数理解析研究所講究録
1017 巻 1997 年 24-31

無限次元測度論の創生期の頃を回顧して
-山崎 泰郎氏の業績より-

下村 宏彰 (福井 大学)

山崎 先生はその創生期 (Minlos の定理が誕生した頃といってよいであろうか) の頃から無限次元位相線形空間上の測度論に関わってこられた。この方面での先生の業績は、大別して、測度の構成問題、種々の変換群に対する不変、もしくは準不変測度の研究、測度論の調和解析への応用と凡そ三っの柱に分けられる。このノートではそれらの中からそれぞれ氏の初期の都合三編の論文を選んで当時の状況を振り返ることとしたい。

1. 無限次元位相線形空間上の測度の構成

この節の内容は主に次の論文からの抜粋である。

Y.Umemura, Measures on infinite dimensional vector space, PUBL RIMS Kyoto Univ.**1** (1965).

X を局所凸な線形空間 X^* をその位相的双対空間 、 $< x, x^* >, (x \in X, x^* \in X^*)$ を duality bracket とする。そして X^* 上に cylinder set $\{x^* \in X^* | (< x_1, x^* >, \cdots, < x_n, x^* >) \in E\}$ $(x_1, \cdots, x_n \in X, E \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n))$ から生成した σ-algebra $\mathfrak{B}$ をとり $(X^*, \mathfrak{B})$ 上に確率測度 μ を定義することを考えよう。

F, G 等を X の有限次元線形部分空間として

$$\pi_F : x^* \in X^* \longmapsto x^*|F \in F^*$$

を restriction map とする。さてもしも μ が先験的に与えられているならば、$\mu_F := \pi_F \mu$, つまり $\mu_F(E) := \mu(\pi^{-1}(E))$ とおいて有限次元空間上の測度列 $\{\mu_F\}$ が次の consistent の条件 (C) を満たすように定まる。

(C) $G \subseteq F \Longrightarrow \pi_{G,F} \mu_F = \mu_G$

ただし、 $\pi_{G,F} : \ x^* \in F^* \longmapsto x^*|G \in G^*$ である. さて 問題となるのはこの逆である。すなわち、

(P) (C) を満たす $\{\mu_F\}$ が与えられたとき、それから $\pi_F \mu = \mu_F$ なる μ が $(X^*, \mathfrak{B})$ 上に定義出来るか?

(P) を Bochner 型で言い換えることもできる。今 $\{\mu_F\}$ が与えられたとき、$x \in X$ に対して $x \in F$ なる F を一つとって、

$$\chi(x) := \int_{F^*} \exp(\sqrt{-1} < x, x^* >) \mu_F(dx^*)$$

とおいて χ を X 上で定義すると χ は次の性質をもつ。

(1) χ は X 上の正定値符号関数で $\chi(0) = 1$.

(2) $\chi|F$ は各 F に対して F 上の連続関数である。

容易に分かるようにこのような χ と $\{\mu_F\}$ との間に上の関係を通して 1 対 1 の対応が成り立つ。すると (P) は次の形をとる。

(P') (1) (2) を満たす χ に対して $(X^*, \mathfrak{B})$ 上の確率測度 μ が存在して

$$\chi(x) = \int_{X^*} \exp(\sqrt{-1} < x, x^* >)\mu(dx^*)$$

が成立するだろうか？

(P) と (P') は一般に否定的であることはすぐにわかる。例えば
X を Hilbert 空間 としたときに

$$\chi(x) := \int_{H^*} \exp(\sqrt{-1} < x, x^* >)g(dx^*) := \exp(-\frac{\|x\|_H^2}{2})$$

で定義される g は完全加法的ではない。それを見るには H の c.o.n.s. $e_1, \cdots, e_n, \cdots$ を一つとって 上の定義式において x に e_n を代入し、しかるのち $n \longrightarrow \infty$ とすればよい。一般に測度列 $\{\mu_F\}$ に対応する測度は X^* より数段大きい $(F, \pi_{G,F})$ の射影極限空間 $\varprojlim(F, \pi_{G,F}) = X^a$ 上にしか構成できない。

それではどのような場合に (P) (P') が成立するのであろうか？ これらは X の形状 及び与えられた族 $\{\mu_F\}$ の性質に依存する難しい問題である。そこで 以後、実際に起こりうる状況でのみ考えるために、話を連続な測度列に限定する。すなわち X にあらかじめ与えられていた位相 τ に関して χ が連続のとき $\{\mu_F\}$ を連続な測度列という。このいいかたは以下のように有限加法族 $\mathfrak{A}$ と有限加法的測度 μ の概念を導入しておくともう少しはっきりみることが出来る。

つまり、$\{\pi_F^{-1}(E)\}_{E,F}$ は自然に有限加法族 $\mathfrak{A}$ をなし, $\mu(\pi_F^{-1}(E)) := \mu_F(E)$ とおいて定義した μ は $\mathfrak{A}$ 上の有限加法的測度になる。この形で連続性を言い換えると次のようになる。

(continuity) $\forall \epsilon, \exists U(0)$: neighburhood of $0, s.t., x \in U(0) \Longrightarrow \mu(x^* | < x, x^* > \geq 1) < \epsilon.$

μ は底空間 F を固定して E を動かした時、その E について完全加法的となる有限加法的測度であり、(P) を μ を使って言い換えておくと、
(P") μ は $\mathfrak{B}$ 上に完全加法的測度として拡張できるか？

となる。

<u>山崎 先生の結果</u>

Theorem 1.1. (Minlos – Umemura)
X を *nuclear σ-Hilbert space* とするとき $\{\mu_F\}$ が連続な測度列 とするならば問題 (P) は肯定的となる。

証明の概要を以下順に示す。
1° Hopf の拡張定理、i.e.,

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq \cdots, \pi_{F_1}^{-1}(E_1) \supseteq \pi_{F_2}^{-1}(E_2) \supseteq \cdots \supseteq \pi_{F_n}^{-1}(E_n) \supseteq \cdots$$
$$\lim_n \mu(\pi_{F_n}^{-1}(E_n)) = \alpha > 0 \Longrightarrow \cap_n \pi_{F_n}^{-1}(E_n) \neq \emptyset$$

を示したい。 有限次元の measure の regularity から E_n はすべて閉としておいてよい。それゆえ問題の cylinder sets はすべて弱閉である。

さて上記の示すべき事柄はいうまでもなく有限交叉性から完全交叉性を導く類の問題である。従って 何らかの compact 集合を媒介にした議論に持ち込めば良いだろうと想像される。(この問題に限らず、重要、あるいは基本となる測度の拡張問題には必ず compact の概念がついてまわる。measure と compactness はどこか深い所で結びついているに違いない。) 今の場合は次の条件 (K) を検証すれば十分である。

(K) $^\forall\eta > 0,\ ^\exists K_\eta$: weakly compact set of X^* $s.t., {}^\forall F, \mu_F(\pi_F(K_\eta)) > 1-\eta$.

2° X を定義する norm の列を $\{\|\cdot\|_n\}_n$ とする。$\|\cdot\|_n \le \|\cdot\|_{n+1}$ でありかつ、$\|\cdot\|_n$ は $\|\cdot\|_{n+1}$ に関して Hilbert-Schmidt 的としてよい。X を $\|\cdot\|_n$ で完備化してできる Hilbert 空間を X_n とすると

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq \cdots, \quad \cap_n X_n = X.$$

また X_0 の所で dual と同一視しておくと

$$X^* \supseteq \cdots \supseteq X_n^* \supseteq \cdots \supseteq X_0^* = X_0 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq \cdots \supseteq X.$$

仮定により、

$$^\forall\epsilon > 0, {}^\exists n_0 \ \ s.t.,\ \ x \in X,\ \|x\|_{n_0} \le 1 \Longrightarrow \mu(x^* | < x, x^* > \ge 1) \le \epsilon.$$

ここで $U := \{x \in X \mid \|x\|_{n_0} \le 1\}$ とおく。埋め込み $\iota : X_{n_0+1} \longmapsto X_{n_0}$ は Hilbert-Schmidt 的だから、ある c.o.n.s., $e_1, \cdots e_k, \cdots$ in X_{n_0+1} が存在して、

$$\|x\|_{n_0}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < x, e_k >_{n_0+1}^2$$

for all $x \in X_{n_0+1}$ となる。ただし, α_k は定数で $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 < \infty$ を満たしている。$V := \{x \in X | \ \|x\|_{n_0+1} \le 1\}$ とおく。そして $R > 0$ として $K := (R^{-1}V)^\circ$ とおくと、K は X^* の weakly compact set になる。さて X の任意の有限次元部分空間 F をとり $\pi_F(K)$ を考えよう。Hahn-Banach の拡張定理より $(R^{-1}V \cap F)^\circ = \pi_F(K)$ であることが容易に分かる。また、$\|x\|_{n_0}$ を $x \in F$ に制限したものを考えると F の 基底 $e'_1, \cdots, e'_d$, $(\dim(F) = d)$ が存在して、

$$\|x\|_{n_0}^2 = \sum_{k=1}^{d} \beta_k^2 < x, e'_k >_{n_0+1}^2$$

とかける。ここに、β_k は定数で $\sum_{k=1}^d \beta_k^2 \le \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 =: D$ である。そして

$$R^{-1}V \cap F = \{x = x_1 e'_1 + \cdots x'_d e'_d \mid \sum_{k=1}^{d} {x'_k}^2 \le R^{-2}\}$$

となる。ここで、対応

$$S : x = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_d e'_d \in F \longmapsto (x'_1, \cdots, x'_d) \in \mathbf{R}^d$$

によって
$U \cap F$ を $E_\beta := \{x \in \mathbf{R}^d | \sum_{k=1}^d \beta_k^2 x_k^2 \le 1\}$, $R^{-1}V \cap F$ を $D_R := \{x \in \mathbf{R}^d \mid \sum_{k=1}^d x_k^2 \le R^{-2}\}$
に移し、さらに $(\mathbf{R}^d)^*$ と $\mathbf{R}^d$ とを同一視して ${}^tS^{-1}(\pi_F\mu) = \nu$ とおくと $\mu_F(\pi_F(K)) = \nu(D_R^\circ)$ であり $\xi, x \in \mathbf{R}^d$ のとき、

$$\nu(\xi \in \mathbf{R}^d \mid < x, \xi > \ge 1) = \pi_F\mu(x^* \in F^* \mid < x, {}^tS^{-1}x^* > \ge 1) = \pi_F\mu(x^* \in F^* \mid < S^{-1}x, x^* > \ge 1)$$

より
$x \in E_\beta$ のとき $\nu(\xi \in \mathbf{R}^d \mid < x, \xi > \ge 1) < \epsilon$ となる。

3°

Lemma 1.1. (Umemura)
d 次元 *Euclid* 空間上に確率測度 ν が与えられていて、楕円体 $E : \sum_{k=1}^{d} \frac{\xi_k^2}{\beta_k^2} = 1$ の接平面の非原点側の *measure* がすべて ϵ 以下となっていれば、半径 R の球の外側の *measure* は

$$\nu(\xi \in \mathbf{R}^d \mid \sum_{k=1}^{d} \xi_k^2 \geq R^2) \leq \gamma_0^{-1}(\epsilon + R^{-2} \sum_{k=1}^{d} \beta_k^2)$$

と評価される。ここに γ_0 は次元 d によらない *universal constant* である。

Proof.

$$I := \int_{<x,\xi> \geq R} g(dx)\nu(d\xi)$$

を Fubini の定理を用いて二通りの方法で評価する。ここに g は $\mathbf{R}^d$ 上の標準 Gauss 測度である。

(1)

$$I = \int_{\mathbf{R}^d} \nu(\xi \in \mathbf{R}^d \mid <x,\xi> \geq R) g(dx)$$

と変形する。ここで、

$$<x,\xi>= 1 \quad \text{が楕円体} \quad E \quad \text{に接する} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{d} \beta_k^2 x_k^2 = 1$$

に注意する。従って $\sum_{k=1} \beta_k^2 x_k^2 \leq R^2$ であれば領域 $\{\xi \in \mathbf{R}^d \mid <x,\xi> \geq R\}$ は E の接平面の非原点側にある。これより

$$I \leq \epsilon + R^{-2} \sum_{k=1}^{d} \beta_k^2.$$

(2) 他方

$$\begin{aligned} I = \int_{\mathbf{R}^d} g(x \in \mathbf{R}^d \mid <x,\xi> \geq R)\nu(d\xi) &= \int_{\mathbf{R}^d} g(\xi \in \mathbf{R}^d \mid \|\xi\| x_1 \geq R)\nu(d\xi) \\ &\geq g(x \in \mathbf{R}^d \mid x_1 \geq 1)\nu(\xi \in \mathbf{R}^d \mid \|\xi\| \geq R). \end{aligned}$$

従って、

$$\gamma_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$$

とおくと証明が完了する。

4° この補題を用いて定理の証明を完成させよう。

$$x \in E_\beta \Longrightarrow \quad \nu(\xi \in \mathbf{R}^d \mid <x,\xi> \geq 1) < \epsilon$$

であったから 特に楕円体 $\sum_{k=1}^{d} \frac{\xi_k^2}{\beta_k^2} = 1$ の非原点側の measure は ϵ 以下である。よって

$$\nu(D_R^\circ) = \nu(\xi \in \mathbf{R}^d \mid \sum_{k=1}^{d} \xi_k^2 \geq R) \leq \gamma_0^{-1}(\epsilon + R^{-2} \sum_{k=1}^{d} \beta_k^2) \leq \gamma_0^{-1}(\epsilon + R^{-2} D).$$

従って ϵ を十分小さく R を十分大きくとって全体を η 以下にすればよい。 □

Minlos の原証明はさておき、山崎先生は Theorem 1.1 の事実を間接的に知って御自身で上記の証明を考えられたとのことである。当時の研究状況はこの結果はもとより他の諸結果も月単位で生み出されていったとの逸話が残っている。

N.B. 以上は nuclear space の場合であったが Hilbert space ではどうなるだろうか？それは次の Sazonov の定理として知られている。

Theorem 1.2. $\{\mu_F\}_F$ を *Hilbert* 空間 H 上の測度列とする。このとき
$\{\mu_F\}_F$ に対応する有限加法的測度 μ が完全加法的 $\iff$ 対応する χ が次の意味で連続なこと。
" $^\forall\epsilon > 0,\ ^\exists A_\epsilon$: *trace class positive definite operator on* H *s.t.*, $< A_\epsilon x, x > \geq 1$ $\Longrightarrow$ $|1-\chi(x)| \leq \epsilon$."

空間の形状に応じてであるが、μ の完全加法性は特性関数のある位相に関する連続性として記述されることがある。このような位相を Sazonov 位相という。Sazonov 位相がいつでもあるとは限らない。

2. 回転不変測度について

この節の内容は第１節にあげた文献、及び次のものによる。

Y.Umemura, Rotationally invariant measures in the dual space of a nuclear space, Proc. Japan Acad. **38** (1962).

X: nuclear σ-Hilbert space として X 上に連続な Hilbertian norm $\|\cdot\|_H$ が一つ与えられたとして、この norm で X を拡大したものを H とおく。また
$O(H) := \{L|\ L$ is a unitary operator on H such that $L|X$ is a homeomorphic operator on $X\}$ とおく。$L \in O(H)$ は X 上の operator と考えたとき X^* 上に ${}^tL$ を導き 従って測度 μ は ${}^tL\mu$ なる変換をうける。

$$^\forall L \in O(H), \quad {}^tL\mu = \mu$$

のとき μ を $O(H)$-invariant とよぶ。このような μ の代表的な例は特性関数 $\chi_c(c \geq 0)$ が $\chi_c(x) = \exp(-\frac{c^2}{2}\|x\|_H^2)$ で与えられる Gauss 測度 g_c である。($c = 0$ のときは原点に mass のある Dirac measure とする)

Theorem 2.1. (回転不変測度の特徴づけ)
$^\forall\mu$: *$O(H)$-invariant measure*, $^\exists m : [0,\infty)$ *Borel probability measure s.t.*, $\mu = \int_{[0,\infty)} g_c m(dc)$.
また、*$O(H)$-ergodic* であるものは g_c に限る。

証明は μ に対応する χ が $\chi(x) = \varphi(\|x\|_H^2)$ の形にかけ φ は原点で連続な completely monotonic function on $[0,\infty)$ になることと Bernstein の定理から導く。現在は他の証明法、例えば測度のエルゴード分解から Bernstein の定理を経由することなく直接に導く方法等が知られている。しかしとにかくこの定理は無限次元空間においてはあたかも Gauss 測度 g は $\mathbf{R}^n$ における球面上の一様測度 ν_n にとって代わるといった印象を与えるし、また他の諸結果、例えば確率論における大数の法則、あるいは g は ν_n の $n \longrightarrow \infty$ としたときのある種の極限であると言う事実にも符合する。

3. 無限次元空間上の LAPLACIAN OPERATOR

調和解析を試みるための出発点である Laplacian の定義とその特徴づけをテーマとしたものであり、今日の Malliavin calculus で基本的な役割をはたす Orstein-Uhrenbeck operator に相当する標題の作用素を関数解析的立場から扱った、いわば先駆的な研究である。この節の内容は次の文献による。

Y.Umemura, On the infinite dimensional Laplacian operator, Publ RIMS Kyoto Univ. . **4** (1965).

まず motivation から入ろう。

$L^2_{dx}(\mathbf{R}^n)$ 上の Δ を map Φ,

$$\Phi : f(x) \in L^2_{dx}(\mathbf{R}^n) \longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}c}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{1}{4c^2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) f(x) \in L^2_{g_{c,n}}(\mathbf{R}^n),$$

ここに、

$$g_{c,n}(dx) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}c}\right)^{n} \exp\left(-\frac{1}{2c^2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) dx$$

で写すと $L^2_{g_{c,n}}(\mathbf{R}^n)$ 上の $\Delta_{c,n}$ が

$$\Delta_{c,n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \frac{x_k}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{2c^2} + \frac{1}{4c^4}x_k^2\right)$$

として定まる。このうち $\sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2c^2} + \frac{1}{4c^4}x_k^2)$ は $n \longrightarrow \infty$ のとき $O(n)$ となり発散する。この項を捨てさると、意味のある項は

$$\Delta_c = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \frac{x_k}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$$

となる。Δ_c を infinite dimensional Laplacian とよぶ。より正確には

Definition 3.1. X を *nuclear space*, $\|\cdot\|_H$ を X 上の連続な *Hilbertian norm* として X を $\|\cdot\|_H$ で拡大して H を作る。

$$X \subseteq H = H^* \subseteq X^*.$$

$x_1, \cdots, x_n$ を X からとった H の *o.n.s.*, f は $\mathbf{R}^n$ 上の 滑らかな関数で $\sqrt{\frac{dg_{c,n}}{dx}}(x) f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{S}$ とするとき $F(x^*) = f(<x_1, x^*>, \cdots <x_n, x^*>)$ に対して、

$$\Delta_c F(x^*) := \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_k^2} - \frac{t_k}{c^2}\frac{\partial}{\partial t_k}\right) f(t_1, \cdots, t_n)\,|_{t_i = <x_i, x^*>}$$

とおく。

Theorem 3.1. (1) Δ_c は $L^2_{g_c}(X^*)$ 上の *symmetric* かつ *rotationally invariant* な *operator* になる。

(2) $L^2_{g_c}(X^*)$ 上の *symmetric rotationally invariant operator* A は実は Δ_c で生成されている。

(3) $L^2_{g_c}(X^*)$ を *multiple Wiener integral* を用いて

$$L^2_{g_c} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n$$

と分解しておくと A は各 $\mathcal{H}_n$ 上で *constant map* になる。

また、$O(H)$ の 表現 $(R, \mathrm{L}^2_{g_c}(X^*))$

$$R(L): \quad f(x^*) \longmapsto f({}^tLx^*)$$

の既約分解が $\mathrm{L}^2_{g_c}(X^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n$ で与えられることの別証も記されている。

以上の他、山崎先生の業績は measure の construction, support に関わるものとして、Sazonov 位相の問題、特性位相と Dao の不等式の周辺、射影極限測度列の研究、regurality に関したものとしては、回転不変測度の他、平行移動に関する準不変測度の研究、特に、不存在の証明。また、調和解析的な試みとしては、Laplacian と spherical harmonics, 回転群上の測度の構成と関連した表現等が挙げられよう。それらの成果はおおよそ紀伊国屋書店の数学叢書シリーズの中での「無限次元空間の測度 上下」としてまとめられその英訳版も World Scientific 社から出版されている。叙述は self contained で、そしてなによりも明快である。以下に山崎 泰郎 (Yasuo Yamasaki) 氏の主な業績リストを掲げておく。このうち [1][2] は著書であり、[3] 以下は論文であるが [3]-[8] では著者名が Yasuo Umemura となっている。

References

[1] 無限次元空間の測度 上下、紀伊国屋書店、1978.

[2] Measures on infinite dimensional spaces, World Scientific, 1985.

[3] Rotationally invariant measures in the dual space of a nuclear space, Proc.Japan Acad., **38** (1962) 15-17.

[4] On the infinite dimensional Laplacian operator, J.Math.,Kyoto Univ.,4 (1965)

[5] Measures on infinite dimensional vector spaces, PUBL.RIMS. 1 (1965) 1-47 (博士論文) .

[6] Carriers of continuous measures in a Hilbertian norm, ibid., **1** (1965) 49-54.

[7] Infinite dimensional Laplacian and spherical harmonics, ibid., **1** (1966) 162-186 (with N.kono).

[8] Invariant measure of infinite dimensional rotation group, ibid., **8** (1972) 131-140.

[9] Projective limit of Haar measures on $O(n)$, ibid., **8** (1972) 141-149.

[10] Kolmogorov's extension theorem for infinite measures, ibid., **10** (1975) 381-411.

[11] Quasi-invariance of measures on an infinite dimensional vector space and continuity of chracteristic functions, ibid., **16** (1980) 767-783.

[12] Translationally invariant measure on the infinite dimensional vector space, ibid., **16** (1980) 693-720.

[13] A simple proof of Kwapien's theorem, ibid., **20** (1984) 1247-1251.

[14] Differentiable shifts for measures on infinite dimensional space, ibid., **23** (1987) 275-296 (with A.Hora).

[15] On norm-dependent positive functions, ibid., **26** (1990) 649-654.

[16] On the gap distribution of prime numbers, 数理解析研究所講究録 **887** (1994) 151-168 (with A.Yamasaki).