数理解析研究所講究録
1016巻 1997年 1-7

PARABOLIC EQUATIONS WHOSE NONNEGATIVE SOLUTIONS IN A CYLINDER ARE DETERMINED ONLY BY THEIR INITIAL VALUES

石毛　和弘 (東北大・情報) (KAZUHIRO ISHIGE)
村田　實 (東工大・理) (MINORU MURATA)

1. Introduction

Poincaré disc $B=\{x\in\mathbb{R}^2\,;\,|x|<1\}$ 上の計量は

$$ds^2=\frac{4(dx_1^2+dx_2^2)}{(1-|x|^2)^2}$$

である．よって，Poincaré disc 上の熱方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}u=\frac{(1-|x|^2)^2}{4}\Delta u$$

と書け，境界∂B 上で退化する放物型方程式の典型的な例となっている．我々は，このような方程式の係数が，考えている領域の境界で退化する場合の放物型方程式の初期値問題の非負値解の一意性，非一意性について考察する．この論文では，Poincaré disc 上の熱方程式を一般化し，次の初期値問題の非負値解の一意性，非一意性について考察する．

問題．初期値問題

$$\text{(P)}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\dfrac{1}{w(x)}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,t)\right), & (x,t)\in D\times(0,T),\\ u(x,0)=0, & x\in D\end{cases}$$

の非負値解$u\geq 0$が恒等的に零に限るための必要十分条件を求めよ．ここで，$T>0$, $D\subset\mathbb{R}^n$ は C^1級有界領域, $a_{ij}(x)$ は C^1級関数で，$\exists\lambda>0$ *s.t.*

$$\lambda|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\lambda^{-1}|\xi|^2,\qquad\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ x\in D$$

とする．また，w は $w,w^{-1}\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(D)$ となる D 上の正値関数とする．

さらに，以下，uが初期値問題 (P) の解ならば，

$$u\in L^\infty((0,T):L^2_{\mathrm{loc}}(D))\cap L^2((0,T):H^1_{\mathrm{loc}}(D))$$

とし，解の一意性とは，この関数空間における一意性について意味するものとする．

我々は既に [3] において，全空間 $\mathbb{R}^N$における変数係数付きの放物型方程式の初期値問題の非負値解の一意性，非一意性について考察している．特に，[3] において，我々は方程式の係数，特に拡散係数によって決定される intrinsic metric を導入することによって，非負値解の一意性，非一意性について，ほとんど最良と思われる結果を導き出した．この論文では，[3] の議論を応用，発展させることによって，初期値問題 (P) の非負値解の一意性について考察する．

2. 結果

まず最初に，関数 w の境界での退化の強さを見るために，次を満たす連続関数$\Psi \in C(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$ の存在を仮定する．つまり，Ψは

$$\exists C > 0,\ 0 < \exists \delta_0 < 1 \quad \text{s.t.} \tag{2.1}$$
$$C\Psi(\delta(x)) \le w(x) \le C^{-1}\Psi(\delta(x)), \quad x \in D, \delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial D) < \delta_0.$$

を満たすとする．この関数Ψを用いて，初期値問題 (P) に対する方程式に付随する距離 $d(x,y)$ を

$$d(x,y) = \inf\left\{ \int_0^1 \sqrt{\psi(\gamma(s))}|\gamma'(s)|ds\,;\, \gamma \in C^1([0,1];D),\, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\} \tag{2.2}$$

によって導入する．ここで，$\psi(x) = \Psi(\delta(x))$ とする．以下，この関数 d を初期値問題 (P) における放物型方程式の intrinsic metric と呼ぶことにする．このとき，距離 d について D が complete であるための条件は

$$\int_0^{\delta_0} \sqrt{\Psi(r)}dr = \infty \tag{2.3}$$

である．

ここで，初期値問題 (P) の非負値解の一意性，非一意性に関する我々の主定理を述べることにする．詳しくは，[4] を参照．

定理 1 .

$$\int_0^{\delta_0} r\Psi(r)dr = \infty \tag{2.4}$$

とする．このとき，幾つかの付加条件のもとで，初期値問題 (P) に対して UP (非負値解の一意性) が成り立つ．つまり，$u \equiv 0$ 以外に (P) の非負値解は存在しない．

定理 2.

$$\int_0^{\delta_0} r\Psi(r)dr < \infty \tag{2.5}$$

とする．このとき，NUP (非負値解の非一意性) が成り立つ．つまり，(P) の正値解 $u > 0$ が存在する．

3. 証明の方針

(定理 1 の証明)　定理 1 の証明は，非負値解の $x \to \partial D$ に対する増大度の評価と Täcklind タイプの一意性 (解の符号に関係なく解の絶対値の増大度が，ある関数で一様に上から押えられるならば，初期値問題 (P) の解は恒等的に零しかない．) からなる．つまり，次の (1) と (2) の部分から構成される．

(1) Growth estimates of solutions

$\forall\delta \in (0,T), \forall x_0 \in D$ に対して，関数$\rho \in C(\mathbb{R}^+ : \mathbb{R}^+)$ として，単調増加関数で，かつ

$$\sup_{s>0} \frac{s}{\rho(s)} < \infty, \qquad \int_0^\infty \frac{ds}{\rho(s)} = \infty$$

を満たし，さらに次を満たすものが存在する．つまり，$\exists C > 0$ s.t.

$$\sup_{\substack{d(x_0,x)\le R \\ 0<t<T-\delta}} u(x,t) \le \exp(CR\rho(R)), \qquad R > 1. \tag{3.1}$$

$$\int_{x\in D|\{d(x_0,x)\le R\}} w(x)dx \le \exp(CR\rho(R)), \qquad R > 1. \tag{3.2}$$

この評価は parabolic Harnack inequality と scaling argument より得られる．

(2) Täcklind type uniqueness theorem

初期値問題 (P) の解 u が

(3.2)　　$\forall\delta \in (0,T), \exists C > 0, \text{s.t.}$

$$\int_0^{T-\delta}\int_{\{x\in D\,|\,d(x,x_0)\le R\}} u^2(x,t)w(x)dx \le \exp(CR\rho(R)), \quad R > 1$$

ならば $u \equiv 0$ in $D \times (0,T)$ が成り立つ．これは，(P) の方程式に適当な test function をかけて積分することによって得られる．

この (1) と (2) より，初期値問題の非負値解 (P) は恒等的に零しかないことがわかり，一意性が証明される．

(定理 2 の証明)

(1) semi-bounded perturbation

$G(x,y)$ を

$$L = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

の D 上での Dirichlet 境界条件下での Green 関数とする．このとき，[1],[2],[7] の結果より

$$\begin{aligned}
(2.5) \quad &\Rightarrow \quad \exists C > 0, \quad \text{s.t.} \\
&\qquad \int_D G(x_0,y)w(y)G(y,z)dy \le CG(x_0,z), \qquad z \in D \\
&\Rightarrow \quad \int_D G(x_0,y)w(y)dy \le C
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，定数 1 は L の解であることを用いる．

(2) (P) における正値解の構成

$$H(x,y) = G(x,y)w(y)$$

とおくと，H は

$$L' = -\frac{1}{w(x)}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

の Green 関数であり，(1) での考察より

$$\int_D H(x_0,y)dy < \infty$$

となる，このとき，[6] の結果より初期値問題 (P) の正値解 (これを v とする．) で $0 < v(x,t) < 1$, $x \in D$, $t \in (0,T)$ を満たすものを構成できる．よって初期値問題 (P) の正値解が存在し，定理 2 の結果が得られる．

4. リーマン多様体への応用

Section 1 で見たように，初期値問題 (P) は，Poincaré disc 上での熱方程式の初期値問題を含んでおり，定理 1 より，その非負値解は一意的に決定される．これとは別に，Ricci curvature, sectinal curvature の下または上からの評価に関する条件を用いて，リーマン多様体での熱方程式の非負値解の一意性，非一意性については，すでに [5] で扱われている．そこで，[5] の結果との比較しながら，関数 w の退化の強さと曲率との関係を幾つかの例にそって考えてみよう．

簡単のために，M を ball $B = \{x \in \mathbb{B}^2 \,|\, |x| < 1\}$ と同相な完備 2 次元リーマン多様体とし，

$$ds^2 = g^2(r)(dx_1^2 + dx_2^2), \qquad r = |x| < 1$$

なるリーマン計量が入っているとする．このとき，M 上での熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{g^2(|x|)}\Delta u \quad \text{in} \quad M \tag{4.1}$$

の非負値解について考察する．この時，(4.1) に対する intrinsic metric は

$$d(0,x) = \int_0^{|x|} g(s)ds, \qquad |x| < 1$$

と書ける．また，$d(0,x) = R$ を満たす点 $x \in B$ における Gauss curvature を $-k(R)$ と置く．また，$r(R)$ を

$$\int_0^{r(R)} g(s)ds = R \tag{4.2}$$

として定義し，

$$K(r) = \frac{1}{rg^2(r)}\left\{r\left(\frac{g'}{g}\right)\right\}',$$

と置くと

$$k(R) = K(r(R))$$

となる．このとき，[5] より，次のことが知られている．

定理 3．([5] を参照) 適当な条件下で，M 上の熱方程式の非負値解の一意性が成り立つことは

$$\int^\infty \frac{dR}{\sqrt{k(R)}} = \infty$$

と同値である．

ここで，(4.2) より

$$\int^\infty \frac{dR}{\sqrt{k(R)}} = \int^1 \frac{g(s)}{\sqrt{K(s)}}ds$$

が成り立つ，以下，幾つかの例にとって定理１，定理２, 定理３の結果と比較してみよう．

(I)　$g(r) = (1-r^2)^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ の場合

$$K(r) = 4\alpha(1-r^2)^{2(\alpha-1)}, \qquad 0 < r < 1$$

であり，

$$\begin{aligned} \text{complete} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha \geq 1 \\ \text{(2.4) holds. } (\textit{i.e.} \text{ UP holds.}) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha \geq 1 \\ \int^{\infty} \frac{dR}{\sqrt{k(R)}} = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha \geq 1 \end{aligned}$$

(II)　$g(r) = (1-r^2)^{-1}[\log(2/(1-r^2))]^{\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$ の場合

$$\begin{aligned} \text{complete} \quad &\Leftrightarrow \quad \beta \leq 1 \\ \text{(2.4) holds. } (\textit{i.e.} \text{ UP holds.}) \quad &\Leftrightarrow \quad \beta \leq \frac{1}{2} \\ \int^{\infty} \frac{dR}{\sqrt{k(R)}} = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \beta \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(III)　より一般的に，g について次を仮定する．つまり，

(1)　$$\int^1 g(r)dr = \infty$$

(2)　$$\frac{g(r)}{g'(r)} \sim 1-r \quad \text{as} \quad r \to 1$$

(3)　$$\exists R_0 > 0, \exists C > 0 \quad \text{s.t.} \quad k(R) \leq C,\ R > R_0$$

(4)　$$\lim_{R\to\infty} \frac{k'(R)}{k^{3/2}(R)} = 0$$

を仮定する．このとき，次の条件が同値となる．つまり，

$$\int^{\infty} \frac{dR}{\sqrt{k(R)}} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int^1 g^2(r)(1-r)dr = \infty.$$

これらの結果より，定理１, 定理２の結果は，(I),(II) のような場合については，定理３の結果とほぼ同等の強さを持つ条件であることがわかる．

5. 最後に

我々は今まで，低階項のない場合の方程式のみ扱ってきたが，

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{w(x)}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u - V(x)u \qquad \text{in} \quad D$$

という低階項がある場合でも適当な条件下で定理１，定理２と同様の結果が成り立つ．例えば，$x_0 \in D$ としたとき，

$$|b(x)| \leq \frac{Cd(x_0,x)}{\sqrt{w(x)}}, \qquad |V(x)| \leq Cd^2(x_0,x), \qquad x \in D$$

を仮定すれば，定理１が成り立つ．一方，

$$|b(x)| \leq C\delta(x), \qquad |V(x)| \leq C, \qquad x \in D$$

を仮定すれば，定理２が成り立つ．どちらの定理にしても，$x \to \partial D$ のときの b_i, V に関する増大度に関する何からしかの仮定を置く．(実際は，上より一般的な仮定を置くことができる．) また，定理１，定理２では D は有界領域としたが，非有界領域，特に全空間でも良い．詳しくは [4] を参照して欲しい．

References

1. A. Ancona, *First eigenvalues and comparison of Green's functions for elliptic operators on manifolds or domains* (to appear in J. Analyse Math.).
2. H. Aikawa, *Norm estimate of Green operator and perturbation of Green function in a smooth domain*, preprint.
3. K. Ishige and M. Murata, *An intrinsic metric approach to uniqueness of the positive Cauchy problem for parabolic equations* (to appear in Math. Z.).
4. K. Ishige and M. Murata, *Parabolic equations whose nonnegative solutions in a cylinder are determined only by their initial values*, in preparation.
5. M.Murata, *Uniqueness and non-uniqueness of the positive Cauchy problem for the heat equation on Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1923–1932.
6. M. Murata, *Non-uniqueness of the positive Dirichlet problem for parabolic equations in cylinders*, J. Func. Anal. **135** (1996), 456–487.
7. M. Murata, *Semismall perturbations in the Martin thoery for elliptic equations* (to appear in Israel J. Math.).