数理解析研究所講究録
1015 巻 1997 年 75-87

ある完備証券市場における均衡価格系に対する比較静学

東京都立大学　木島 正明 (Masaaki KIJIMA)
大阪大学　大西 匡光 (Masamitsu OHNISHI)

1　はじめに

本論文ではある完備な証券市場における証券の均衡価格系に関する比較静学を行う．いわゆる Arrow–Debreu 証券を導入して状態価格を定義することにより，下記の 2 種の変化に対する証券の価格系の変化はある単調性を持つことを示す: (1) 市場の投資家の不確実性に関する共有確率信念 (common probabilistic belief) が尤度比優位 (likelihood ratio dominance) の意味でシフトする場合; (2) 市場の投資家の Arrow–Pratt の意味での危険回避性が変化する場合．

2　証券市場モデル

1 期間の証券市場モデルを考える．期末の市場の状態からなる有限集合 (標本空間) を

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

とする．市場には $n\ (= |\Omega|)$ 種の証券が存在するものとし，

$X_i\ (:\Omega \to \mathcal{R}),\ i = 1, 2, \cdots, n:$ 証券 i の期末の価格 (配当) を表す確率変数

と定義し，

$$\begin{aligned} x_{ij} &= X_i(\omega_j), \quad \omega_j \in \Omega, \\ \boldsymbol{x}_i &= (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})^T \end{aligned}$$

と定義する．混乱することなく，証券 i を‘証券 X_i’，あるいは‘証券 $\boldsymbol{x}_i$’と呼ぶこともある．さらに記法の便宜上，$n \times n$–行列 X と n 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}\ (:\Omega \to \mathcal{R}^n)$ を，それぞれ

$$\begin{aligned} X &= \left(\boldsymbol{x}_1^T, \boldsymbol{x}_2^T, \cdots, \boldsymbol{x}_n^T\right)^T, \\ \boldsymbol{X} &= (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T \end{aligned}$$

で定義する．

仮定 2.1 (完備性) 市場は完備である，すなわち，

$$\{\boldsymbol{x}_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$$

は線形独立である (行列 X は正則である)．　□

上記の仮定より, $\boldsymbol{x}_i,\ i=1,2,\cdots,n$ は $\mathcal{R}^n$ を張る, すなわち

$$\mathrm{span}\,\{\boldsymbol{x}_i : i=1,2,\cdots,n\} = \left\{\boldsymbol{a}^T X : \boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^n\right\} = \mathcal{R}^n.$$

各状態 $\omega_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ に対して, 状態条件付き請求権 (Arrow–Debreu 証券) D_i を想定し,

$$D_i(\omega_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad \omega_j \in \Omega$$

とする. すなわち D_i は期末において状態 ω_i が起こったときにのみ 1 の配当を産む証券である. このとき

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} D_j$$

が成立する. いま, 証券 $D_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ の期首の価格 (状態 ω_i の '状態価格') を p_i とする. このとき証券 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ の期首の価格を q_i とすると, 価格系の線形性より,

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} p_j, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{2.1}$$

が成立する. いま, 2 つの価格ベクトル

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= (p_1,p_2,\cdots,p_n)^T, \\ \boldsymbol{q} &= (q_1,q_2,\cdots,q_n)^T \end{aligned}$$

を定義すれば, 式 (2.1) は, ベクトル–行列形式で,

$$\boldsymbol{q} = X\boldsymbol{p} \quad (\boldsymbol{p} = X^{-1}\boldsymbol{q})$$

と表される.

さて, 証券市場には m 人 $(m \geq 1)$ の投資家が存在し, 投資家 $i\ (=1,2,\cdots,m)$ は順序組 $(u_i, \boldsymbol{e}_i)$ で規定される, ただし

$u_i\ (: \mathcal{R} \to \mathcal{R})$: 投資家 i の期末の消費に対する von Neumann–Morgenstern (vN–M) 効用関数,

$e_{ij},\ j=1,2,\cdots,n$: 投資家 i の期末の状態 ω_j における消費に対する初期賦存量

であり,

$$\boldsymbol{e}_i = (e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in})^T \in \mathcal{R}^n$$

と定義される. また, 便宜上, 確率変数 $E_i,\ i=1,2,\cdots,m$ を

$$E_i(\omega_j) = e_{ij}, \quad \omega_j \in \Omega$$

と定義する. さらに, すべての投資家について総和を取って,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} &= \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{e}_i \in \mathcal{R}^n_{++}, \\ E &= \sum_{i=1}^{m} E_i\ (: \Omega \to \mathcal{R}_{++}) \end{aligned}$$

を定義する.

すべての投資家は, 期末の市場の状態に関する不確実性について, 同一の確率的評価を持っており,

$\pi_i = P(\{\omega_i\}) \quad (>0),\ i=1,2,\cdots,n$: 状態 ω_i に対する市場の共有確率信念 (common probabilistic belief)

と定義し,

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)^T \in \Delta^n$$

と定義する, ただし Δ^n は n 次元確率分布ベクトルの全体からなる集合である, すなわち,

$$\Delta^n = \left\{ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T \in \mathcal{R}^n : \alpha_i \geq 0,\ \ i=1,2,\cdots,n;\ \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

投資家 i の最適化問題は, 決定変数として

$a_{ij},\ j=1,2,\cdots,n$: 証券 X_j の購入・売却枚数

からなるポートフォリオ

$$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})^T \in \mathcal{R}^n$$

を持つ, 次の数理計画問題として表すことができる:

$$(\mathbf{PS1})_i \left| \begin{array}{ll} \text{maximize} & E_{\boldsymbol{\pi}}\left[u_i\left(E_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k\right)\right] = \sum_{j=1}^{n} \pi_j u_i\left(e_{ij} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj}\right) \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq 0, \end{array} \right.$$

ただし

$E_{\boldsymbol{\pi}}$: $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)^T$ による期待値

である.

仮定 2.1 より, 市場は完備であるから, 決定変数として

$$\boldsymbol{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in})^T \in \mathcal{R}^n$$

を持つ, $(\mathrm{PS1})_i$ と等価な数理計画問題として,

$$(\mathbf{PS2})_i \left| \begin{array}{ll} \text{maximize} & E_{\boldsymbol{\pi}}\left[u_i\left(E_i + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} D_k\right)\right] = \sum_{j=1}^{n} \pi_j u_i\left(e_{ij} + b_{ij}\right) \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_j \leq 0 \end{array} \right.$$

を得る, ただし

$b_{ij},\ j=1,2,\cdots,n$: 状態条件付き請求権 D_j の購入・売却枚数

である.

あるいは

$c_{ij} = e_{ij} + b_{ij},\ j=1,2,\cdots,n$: 期末の状態 ω_j における消費量

として

$$(\mathbf{PS3})_i \left| \begin{array}{ll} \text{maximize} & E_{\boldsymbol{\pi}}\left[u_i\left(C_i\right)\right] = \sum_{j=1}^{n} \pi_j u_i\left(c_{ij}\right) \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_j \leq \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j \end{array} \right.$$

を得る, ただし

$C_i\ (\Omega \to \mathcal{R})$: 期末の消費量を表す確率変数

であり,

$$C_i(\omega_j) = c_{ij}, \quad \omega_j \in \Omega$$

で定義される. また便宜上, 消費計画を

$$\boldsymbol{c}_i = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})^T \in \mathcal{R}^n$$

と定義する.

以上から, 証券市場モデルは順序組

$$(((u_i, \boldsymbol{e}_i); i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{\pi}, X)$$

により記述される.

3 均衡価格系

定義 3.1 (均衡) 証券市場モデル $(((u_i, \boldsymbol{e}_i); i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{\pi}, X)$ における均衡とは, 各投資家 $i\ (= 1, 2, \cdots, m)$ のポートフォリオ $\boldsymbol{a}_i$ と証券の価格系 $\boldsymbol{q}$ との順序組

$$((\boldsymbol{a}_i; i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{q})$$

で, 以下の 2 条件を満たすものを言う:

(C1) 証券の価格系 $\boldsymbol{q}$ を所与とすると, 各投資家 $i\ (= 1, 2, \cdots, m)$ のポートフォリオ $\boldsymbol{a}_i$ は数理計画問題 $(\mathrm{PS1})_i$ の最適解である,

(C2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i = \mathbf{o}.$ □

あるいは, $(\mathrm{PS1})_i$ と等価な数理計画問題 $(\mathrm{PS3})_i$ に基づけば:

定義 3.2 (均衡) 証券市場モデル $(((u_i, \boldsymbol{e}_i); i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{\pi}, X)$ における均衡とは, 各投資家 $i\ (= 1, 2, \cdots, m)$ の消費計画 $\boldsymbol{c}_i$ と状態価格系 $\boldsymbol{p}$ との順序組

$$((\boldsymbol{c}_i; i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{p})$$

で, 以下の 2 条件を満たすものを言う:

(C1') 状態価格系 $\boldsymbol{p}$ を所与とすると, 各投資家 $i\ (= 1, 2, \cdots, m)$ の消費計画 $\boldsymbol{c}_i$ は数理計画問題 $(\mathrm{PS3})_i$ の最適解である,

(C2') $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{e}.$ □

定義 3.3 (実行可能消費配分) 証券市場モデル $(((u_i, \boldsymbol{e}_i); i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{\pi}, X)$ における消費配分

$$(\boldsymbol{c}_i; i = 1, 2, \cdots, m) \in (\mathcal{R}^n)^m$$

が実行可能とは,

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{c}_i \leq \boldsymbol{e} \tag{3.1}$$

を満たす場合を言う □

定義 3.4 (Pareto 効率的消費配分) 証券市場モデル $(((u_i, \boldsymbol{e}_i); i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{\pi}, X)$ における実行可能消費配分 $(\boldsymbol{c}_i; i = 1, 2, \cdots, m) \in (\mathcal{R}^n)^m$ が Pareto 効率的であるとは, 次の条件を満たす他の実行可能消費配分 $(\boldsymbol{c}'_i; i = 1, 2, \cdots, m) \in (\mathcal{R}^n)^m$ が存在しない場合を言う: すべての投資家 $i = 1, 2, \cdots, m$ に対して,

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j u_i(c'_{ij}) \geq \sum_{j=1}^{n} \pi_j u_i(c_{ij}), \tag{3.2}$$

が成立し, さらに, ある投資家 $i\ (= 1, 2, \cdots, m)$ に対しては,

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j u_i(c'_{ij}) > \sum_{j=1}^{n} \pi_j u_i(c_{ij}) \tag{3.3}$$

が成り立つ. □

本論文では市場の完備性を仮定しているので (仮定 2.1), 次に述べる厚生経済学の第 1 定理が成立する.

定理 3.1 (厚生経済学の第 1 定理) $((\boldsymbol{c}_i; i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{p})$ を証券市場モデル $(((u_i, \boldsymbol{e}_i); i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{\pi}, X)$ の均衡であるとする. このとき, 各投資家 $i\ (= 1, 2, \cdots, m)$ の消費計画 $\boldsymbol{c}_i$ からなる消費配分 $(\boldsymbol{c}_i; i = 1, 2, \cdots, m) \in (\mathcal{R}^n)^m$ は Pareto 効率的である. □

いま, 投資家の重みづけベクトル

$$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^T \in \mathcal{R}^m_+$$

に対して, (効用) 関数 $u_{\boldsymbol{w}}\ (: \mathcal{R} \to \mathcal{R})$ を

$$u_{\boldsymbol{w}}(y) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{m} w_i u_i(x_i) : \sum_{i=1}^{m} x_i \leq y\right\}, \quad y \in \mathcal{R} \tag{3.4}$$

で定義する.

各投資家の vN–M 効用関数 $u_i,\ i = 1, 2, \cdots, m$ が単調増加な凹関数であれば, 任意の重みづけベクトル $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^T \in \mathcal{R}^m_+$ に対して, (効用) 関数 $u_{\boldsymbol{w}}$ もまた単調増加な凹関数である.

上述の厚生経済学の第 1 定理からの帰結として, 次の定理を得る.

定理 3.2 $((\boldsymbol{c}_i; i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{p})$ を証券市場モデル $(((u_i, \boldsymbol{e}_i); i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{\pi}, X)$ の均衡であるとする. このとき, ある重みづけベクトル $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^T \in \mathcal{R}^m_+$ が存在して, vN–M 効用関数 $u_{\boldsymbol{w}}$, 初期賦存量 $\boldsymbol{e}\ (= \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{e}_i)$ を持つただ 1 人の投資家からなる証券市場モデル

$$((u_{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{e}), \boldsymbol{\pi}, X)$$

において, $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p})$ は均衡を与える. □

この定理から $((\boldsymbol{c}_i; i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{p})$ を証券市場モデル $(((u_i, \boldsymbol{e}_i); i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{\pi}, X)$ の均衡であるとすると, ある重みづけベクトル $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^T \in \mathcal{R}^m_+$ が存在して, 状態価格系 $\boldsymbol{p}$ を所与とすると, 消費計画 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T = \boldsymbol{e}$ は, vN–M 効用関数 $u_{\boldsymbol{w}}$, 初期賦存量 $\boldsymbol{e}$ を持つ投資家 $(u_{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{e})$ の次の最適化問題の最適解でなければならない (条件 C2'):

$$\textbf{(PS3)}\left|\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \pi_j u_{\boldsymbol{w}}(c_j) \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j p_j \leq \sum_{j=1}^{n} e_j p_j. \end{array}\right.$$

以下では, 簡単のため,

$$u = u_{\boldsymbol{w}}$$

と表し, 投資家 $(u, \boldsymbol{e})$ を市場の統合的投資家 (aggregated investor) と呼ぶことにする.

仮定 3.1 市場の統合的投資家の vN–M 効用関数 $u\ (: \mathcal{R} \to \mathcal{R})$ は 2 階微分可能であり,

$$u' > 0; \quad u'' \leq 0,$$

ただし u', u'' は, それぞれ u の 1 階および 2 階導関数である. □

均衡における状態価格系 $\boldsymbol{p}$ を, 統合的投資家の vN–M 効用関数 u と市場の共有確率信念 $\boldsymbol{\pi}$ で特徴づけるために, 上記の数理計画問題の最適性の条件を吟味する.

一般性を失うことなく,

$$e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_n \tag{3.5}$$

と状態が番号付けられているものとする. すなわち, より番号の大きい状態が起こる方が市場にとってはより好ましい. このとき, $u'' \leq 0$ より,

$$u'(e_1) \geq u'(e_2) \geq \cdots \geq u'(e_n)\ (> 0) \tag{3.6}$$

が成立することに注意する.

同じく, $u'' \leq 0$ より, 数理計画問題 (PS3) は凸計画問題となっている.

いま,

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \in \mathcal{R}^n$$

とし, (PS3) に対する Lagrange 関数を

$$L(\boldsymbol{c}; \lambda) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j u(c_j) - \lambda \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j p_j - \sum_{j=1}^{n} e_j p_j \right\}, \quad \boldsymbol{c} \in \mathcal{R}^n, \quad \lambda \in \mathcal{R}_+ \tag{3.7}$$

と定義すると, 問題 (PS3) に対する最適性の必要十分条件として, 以下の Karush–Kuhn–Tucker 条件を得る:

$$\frac{\partial L}{\partial c_i}(\boldsymbol{c}; \lambda) \ = \ \pi_i u'(c_i) - \lambda p_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\boldsymbol{c}; \lambda) \ = \ -\left\{ \sum_{j=1}^{n} c_i p_i - \sum_{j=1}^{n} e_i p_i \right\} \geq 0, \tag{3.9}$$

$$\lambda \geq 0, \tag{3.10}$$

$$\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j p_j - \sum_{j=1}^{n} e_j p_j \right\} = 0. \tag{3.11}$$

消費計画 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}$ は上の最適性条件を満たさなければならないので, 式 (3.8) に代入して,

$$\pi_i u'(e_i) - \lambda p_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3.12}$$

を得る. 仮定から

$$\pi_i > 0; \quad u'(e_i) > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

であるから,

$$\lambda > 0$$

である, したがって

$$p_i = \frac{\pi_i u'(e_i)}{\lambda} \tag{3.13}$$

を得る.

状態価格系 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$ には正の乗数分の任意性があるため, 正規化条件として,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i p_i = 1 \tag{3.14}$$

を設ければ, 式 (3.13) の両辺に e_i を乗じて総和を取り,

$$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i p_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \pi_i \left\{ e_i u'(e_i) \right\}$$

を得る. したがって

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \left\{ e_i u'(e_i) \right\} \tag{3.15}$$

を得る.

以上を定理の形でまとめれば:

定理 3.3 均衡における状態価格系 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$ は次の関係式を満足する:

$$p_i = \frac{\pi_i u'(e_i)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \pi_k \left\{ e_k u'(e_k) \right\}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.16}$$

□

上記の定理から, 下記の系が直接的に得られる.

系 3.1

$$R = [\text{安全資産の無危険利子率}] + 1 = GHM_{\boldsymbol{\pi}}[E; u'], \tag{3.17}$$

ただし

$$E(\omega_i) = e_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

は期末の市場の総消費量を表す確率変数であり, $GHM_{\boldsymbol{\pi}}[E; u']$ は確率変数 E の市場の統合的投資家の限界効用関数 u' に関する一般化調和平均 (Generalized Harmonic Mean) で, 次式で定義される:

$$GHM_{\boldsymbol{\pi}}[E; u'] = \frac{E_{\boldsymbol{\pi}}[Eu'(E)]}{E_{\boldsymbol{\pi}}[u'(E)]} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \pi_k \left\{ e_k u'(e_k) \right\}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi_i u'(e_i)}. \tag{3.18}$$

□

系 3.1 は "[安全資産の無危険利子率] + 1 は期末の市場の総消費量の一般化調和平均である" ことを述べている.

4 市場の共有確率信念の与える影響

本節では,

- 市場に存在する証券の種類とその期末の価格 (配当), すなわち X に変化が無く,
- 各投資家 $i\ (=1,2,\cdots,M)$ の vN–M 効用関数 u_i と初期賦存量 $\boldsymbol{e}_i$ に変化が無く,

したがって

- 市場の統合的投資家の vN–M 効用関数 u と初期賦存量 $\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)^T$ に変化が無い

ものと仮定して, 証券市場の共有確率信念 $\boldsymbol{\pi}$ が均衡における状態価格系 $\boldsymbol{p}$ に与える影響を調べる.

そのために 2, 3 の準備が必要である.

定義 4.1 (尤度比優位)

$$\boldsymbol{\alpha}^j=\left(\alpha_1^j,\alpha_2^j,\cdots,\alpha_n^j\right)^T\in\Delta^n,\quad j=1,2$$

を Ω 上の 2 つの確率分布 (n 次元確率分布ベクトル) とする. α_i^j が i と j に関して TP$_2$ (Totally Positive of order 2), すなわち

$$\begin{vmatrix}\alpha_i^1 & \alpha_k^1\\ \alpha_i^2 & \alpha_k^2\end{vmatrix}\geq 0,\quad 1\leq i\leq k\leq n \tag{4.1}$$

が成立するとき, $\boldsymbol{\alpha}^2$ は $\boldsymbol{\alpha}^1$ より, 尤度比優位 (Likelihood Ratio Dominance) の意味で大きいと言い,

$$\boldsymbol{\alpha}^1\leq_{\mathrm{LRD}}\boldsymbol{\alpha}^2 \tag{4.2}$$

と書く. □

不等式 (4.1) は

$$\frac{\alpha_i^2}{\alpha_i^1}\ が\ i\ に関して単調増加 \tag{4.3}$$

であることと等価であることに注意する.[1]

注 4.1 期末における市場の状態に関する '事前' の市場の投資家の共有確率信念を

$$\boldsymbol{\nu}=(\nu(\omega_1),\nu(\omega_2),\cdots,\nu(\omega_n))^T\in\Delta^n$$

としよう. いま, 市場が開かれる前に, 期末における市場の状態 $\omega\in\Omega$ に関する '知らせ (news)'

$$\theta\in\Theta=\{\theta^1,\theta^2,\cdots,\theta^h\}\subset\mathcal{R} \tag{4.4}$$

が確率 $p(\theta|\omega)$ で流れるものとし, その確率分布族

$$\left\{\left(p(\theta^1|\omega_i),p(\theta^2|\omega_i),\cdots,p(\theta^h|\omega_i)\right)^T : i=1,2,\cdots,n\right\}$$

は市場の投資家の共有情報であるものとする.

知らせ $\theta\in\Theta$ が流れたという条件のもとでの '事後' の市場の投資家の条件付き共有確率信念

$$\boldsymbol{\nu}(\theta)=(\nu(\omega_1|\theta),\nu(\omega_2|\theta),\cdots,\nu(\omega_n|\theta))^T\in\Delta^n \tag{4.5}$$

[1] 本論文では '増加', '減少' を '弱い' 意味で用いる, すなわち '増加' は非減少を, '減少' は非増加を意味するものとする.

は, Bayes の公式を用いれば,

$$\nu(\omega_i|\theta) = \frac{\nu(\omega_i)p(\theta|\omega_i)}{\sum_{k=1}^{n}\nu(\omega_k)p(\theta|\omega_k)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{4.6}$$

となる.

いま, 確率分布族

$$\left\{\left(p(\theta^1|\omega_i), p(\theta^2|\omega_i), \cdots, p(\theta^h|\omega_i)\right) : i = 1, 2, \cdots, n\right\}$$

が単調尤度比 (monotone likelihood ratio) を持つ, すなわち $p(\theta^k|\omega_i)$ が k と i に関して TP_2:

$$\begin{vmatrix} p(\theta^k|\omega_i) & p(\theta^l|\omega_i) \\ p(\theta^k|\omega_j) & p(\theta^l|\omega_j) \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{array}{l} 1 \leq k \leq l \leq h \\ 1 \leq i \leq j \leq n \end{array} \tag{4.7}$$

であるとものとする. このとき '悪い知らせ (bad news)' θ^k と '良い知らせ (good news)' θ^l $(1 \leq k \leq l \leq h)$ が流れた場合の '事後' の市場の条件付き共有確率信念 $\boldsymbol{\nu}(\theta^k)$, $\boldsymbol{\nu}(\theta^l)$ の間には尤度比優位の意味での順序:

$$\boldsymbol{\nu}(\theta^k) \leq_{\mathrm{LRD}} \boldsymbol{\nu}(\theta^l) \tag{4.8}$$

が成立する (Whitt [21], Milgrom [15] を参照). □

定義 4.2 (1 次の確率優位)

$$\boldsymbol{\alpha}^j = \left(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \cdots, \alpha_n^j\right)^T \in \Delta^n, \quad j = 1, 2$$

を Ω 上の 2 つの確率分布 (n 次元確率分布ベクトル) とする.

$$\sum_{i=k}^{n}\alpha_i^1 \leq \sum_{i=k}^{n}\alpha_i^2, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{4.9}$$

が成立するとき, $\boldsymbol{\alpha}^2$ は $\boldsymbol{\alpha}^1$ より, 1 次の確率優位 (First order Stochastic Dominance) の意味で大きいと言い,

$$\boldsymbol{\alpha}^1 \leq_{\mathrm{FSD}} \boldsymbol{\alpha}^2 \tag{4.10}$$

と書く. □

下記の定理の内容は確率優位 (確率順序) の理論において良く知られている (例えば Kijima and Ohnishi [12], Shaked and Shanthikumar [20]).

定理 4.1

$$\boldsymbol{\alpha}^j = \left(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \cdots, \alpha_n^j\right)^T, \quad j = 1, 2$$

を Ω 上の 2 つの確率分布 (n 次元確率分布ベクトル) とする. このとき以下が成立する:

1. $\boldsymbol{\alpha}^1 \leq_{\mathrm{LRD}} \boldsymbol{\alpha}^2$ ならば $\boldsymbol{\alpha}^1 \leq_{\mathrm{FSD}} \boldsymbol{\alpha}^2$.

2. $\boldsymbol{\alpha}^1 \leq_{\mathrm{FSD}} \boldsymbol{\alpha}^2$ が成立するための必要十分条件は, 単調増加な要素を持つ n 次元ベクトル

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T \quad (f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n)$$

のすべてに対して,

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^1 f_i \leq \sum_{i=k}^{n}\alpha_i^2 f_i \tag{4.11}$$

が成立することである. □

上記の定理の 1. と 2. を考え合わせれば, $\boldsymbol{\alpha}^1 \leq_{\mathrm{LRD}} \boldsymbol{\alpha}^2$ ならば, 単調増加な要素を持つ n 次元ベクトル

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T \quad (f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n)$$

のすべてに対して,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^1 f_i \leq \sum_{i=k}^{n} \alpha_i^2 f_i \tag{4.12}$$

が成立する.

さて簡単のため, 証券 $j = 1, 2, \cdots, n$ とそれらから構成される証券ポートフォリオを代表して,

$X\ (: \Omega \to \mathcal{R})$: ある証券ポートフォリオの期末の価格 (配当) を表す確率変数

とし,

$$\begin{aligned} x_i &= X(\omega_i), \quad \omega_i \in \Omega, \\ \boldsymbol{x} &= (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \end{aligned}$$

と表し, その期首の価格を q で表すことにする.

定理 4.2

1. もし

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \tag{4.13}$$

ならば,

$$q \leq \frac{1}{R}\, E_{\boldsymbol{\pi}}[X]; \tag{4.14}$$

2. 逆に

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \tag{4.15}$$

ならば,

$$q \geq \frac{1}{R}\, E_{\boldsymbol{\pi}}[X] \tag{4.16}$$

が成立する. □

式 (4.14), (4.16) において,

$$E_{\boldsymbol{\pi}}[X] - qR = q\left\{E_{\boldsymbol{\pi}}\left[\frac{X}{q}\right] - R\right\} \tag{4.17}$$

は証券ポートフォリオの期待超過収益と同じ符号を持つことに注意すれば, 定理 4.2 は “市場の期末の総消費量と ‘正 (負) に連動する’ 収益を持つ証券ポートフォリオの期待超過収益は正 (負) である” ことを述べている.

いま, 共有確率信念 $\boldsymbol{\pi}$ として 2 種 $\boldsymbol{\pi}^j$, $j = 1, 2$ を考え, それらに対応する $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$, q, R を, それぞれ $\boldsymbol{p}^j = \left(p_1^j, p_2^j, \cdots, p_n^j\right)^T$, q^j, R^j, $j = 1, 2$ で表すことにする.

定理 4.3 市場の共有確率信念 $\boldsymbol{\pi}$ が, 尤度比優位の意味で大きくなれば, 安全資産の期首の価格は減少する, したがってその無危険利子率は増加する, すなわち

$$\boldsymbol{\pi}^1 \leq_{\mathrm{LRD}} \boldsymbol{\pi}^2 \ \text{ならば}\ R^1 \leq R^2. \tag{4.18}$$

□

定理 4.4

$$\boldsymbol{\pi}^1 \leq_{\mathrm{LRD}} \boldsymbol{\pi}^2 \tag{4.19}$$

と仮定する.

1. もし

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \tag{4.20}$$

ならば,

$$q^1 R^1 \leq q^2 R^2; \tag{4.21}$$

2. 逆に

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \tag{4.22}$$

ならば,

$$q^1 R^1 \geq q^2 R^2, \tag{4.23}$$

が成立する. □

定理 4.4 は“市場の共有確率信念 $\boldsymbol{\pi}$ が尤度比優位の意味で大きくなれば, 市場の期末の総消費量と‘正 (負) に連動する’期末の価格 (配当) を持つ証券ポートフォリオの, 安全資産を numéraire とする期首の価格は増加 (減少) する” ことを述べている.

5 市場の危険回避性の与える影響

本節では, 前節とは異なり

- 市場に存在する証券の種類とその期末の価格 (配当), すなわち X に変化が無く,
- 証券市場の共有確率信念 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)^T$ に変化が無く,
- 各投資家 $i\ (= 1, 2, \cdots, M)$ の初期賦存量 $\boldsymbol{e}_i$ に変化が無く,

したがって,

- 市場の統合的投資家の初期賦存量 $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)^T$ に変化が無い

ものと仮定して, 市場の統合的投資家の vN–M 効用関数 u が均衡における状態価格系 $\boldsymbol{p}$ に与える影響を調べる.

そのために以下の準備が必要である.

定義 5.1 (Arrow–Pratt の危険回避性の順序) $u^j,\ j = 1, 2$ を, $\mathcal{R}$ の共通の部分集合上で定義された危険回避的 vN–M 効用関数とする.

$$-\frac{u^{1\prime\prime}(x)}{u^{1\prime}(x)} \geq -\frac{u^{2\prime\prime}(x)}{u^{2\prime}(x)}, \quad \forall x \tag{5.1}$$

が成立するとき, u^1 は u^2 より, Arrow–Pratt の意味で, より危険回避的であると言い,

$$u^1 \geq_{\mathrm{RA}} u^2 \tag{5.2}$$

と書く, ただし $u^{j\prime}\ (> 0)$, $u^{j\prime\prime}\ (\leq 0)$, $j = 1, 2$ は, それぞれ u^j の 1 階および 2 階導関数である. □

式 (5.1) と同値な条件は,

$$\begin{vmatrix} u^{1\prime}(x) & u^{1\prime}(y) \\ u^{2\prime}(x) & u^{2\prime}(y) \end{vmatrix} \geq 0, \quad x \leq y, \tag{5.3}$$

すなわち $u^{j\prime}(x)$ が j と x に関して TP_2 となることである (Jewitt [6, 7], Kijima and Ohnishi [11] を参照). さらにこの条件は下記とも等価である:

$$\frac{u^{2\prime}(x)}{u^{1\prime}(x)} \text{ が } x \text{ に関して単調増加.} \tag{5.4}$$

いま, 市場の統合的投資家の vN–M 効用関数 u として 2 種 u^j, $j = 1, 2$ を考え, それらに対応する $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$, q, R を, それぞれ $\boldsymbol{p}^j = \left(p_1^j, p_2^j, \cdots, p_n^j\right)^T$, q^j, R^j, $j = 1, 2$ で表すことにする.

定理 5.1 市場の統合的投資家の vN–M 効用関数 u が, Arrow–Pratt の意味で, より危険回避的になれば, 安全資産の期首の価格は増加する, したがってその無危険利子率は減少する, すなわち

$$u^1 \geq_{\mathrm{RA}} u^2 \text{ ならば } R^1 \leq R^2. \tag{5.5}$$

□

定理 5.2

$$u^1 \geq_{\mathrm{RA}} u^2 \tag{5.6}$$

と仮定する.

1. もし

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \tag{5.7}$$

ならば,

$$q^1 R^1 \leq q^2 R^2; \tag{5.8}$$

2. 逆に

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \tag{5.9}$$

ならば,

$$q^1 R^1 \geq q^2 R^2 \tag{5.10}$$

が成立する. □

定理 5.2 は "市場の統合的投資家の vN–M 効用関数 u が, Arrow–Pratt の意味で, より危険回避的になれば, 市場の期末の総消費量と '正 (負) に連動する' 期末の価格 (配当) を持つ証券ポートフォリオの, 安全資産を numéraire とする期首の価格は減少 (増加) する" ことを述べている.

6 おわりに

本論文では, 市場の完備性を仮定して, 市場の投資家がただ 1 人の統合的投資家に統合化できるものとすることで, 比較静学分析を簡単化している. しかしながら市場における投資家の共有確率信念, あるいは各投資家の危険回避性の変化が, 市場の統合的投資家の危険回避性にどのような変化をもたらすかについての考察は不十分であった. これらの研究については今後の課題としたい.

参考文献

[1] Arrow, K. J., *Essays in the Theory of Risk–Bearing*, Markham, Chicago, 1971.

[2] Debreu, G., *Theory of Value*, Wiley, New York, 1959.

[3] Duffie, D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd Ed., Princeton University Press, Princeton, 1996.

[4] Huang, C. and Litzenberger, R. H., *Foundations for Financial Economics*, North–Holland, New York, 1988.

[5] Ingersoll, J. E. Jr., *Theory of Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield, New York, 1987.

[6] Jewitt, I., "Risk Aversion and the Choice between Risky Prospects: The Preservation of Comparative Statics Results", *Review of Economic Studies*, **54** (1987), pp. 73–85.

[7] Jewitt, I., "Choosing between Risky Prospects: The Characterization of Comparative Statics Results, and Location Independent Risk", *Management Science*, **35** (1989), pp. 60–70.

[8] Karlin, S., *Total Positivity*, **I**, Stanford University Press, Stanford, 1968.

[9] Keilson, J. and Sumita, U., "Uniform Stochastic Ordering and Related Properties", *Canadian Journal of Statistics*, **10** (1982), pp. 181–198.

[10] Kijima, M. and Ohnishi, M., Addendum to the Bivariate Characterization of Stochastic Orders, Technical Report No. 92–11, Graduate School of Systems Management, The University of Tsukuba, Tokyo, 1992.

[11] Kijima, M. and Ohnishi, M., "Mean–Risk Analysis of Risk Aversion and Wealth Effects on Optimal Portfolios with Multiple Investment Opportunities", *Annals of Operations Research*, **45** (1993), pp. 147–163.

[12] Kijima, M. and Ohnishi, M., "Portfolio Selection Problems via the Bivariate Characterization of Stochastic Dominance Relations", *Mathematical Finance*, **6** (1996), pp. 237–277.

[13] Kijima, M. and Ohnishi, M., "Further Results on Comparative Statics for Choice under Risk", in *Stochastic Models in Engineering, Technology and Management* (Wilson, R. J., Murthy, D. N. P., and Osaki, S. Eds.) (1996), Proceedings of the Second Australia–Japan Workshop Held at Gold Coast, Australia, July 17–19, 1996, pp. 321–326.

[14] Lehman, E. L., *Testing Statistical Hypotheses*, John Wiley & Sons, New York, 1959.

[15] Milgrom, P. R., "Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications", *Bell Journal of Economics*, **12** (1981), pp. 380–391.

[16] Pratt, J. W., "Risk Aversion in the Small and the Large", *Econometrica*, **32** (1964), pp. 122–136.

[17] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (1994), *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, San Diego.

[18] Whitt, W., "A Note on the Influence of the Sample on the Posterior Distribution", *Journal of the American Statistical Association*, **74** (1979), pp. 424–426.