数理解析研究所講究録
1012巻 1997年 47-55

S 族内の RADIUS PROBLEM

小中澤　聖二　(SEIJI KONAKAZAWA)

東京工業高等専門学校

1. はじめに

S を単位円板 D 上で定義された通常の単葉函数の族であるとする,

$$S=\left\{f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \;\middle|\; \text{analytic and univalent in } D\right\}. \tag{1.1}$$

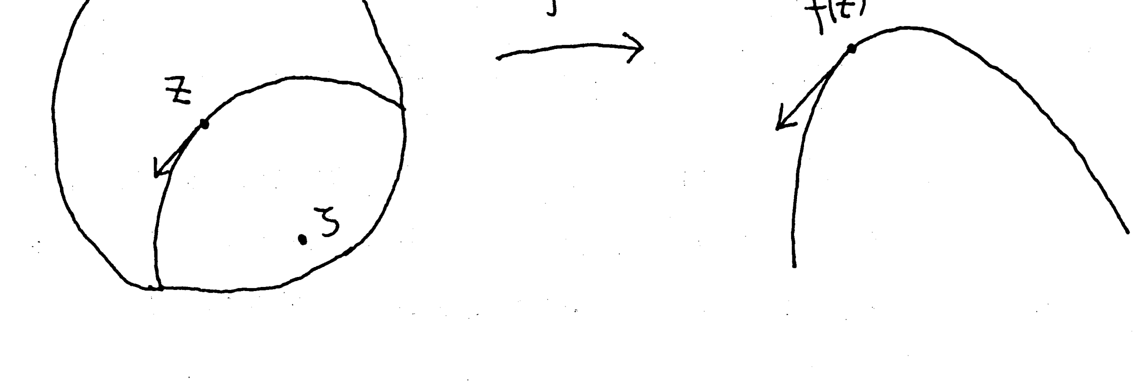
[1] 及び [2] に従って, 次の uniformly convex functions として知られている S の部分族 UCV を定義する,

$$UCV=\left\{f(z)\in S \;\middle|\; Re\left\{1+(z-\zeta)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}\geqq 0 \text{ in } D\times D\right\}. \tag{1.2}$$

この UCV の条件は次と同値である,

$$Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\geqq\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \text{ in } D. \tag{1.3}$$

UCV に属する函数は D 内の全ての円弧（但し，その中心も D 内に入っているもの）を convex arc に写す.



そこで order α $(0 \leqq \alpha < 1)$ 付きの族 uniformly convex functions of order α を次で定義しよう，

$$UCV_\alpha = \left\{ f(z) \in S \;\middle|\; Re\left\{1 + (z-\zeta)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geqq \alpha \text{ in } D \times D \right\}. \tag{1.4}$$

[2,Theorem 1] にあるのと同じ考察により，この条件は次と同値であることがわかる，

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{(1-\alpha)f'(z)}\right\} \geqq \left|\frac{zf''(z)}{(1-\alpha)f'(z)}\right| \text{ in } D. \tag{1.5}$$

また，通常の order α $(0 \leqq \alpha < 1)$ の starlike functions と convex functions の族を，

$$S_\alpha^* = \left\{ f(z) \in S \;\middle|\; Re\frac{zf'(z)}{f(z)} \geqq \alpha \text{ in } D \right\}, \tag{1.6}$$

及び

$$C_\alpha = \left\{ f(z) \in S \;\middle|\; Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geqq \alpha \text{ in } D \right\}, \tag{1.7}$$

とそれぞれ表わす．

以下の Theorem 1 及び Theorem 2 は S 内の radius problem に係わるもので，また Theorem 3 は UCV と C_α に関する包含関係のための条件を与えるものである．それは，F. Rønning の uniformly starlike functions と呼ばれる族 UST と S_α^* に関する包含問題，

"Find the largest $\alpha \geqq 0$ such that $UST \subset S_\alpha^*$ " [3]

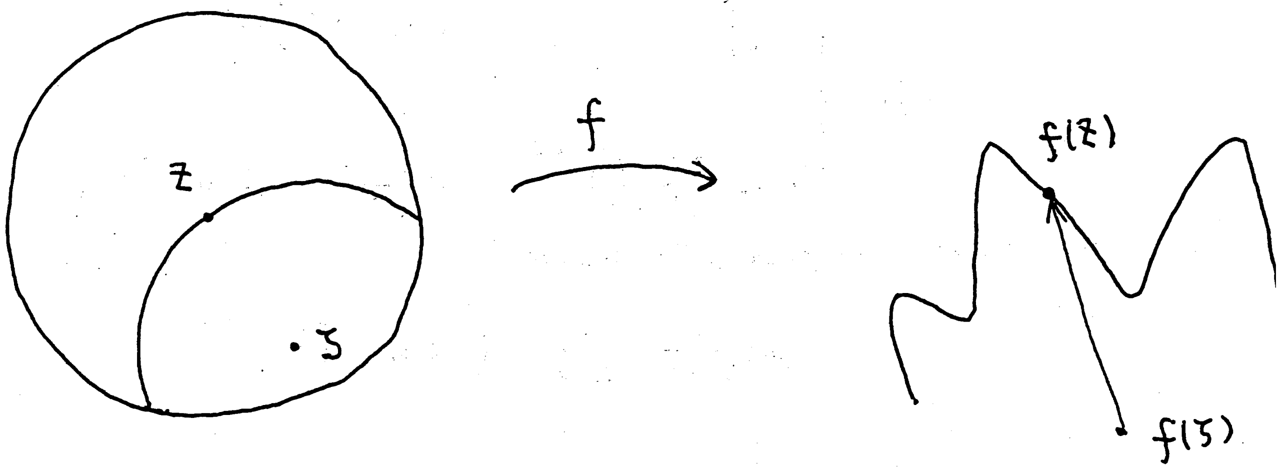
に類似するものであるが one variable characterization (1.3) のおかげで convex case はわかり易い． F. Rønning の問題との類似の言い方をすると

"Find the largest $\alpha \geqq 0$ such that $UCV \subset C_\alpha$ "

の解は，"$\alpha = \frac{1}{2}$ " ということになる． ちなみに UST の定義は

$$UST = \left\{ f(z) \in S \;\middle|\; Re\frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)f'(z)} \geqq 0 \text{ in } D \times D \right\}$$

であり，z と ζ が分かち難い． この条件は D 内の全ての円弧（但し，その中心 ζ も D 内に入っているもの）を $f(\zeta)$ に関する星型の curve に写すことを意味している．$UST \subset S_0^*$ は自明であり，F. Rønning 自身は $UST \not\subset S_{1/2}^*$ を示している．



Theorem 1. *The radius of uniform convexity of order* α $(0 \leqq \alpha < 1)$ *in* S *is*

$$\frac{4-\sqrt{13+2\alpha+\alpha^2}}{3+\alpha}.$$

これは，$\frac{4-\sqrt{13+2\alpha+\alpha^2}}{3+\alpha}$ が，全ての $f(z)$ in S と $r \leqq R$ なる r に対して $\frac{1}{r}f(rz)$ が UCV_α に属する，となるような R の上限であることを意味する．

Theorem 2. *For* $f(z)$ *in* S *, we have the following sharp inequality.*

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} \geqq \begin{cases} \dfrac{1-|z|}{1+|z|} & \text{if } 0 \leqq |z| \leqq \dfrac{e-1}{e+1}, \\ \cos x_0 \left(\dfrac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{\cos x_0} & \text{if } \dfrac{e-1}{e+1} < |z| \leqq \tanh\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

The value of x_0 *is defined by the equation ,*

$$\log\frac{1+|z|}{1-|z|} = \frac{x_0}{\sin x_0} \quad \left(0 < x_0 \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Corollary. *The radius of starlikeness of order* α $(0 \leqq \alpha < 1)$ *in* S *is the unique root* r_0 $\left(0 < r_0 \leqq \tanh\frac{\pi}{4}\right)$ *of the equation*

$$F(r) = \alpha,$$

where

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{1-r}{1+r} & \textit{if } 0 \leqq r \leqq \dfrac{e-1}{e+1}, \\[2ex] \cos x_0 \left(\dfrac{1-r}{1+r}\right)^{\cos x_0} & \textit{if } \dfrac{e-1}{e+1} < r \leqq \tanh \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

The value of x_0 is defined by the equation ,

$$\log \frac{1+r}{1-r} = \frac{x_0}{\sin x_0} \quad \left(0 < x_0 \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Theorem 3. *$UCV \subset C_\alpha$ if and only if $\alpha \leqq \dfrac{1}{2}$.*

2. Theorem 1 の証明

[3, Theorem 4] の証明と同様, sharp estimate

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leqq \frac{4r}{1-r^2} \tag{2.1}$$

for $|z| = r < 1$, を使う.

$$w = u + iv = \frac{zf''(z)}{(1-\alpha)f'(z)}$$

とおけば (1.5) 及び (2.1) はそれぞれ,

$$Re\{1+w\} \geqq |w| \tag{2.2}$$

$$\left|w - \frac{2r^2}{(1-\alpha)(1-r^2)}\right| \leqq \frac{4r}{(1-\alpha)(1-r^2)}, \tag{2.3}$$

となる. そこで, いつ disk (2.3) が放物線 (2.2) の中にあるか見てやる. disk (2.3) は帯状領域

$$\frac{2r(r-2)}{(1-\alpha)(1-r^2)} \leqq u \leqq \frac{2r(r+2)}{(1-\alpha)(1-r^2)} \tag{2.4}$$

にあり, 放物線 (2.2) の頂点は $(u,v) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ なので, 次が必要である,

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{2r(r-2)}{(1-\alpha)(1-r^2)}.$$

よって,

$$r \leqq \frac{4-\sqrt{13+2\alpha+\alpha^2}}{3+\alpha}. \tag{2.5}$$

逆に, 条件 (2.5) を仮定する. (2.3) より, その boundary は,

$$v^2 = \left(\frac{4r}{(1-\alpha)(1-r^2)}\right)^2 - \left(u - \frac{2r^2}{(1-\alpha)(1-r^2)}\right)^2 \tag{2.6}$$

を満たす. 他方, (2.2) は,

$$1+2u-v^2 \geqq 0 \tag{2.7}$$

を意味する. (2.6) を (2.7) に代入し,

$$\left(u - \frac{(3-\alpha)r^2-(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-r^2)}\right)^2 - \frac{4r^2\left((1-\alpha)r^2+(3+\alpha)\right)}{(1-\alpha)^2(1-r^2)^2} \geqq 0. \tag{2.8}$$

従って (2.8) が 条件 (2.5) のもとに interval (2.4) 内で成立することを確かめればよい.

ここで不等式,

$$\frac{(3-\alpha)r^2-(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-r^2)} \leqq \frac{2r(r-2)}{(1-\alpha)(1-r^2)} \tag{2.9}$$

は,

$$r \leqq \frac{-2+\sqrt{5-2\alpha+\alpha^2}}{1-\alpha}, \tag{2.10}$$

と同値であり, また簡単な計算により,

$$\frac{4-\sqrt{13+2\alpha+\alpha^2}}{3+\alpha} < \frac{-2+\sqrt{5-2\alpha+\alpha^2}}{1-\alpha} \tag{2.11}$$

(但し $0 \leqq \alpha < 1$), が解るので (2.9) は条件 (2.5) のもとに成立することを知る. よって, (2.8) が $u = \dfrac{2r(r-2)}{(1-\alpha)(1-r^2)}$ で成り立つなら, それは interval (2.4) 全域で成り立つ. そして実際,

$$\left(\frac{2r(r-2)}{(1-\alpha)(1-r^2)} - \frac{(3-\alpha)r^2-(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-r^2)}\right)^2 - \frac{4r^2\left((1-\alpha)r^2+(3+\alpha)\right)}{(1-\alpha)^2(1-r^2)^2}$$

$$= \frac{(3+\alpha)r^2-8r+(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-r^2)}$$

は条件 (2.5) のもとに non-negative である. 以上で Theorem 1 が示された.

3. Theorem 2 の証明

$\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ $(f \in S, |z| = r < 1)$ の range の境界の F. Rønning's による parametrization ,

$$W_r(\theta) = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\cos\theta} \left(\cos\left(\sin\theta \log\frac{1+r}{1-r}\right) + i\sin\left(\sin\theta\log\frac{1+r}{1-r}\right)\right), \quad (3.1)$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ [2] を用いる. 両辺の real part をとって,

$$Re\, W_r(\theta) = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\cos\theta} \cos\left(\sin\theta\log\frac{1+r}{1-r}\right). \quad (3.2)$$

ここで (3.2) の右辺が全ての θ で non-negative であるとする ,

$$\cos\left(\sin\theta\log\frac{1+r}{1-r}\right) \geqq 0 \text{ for all } \theta.$$

これより,

$$\log\frac{1+r}{1-r} \leqq \frac{\pi}{2},$$

よって,

$$r \leqq \tanh\frac{\pi}{4}.$$

先ず, $r < \tanh\frac{\pi}{4}$ と仮定し, (3.2) の両辺の logarithm をとり ,

$$\log Re\, W_r(\theta) = \cos\theta\log\frac{1+r}{1-r} + \log\left(\cos\left(\sin\theta\log\frac{1+r}{1-r}\right)\right). \quad (3.3)$$

ここで,

$$R := \log\frac{1+r}{1-r},$$

とおくと (3.3) の右辺は,

$$R\cos\theta + \log\left(\cos\left(R\sin\theta\right)\right), \quad (3.4)$$

となる. 最小値を求めるので ,

$$R\cos\theta = -\sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta}$$

としてよい．そこで，

$$x := R\sin\theta,$$

とおくと (3.4) は，

$$\Psi(x) := -\sqrt{R^2 - x^2} + \log\cos x,$$

$-R \leqq x \leqq R$, となる．この $\Psi(x)$ $(-R \leqq x \leqq R)$ の最小値を知りたい．その導函数は，

$$\Psi'(x) = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \tan x.$$

(I)　$R \leqq 1$ であれば，

$$\min_{-R \leqq x \leqq R} \Psi(x) = \Psi(0) = -R,$$

これは，

$$Re\, W_r(\theta) \geqq \frac{1-r}{1+r},$$

を意味する．よって，

$$Re \frac{zf'(z)}{f(z)} \geqq \frac{1-|z|}{1+|z|} \quad \text{for} \quad |z| \leqq \frac{e-1}{e+1}.$$

(II)　$1 < R < \frac{\pi}{2}$ であれば，等式

$$R = \frac{x_0}{\sin x_0},$$

を満たす unique な解 x_0 $(0 < x_0 < R)$ があり，そこで最小値がとられる，

$$\min_{-R \leqq x \leqq R} \Psi(x) = \Psi(x_0).$$

これは，

$$Re\, W_r(\theta) \geqq e^{\Psi(x_0)},$$

を意味し，

$$Re \frac{zf'(z)}{f(z)} \geqq \cos x_0 \left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{\cos x_0},$$

for $\dfrac{e-1}{e+1} < |z| < \tanh\dfrac{\pi}{4}$, ここに, x_0 $(0 < x_0 < \dfrac{\pi}{2})$ は, 等式

$$\log\frac{1+|z|}{1-|z|} = \frac{x_0}{\sin x_0},$$

の unique な解, を知る. さて, $r = \tanh\dfrac{\pi}{4}$, つまり $R = \dfrac{\pi}{2}$, であれば (3.2) は

$$Re\, W_{\tanh\frac{\pi}{4}}(\theta) = e^{\frac{\pi}{2}\cos\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right) \geqq 0,$$

すなわち,

$$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} \geqq 0 \ \text{ if } \ |z| = \tanh\frac{\pi}{4},$$

となり, これは case (II) に含めてよい. 以上で Theorem 2 が示された.

さて, $F(|z|)$ を Theorem 2 の不等式の右辺とすると, これは $|z|$ が 0 から $\tanh\frac{\pi}{4}$ まで増加するとき, 1 から 0 まで減少する . よって order α $(0 \leqq \alpha < 1)$ に対して, unique な解 r_0 $(0 < r_0 \leqq \tanh\frac{\pi}{4})$ があり $F(r_0) = \alpha$, を満たしその r_0 は radius of starlikeness of order α を与える. 例えば ,

$$r_0 = \frac{1}{3} \ \text{ if } \ \alpha = \frac{1}{2} \quad , \qquad r_0 = \frac{e-1}{e+1} \ \text{ if } \ \alpha = \frac{1}{e},$$
$$r_0 = \tanh\frac{\sqrt{2}\pi}{8} \ \text{ if } \ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \quad , \quad r_0 = \tanh\frac{\pi}{4} \ \text{ if } \ \alpha = 0,$$

などとなる.

4. Theorem 3 の証明

$w = u + iv = \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ とおくと, UCV の条件式 (1.3) と C_α の条件式 (1.7) はそれぞれ

$$1 + 2u \geqq v^2 \tag{4.1}$$

及び

$$u \geqq \alpha - 1, \tag{4.2}$$

となる. よって, 放物線 (4.1) が half-plane (4.2) に含まれるための条件は

$$\alpha \leqq \frac{1}{2}.$$

実際，条件の必要性は 不等式 (2.1) の sharpness，Kœbe 函数 の役割，に依っている．

References

1. A. W. Goodman, *On uniformly starlike functions*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 364–370.

2. F. Rønning, *Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 189–196.

3. ———, *Some radius results for univalent functions*, J. Math. Anal. Appl. **194** (1995), 319–327.

193 東京都 八王子市 椚田町 1220-2
E-mail address: kona@tokyo-ct.ac.jp