せば、



である3次元閉多様体である。そして特に、

$$\Delta = -b d_1 \dots d_r - \beta_1 d_2 \dots d_r - d_1 \beta_2 d_3 \dots d_r - \dots - d_1 d_2 \dots d_{r-1} \beta_r$$

とおけば、 M^3 が \mathbb{L} -ホモロジー球面となる必要十分条件は次である：

$$\Delta = \pm 1 \text{ for } \mathbb{L} = \mathbb{Z}, \Delta \neq 0 \text{ for } \mathbb{L} = \mathbb{Q}, \gcd(p, \Delta) = 1 \text{ for } \mathbb{L} = \mathbb{Z}_p$$

定理1 (Millett & Rolfsen)

$M^3 \in S^2$ 上のガイフェルトフョクバー構造を持ちしかも特異フョクバーのorderが d_1, \dots, d_r である \mathbb{L} -ホモロジー球面であるとす。このとき、射影 $g: M^3 \rightarrow S^2$ のホップ不変量は M^3, S^2 の向きを適当に選べば、

$$H(g) = d_1 \dots d_r$$

が成り立つ。

さて、このホップ不変量の値の取り方であるが、後述するよ
うに、実はホモロジー3球面の基本群に深く関わる。例えば
上の定理と Rubinstein の定理を合わせると次を得る。(LR 参照)

定理 2.

M^3 を既約なホモロジー3球面で基本群が有限で埋め込まれたク
ラインボトルを含むとする。このとき、ガイフェルトファイ
バー構造が $f: M^3 \rightarrow S^2$ が存在して、 $H(f) = 4k$ ($k \geq 1$) である。

§ 2. 微分形式によるホップ不変量の定義

我々の目標は、ホップ不変量の取り得る値は決定すること
である。これには議論をスムーズにするために smooth cat.
に考えると都合がよい。任意の連続写像(多様体の間の)は
滑らかな写像にホモトピックであることを注意する。そこで
ホップ不変量を微分形式を用いて、定義し直す。

M^3 を \mathbb{Q} -ホモロジー3球面とする。 $f: M^3 \rightarrow S^2$ を C^∞ 写像とす
る。 $d \in H^2(S^2; \mathbb{R})$ を生成元とすれば、 $H^2(M^3; \mathbb{R}) = 0$ なので、
 M^3 上の 1-form ω で、 $f^*d = d\omega$ の解が存在する。そこで、
写像 f のホップ不変量を、

$$H(f) = \int_{M^3} \omega \wedge d\omega$$

で定める。

容易に、ホップ不変量 H の選び方に依らず、互いにホモトピー的な C^∞ 写像は同じ値を取ることがわかる。また、Millett & Rolfsen の定義とは多様体の向きを選び方を無視すれば一致することもわかる。勿論、微分形式による定義でも適当な次元のホモロジー球面の間で写像に対して定義が可能である。詳しくは、Bott-Tu [BT] の III §17 を参照されたい。この本は大変分かり易く書いてあるので大いに参考にした。

さて、こうして定義されたホップ不変量が、実際 nontrivial だけではなく整数値を取らない典型例を与えておこう。それにはホップファイブレーションを使うと便利である。

$\varphi: S^3 \rightarrow S^2$, $\varphi(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$ を Hopf fibration とする。但し、向きを適当に定めて、 $H(\varphi) = 1$ としておく。
 $L(p, 1)$ を $(p, 1)$ 型のレンズ空間 ($p \geq 2$) とする。

命題 3.

$\pi: S^3 \rightarrow L(p, 1)$ を自然な p 重被覆写像とする。このとき、

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 & & \\
 \pi \downarrow & \searrow \varphi & \\
 L(p, 1) & \xrightarrow{f} & S^2
 \end{array}$$

となる C^∞ 写像 f のホップ不変量は、 $H(f) = \frac{1}{p}$ である。

∴) 初めに、 $L(p,1)$ 上の任意の 3-form ζ に対して、

$$\int_{S^3} \pi^* \zeta = p \int_{L(p,1)} \zeta$$

が成り立つことを示しておく。 $\int_{L(p,1)} \zeta = k \in \mathbb{R}$ とおく。

$L(p,1)$ の基本 3-型式 $\varepsilon \eta$ とすれば

$$\int_{L(p,1)} (\zeta - k \varepsilon \eta) = 0 \quad \text{なので、} \quad \zeta = k \varepsilon \eta + d\omega \quad \text{を満たす}$$

$L(p,1)$ 上の 2-form η が存在する。このとき、

$$\pi^* \zeta = k \pi^* \varepsilon \eta + d \pi^* \omega \quad \text{なので}$$

$$\int_{S^3} \pi^* \zeta = k \int_{S^3} \pi^* \varepsilon \eta = k \deg(\pi) = p \int_{L(p,1)} \zeta \quad \text{である。}$$

但し、最初の等式は Stokes の定理、二番目は写像度の定義。

そこで、 $H(p)$ の定義にある contact form $\omega \wedge d\omega = \zeta$ として上の式を適用すると、

$$p \int_{L(p,1)} \zeta = p \int_{L(p,1)} \omega \wedge d\omega = \int_{S^3} \pi^*(\omega \wedge d\omega) = \int_{S^3} \pi^* \omega \wedge d \pi^* \omega$$

が成り立つ。一方、 ω の定義から

$$d \pi^* \omega = \pi^*(d\omega) = \pi^*(f^* \alpha) = (f \circ \pi)^* \alpha = \varphi^* \alpha$$

なので、

$$\int_{S^3} \pi^* \omega \wedge \varphi^* \alpha \quad \text{は、写像 } \varphi \text{ のホップ不変量だから、証明}$$

が終った。■

さて、このホップ不変量は、写像のホモトピー不変量であるから、 $H: [M^3, S^2] \rightarrow \mathbb{R}$, $H([f]) = H(f)$ ($[f]$ は写像のホモトピー類) と定めれば、準同型写像である。例えば、命題3の結果から、 $H([f]) = p H(f)$ ($M^3 = L(p, 1)$ の2.2) と決めてやると、次の可換図から

$$\begin{array}{ccccc}
 S^3 & \xrightarrow{g} & S^3 & & \\
 \pi \downarrow & \circlearrowleft & \pi \downarrow & \searrow \varphi: \text{Hopf fibration} & \\
 L(p, 1) & \xrightarrow{g} & L(p, 1) & \xrightarrow{f} & S^2
 \end{array}$$

(g は写像度が $\forall g \in \mathbb{Z}$ の写像を表す)

次の補題から、 $H(g \circ f) = \frac{g}{p}$ であることが従う。

また、この構成と $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ より、 $[L(p, 1), S^2] \cong \mathbb{Z}$ であることは明らか。(集合として等しい)

補題 4.

任意の C^∞ 写像 $g: M^3 \rightarrow M^3$, $f: M^3 \rightarrow S^2$ に対して、

$$H(f \circ g) = \deg(g) H(f)$$

が成り立つ。

(証明は命題3の証明の中に殆んど含まれている)

更に、これらの結果はもう少し一般的な設定の下で成り立つことがわかる。詳しく述べると、

M^3 を \mathbb{Q} ホモロジー 3 球面とする。任意の向き付けられた 3 次元閉多様体から S^3 への写像度 1 の写像があるから滑らかに近似して、上のことから

$$M^3 \xrightarrow{g} S^3 \xrightarrow{\psi} S^2$$

g を写像度 1 の C^∞ 写像、 ψ を Hopf fibration とすれば、この合成写像のホップ不変量は、 $H(\psi \circ g) = 1$ である。更に、

$$\pi_1(M^3) \xrightarrow{\Phi} \{\text{位数 } p \text{ の群}\} \rightarrow 0$$

があるならば、 $\text{Ker } \Phi$ に対応した p 重被覆を取り、加えて被覆写像 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M^3$ で \tilde{M} が \mathbb{Z} ホモロジー 3 球面になる場合には、Millett-Rolfsen の定義からわかるように、 $\tilde{M} \xrightarrow{h} S^2$ のホップ不変量は常に整数だから、 $H(h) = g$ とおけば、前と同様に、

$$\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M^3 \xrightarrow{\psi} S^2$$

において、ホップ不変量 $H(\psi) = \frac{g}{p}$ である。

従って、例えば、 $M^3 \cong L(p, k)$ (任意のレンズ空間) の場合も $L(p, k) \xrightarrow{\psi} S^2$ のホップ不変量は、 $H(\psi) = \frac{g}{p}$ ($g \in \mathbb{Z}$) である。

§ 3. C^∞ 写像の左右同値不変量

C^∞ 写像の左右同値による分類は、次元が上がればそれだけ一般に難しい。

ここで定義したホップ不変量は、弱の意味ではあるが C^∞ 写像の左右同値の判定の目安を与える。まず、次の補題が容易に示せる

補題 5.

任意の C^∞ 写像 $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ があり、 $f: M^3 \rightarrow S^2$ のホップ不変量が定義されているならば、

$$H(\varphi \circ f) = (\deg(\varphi))^2 H(f)$$

が成り立つ。(証明略)

従って、次のことが得られる。

定理 6.

M^3 : \mathbb{Q} ホモロジー 3 球面

$f, g: M^3 \rightarrow S^2$ 任意の C^∞ 写像 に対して

f と g が左右同値ならば、 $H(f)$ と $H(g)$ の絶対値は等しい。

(証明は、補題 4, 5 より明らか)

finite map germ $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ に対する Eisenbud-Levine の公式 ([EL] 参照) では、写像度の絶対値が $\mathbb{Q}(f)$ の代数的構造と密接に関係していることが発見された訳で、特に

二つの map germs が左右同値ならば、Mather の結果から字依度の絶対値は等しいことが従う。このことから、我々の定理 6 の結果は、map germ $f: (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ (有限確定ぐらい?) の幾何的不変量として、ホップ不変量を考へ、それを計算可能な環の構造と結び付けられる可能性を示唆しているのかもしれない。

参考文献

- [BT] R. Bott & L.W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology
Grad. Texts in Math. NO. 82, 1982
- [EL] D. Eisenbud & H. Levine, An algebraic formula for the degree
of a C^∞ map germ, Ann. of Math 106 (1977), 19-44.
- [MR] K. Millett & P. Rolfsen, A theorem for Borsuk-Ulam type for
Seifert-fibered 3-manifolds, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1986), 523-532.
- [R] J. H. Rubinstein, On 3-manifolds that have finite fundamental
group and contain Klein bottles, Trans. AMS 251 (1979) 129-137.