

不変式論の歴史のひとこま

— ALFREDO CAPELLI について —

梅田 亨 TÔRU UMEDA (京大・理)

はじめに: この研究会では主宰者の方から数学史に関する一般的な考えについても述べるよう求められた。そこでまず“普通の”数学者から見て「数学史」がどのように関わってくるかについて個人的な経験を基にして述べる。数学の歴史一般に関する考え方は別にあるが、それは今回述べることはしない。ついで、より具体的に、タイトルにある不変式論の歴史で私自身が特に関心をもっている A. Capelli のことを例として、前半の補いとして、不変式論自体の話というよりは、その前段階である A. Capelli という一人の数学者についての基礎資料蒐集の過程の話である。

数学史と数学者

普通の数学者(学生も含む)にとって「数学史」は必須の知識でもなく、共通の話題としてはコンピュータに比べても遥かに低い頻度で現われるに過ぎない。勿論、数学の歴史もお話(エピソード)としてはそれなりに興味を持つ人もかなりいるし、ゴシップめいたことを講義で取り入れるのは学生の眠気ざましに役に立つ(だろう)。しかしそれらを「数学史」と呼ぶのは、歴史小説を読んで「歴史」を研究したと称するに似た行為である。

ここで二つのことが問題になる。一つは本格的な「数学史」とは何か。もう一つはそれが「数学」または「数学者」とどう関係するのか、である。まず「本格的な数学史」が、それこそ数学史の専門雑誌に発表できるような新知見の研究であると(多分正しく)限定的に捉えると、それは数学者が片手間にできるような仕事ではないし、そのような仕事は多くの数学者にとって興味の対象外となるだろう。実際、数学の歴史について興味のないわけではない数学者であっても(興味のない人も相当数いるのも確かだが)、細かい事実について自分の研究分野以外のことにそうそう関心のもてるものではない。実際、数学の分野にしても他の分野のことを知ろうとするのは、多くの場合困難で、かなりの努力を強いられる。それを乗り越えて皮相的以上の理解を得るのはなかなか稀であろう。

このように言うと「数学者」には「数学史」は無縁であるようにも見えるが、実際はそうでない筈だ。数学者の日常の仕事には「数学史的」な部分が不可欠である。数学の論文を書くときには、(1) 自分の扱った問題がどのような背景を持ち他の仕事とのどのような関係に於いて重要性があるのか、或いは(2) 先行する仕事との関係でどのような点が新しいのか、などについてはっきりした認識が必要であろう。これは勿論一つの論文だけのことではなく自分の研究というものの位置づけに関わる重要な点である。これはこれで充分数学史的な研究の実践を含む。通常は論文のテーマは最近のものであるから、これを敢えて「数学史的」というのは違和感をもたらすかもしれないが、関連した結果を文献等で探し、或いは先行する論文をもとにテーマの位置づけを見直すことなどは「数学史的」な視点と共通点をもつのではないだろうか。これは数学の問題自体を考え解決する思考とは別のものであると思う。

上記のような「数学史的」思考はたとえば学位論文を書くような場合には大いに意識にのぼるだろうし、或いはその際学識確認として要求されることがあって不思議はない。数学の研究にとってそれくらい基本的なものである。しかしながら、上のような「数学史的」探求の意識が希薄な場合もある。それは既に一定方向に研究が進み、背景と目的がはっきり意識されている場合であるし、他の研究者の動向を気にする場合でも、その研究に関わる人間に限られているため殆どそれ以外を気にする必要がない場合である。先端の研究に従事している研究者の下で学ぶ学生などもこの点有利である。自分で調べる代わりに先生に尋ねればよいのであるから。「数学史的」探求はこの場合無駄であるか、或いはむしろ有害ですらあり得る。

そういう所為もあってか、論理的正確さに気を使う数学者が、存外に数学史的事実については無頓着であり、数学の歴史に対しても通俗的な理解や解釈で済ましていることも枚挙にいとまがない。人名を冠する定理や公式の命名についても出典や根拠がない場合は多いし、有名で古典的な場合なら仕方がないとしても、ごく近くのものですら孫引きの繰り返しに出会うことは多い。これらは狭い社会での謂わば符牒としての役割が重んじられている結果であろう。史実よりは数学的事実の改良が常に優先するのであろうし、更にナショナリズムや「先発権」がからむと話はややこしくなる。

さて数学者が「数学史的」興味を持つ理由としては、上に述べたものがあるのだが、それは過去の優れた数学者(特に理論の創始者や定理の発見者)の発想を直接知ることによって自分の研究の糧にしたいという‘実用上’の動機が第一にくるのではないか。その為にはやはり俗説の孫引きではなく直接に原典に触れるべきであろう。勿論そうしたからと

いってもなお俗説・通説の確認で終わる場合もあるだろうが、やはり自分の目で見てこそ本当のことが知りたいという知的欲求が満たされるものだし、一層の興味も増すものではないだろうか。或いは、卑近な例で言えば、何かの機会にそこそこ知られた定理だとか知られているかどうか判らない定理の証明を思いついたとする。論文として書くほどのものでなかったとしても、当然、先行する結果を調べてみたくなることはあるだろう。ところが大抵の場合は博学な知人や資料にも限りがあり、探求はそううまくいかない。再発見の繰り返しもそのようにして起こるのだろうが、こんな時、もう少し数学史的研究が進み資料の整備がなされていればと思うのである。——今回のような研究会でも、そういう基礎的資料への情報交換の役割は決して少なくない価値をもつものと思う。

どのような動機にせよ、思い立って少し「数学史的」文献探索をしてみると、先程述べた数学者の性癖がわざわざいしてか、時として教科書などにも平然と「嘘」が出てくるのには驚かされる。従って、やはり一旦気になると‘自分で’調べてみないと仕方がないのである。これは本格的「数学史」から見ると逆に大いなる時間と労力を使ってまで調べることでないかもしれない。例えば、プロの数学史家として論文を書けるかという点から言えば、日本に居ながら、古い論文や文献が手に入りにくい国のことを、言語のハンデを負いつつ研究しよう、というのはよっぽど採算の目処か覚悟がなければできないことではないか。しかし、一方そうだからこそ尚更‘他人’をあてにできないのであって、動機と手段のバランスをとりながら自分で何とかせざるを得ないのだ。これが「数学史」かどうかは問題だし、このような「数学史」素人・数学者の探求が増えることが望ましいかどうかとも疑問だが、一種の必然として(少なくとも私には)生じる過程であると思う。一見無駄に見えることである。「数学」としても「数学史」としても大した価値のあることでないかもしれない訳だから。それでも、この見返りの保証のないところを、敢えてやっていると、意外な収穫が得られ病みつきになってしまうのが不思議なところである。

Alfredo Capelli のこと

ひと昔前の通俗数学史によれば、不変式論は前世紀のおわり頃に D. Hilbert によって殺されたことになっている為、或いは現在でもそのような状態だと思いこんでいる人も——数学者には稀だと信じるが——あるかもしれない。勿論それは誤りである。とは言うものの、確かに現代の不変式論が前世紀のものを直接引き継いでいるとも言い難い。実際、大学の正規の課程で不変式論を教わることはまずない。私自身はむしろそ

のようなところから不変式論に興味を抱いた面もあるのだが、個人的な事を詳しく述べる場所でもないだろうから、そのことは措く。自分の数学上の仕事との関係で必然その歴史に関心をもってきた部分も大いにある訳で、数学の中味については「数学」の論説 [U4] とその中の文献を見ていただきたい。

不変式論 (より正確には代数的不変式論) の誕生は 1841 年の George Boole の論文 [B] とされる。これについては「不変式と Boole」という題で大阪府立大に於ける学会の折の“現代数学史研究会”で話したことがある (1993.9.29) が、詳しい報告は書くことを果たせないでいる。Boole の前史には Lagrange と Gauss がいる。そのようなことは色々な教科書や通俗解説書を読むと書いてあるのだが、この Boole の論文についてのどうにも奇妙な記述が目立つのである。Felix Klein の“19 世紀数学史講義”や Hermann Weyl の“The Classical Groups”に Boole への言及がないのはまだしも、不変式論に関する教科書その他に「Boole が 2 元 2 次形式の判別式の不変性を示したのが不変式論のはじまりである」という主旨の極端に矮小化した記述が見受けられる。これ程とんでもないものでなくとも Boole の論文に対する内容の紹介は多くの場合歪められている感が否めない。年についても 1841 でなく 1843 であったり 1845 であったりするが、この方にはまだ同情の余地がある。(誤りの例をここで具体的にあげつらうのは慎むことにしたい。) このようなことは、先程述べた教科書の「嘘」として典型的である一方、私にはどうしてそういう記述になるのか不思議でならない。常識的に見ても、‘2 元 2 次形式の判別式の不変性’が Gauss (1801) にあるのは有名であるし (D.A. art.157; それどころか art. 268 には 3 元 2 次形式の判別式の不変性まで述べられている)、それをようやく 40 年経って再発見した、或いは不連続変数から連続変数に移行できた、とはどう考えても奇妙である。従ってそのような記述があれば、原論文に当たるまでもなく疑問に思うべきだろうし、それ故に原論文を当然見るところである。因みに Boole の論文では一般の n 元 m 次式の判別式を定義し、その不変性を示している (藤原松三郎の「代数学」ではきちんとそのように書いてあるが年号が 1845 となっている) ほか興味深い考察に満ちている。

私としては不変式論の歴史を幾分でも知りたいという気はあるが、その膨大な文献を本当に読みこなす時間も気力も動機も今の所ない。Boole に当たってみたのは、その源流の一番はじめのところを見てみたかったからである。その後 Boole という人自身にも興味をもちはじめたが、全集も編まれていないようで残念である。私の持っている伝記 [D] には論文リストがあるので、数学的なことについて或る程度は調べがつかだ

ろうと思うが実際に調べるところまでは至っていない。さて、不変式論の本格的な幕開けは上記の Boole の仕事に触発された A. Cayley による。その後の発展について通俗書以上のことはいえない。理論の初期から発展に貢献した Cayley, Sylvester, Hermite などの有名数学者には全集がある一方その量も膨大である。Cayley 全集は 13 巻あるが、京大にあるのは古いもので普通にコピーをとると本が壊れてしまう。(それと困ったことに一部落丁があるのを見つけてしまった。古いものなので簡単には補充できない。) Cayley については所謂 Cayley の公式というものの出典が知りたくて、全集をかなり探したことがあるがよく判らなかった (cf. [U2]).

このように不変式論の歴史については原典に当たるということだけでも実に大変なことになる。その後の歴史を一挙に 50 年端折って D. Hilbert の神学によって現代数学が誕生した時点に立とう (その間の歴史については [My] という文献がある)。1888 年には有名な基底定理で P. Gordan の有限性定理をはるかに一般化してしまったし、その後 1893 年には 88 年当時には神学と批判された抽象的存在定理も零点定理によってより具体的な手続きという手段を得、Syzygy の有限性までも示されて、めぼしい問題は根こそぎ解決してしまったかの観がある。この時点で前世紀の不変式論の論文の数々が現在の我々と余り縁のない世界に行ってしまったのかもしれない。(Hilbert の不変式論の論文は原論文(全集)以外に英訳 [H1] もあって便利である。また Hilbert の 1897 年の講義録も最近出版された [H2]。これらは当時の状況を垣間みる上で貴重なものだ。)

とは言うものの、論説「100 年目の Capelli identity」でいうように、恰度そのころ不変式論の精密な道具である Capelli identities が時期を同じくして発見されていたのである (1887-1890)。これは H. Weyl の “The Classical Groups” (1939) [Wy] で多用されているので表現論を学んだ人々には馴染みがある。現在はその意味・内容の理解も進み、特にここ 10 年くらい活発な研究対象になってきた。私自身の仕事の重点もここにあるし、上記の論説からも更に研究は進展しつつある。このように私にはこの上もなく恩もあり親しみもある Alfredo Capelli という名前なのだが、その人自身に迫ろうとすると手がかりがないのであった。実際、論説を書いたとき (1993 年頃) にも、幾分気になって調べてみたが、その (注 9) に書いた通り、ただ一つのイタリア語の記事 [N1] を除いて役に立ちそうなものはなかった。数学的なものでは彼の 2 冊の著書が京大の図書室にあり、これも確かに大きい情報ではあるが、彼の全体像にまでは至れない。その後も機会ある毎に Capelli に関することは調べてみた。或る論文では Chicago Congress 1893 での講演が引用されていた。調べかけて、ふと ICM は第一回が 1896 年の

筈だから変だと思う一方、それをヒントに彼の ICM での講演記録を見つかりました。そのひとつは数学教育に関するものようだったので、少しは違った面が見えた気がしましたが、その分何となくがっかりした覚えもある。ともかく全ては断片的でしかなかった。それがこの研究会前の状況だったのである。

そのような材料不足の状態ではあったが、研究会の為に Capelli のことをもう一度調べ、少なくとも例のイタリア語の記事などを何とか読んでおこうと試みた。一方で、現在インターネットを通じて AMS の MathSciNet Search での論文検索が、以前に比べ遥かに容易になっているので、Capelli に関係あるものを探してみた。結果 99 もの論文が出てきた(5月2日の時点)。その中には自分たちの書いたものや既に知っているもの以外に、勿論関係のないものも含まれているのだが、比較的古いところ(といっても1940年より前には溯れない)で思わぬ拾いものを見つかりました。

———そのように以前よりは徐々に近づける気がしたのであったが、研究会の一週間前になって私にとって劇的なことが起こったのである———。

アメリカ数学会(AMS)の Mathematical Review では、文献 [N1] [N2] については単にその所在しか記していません、内容に関することは全く出ていない。この二つの文献は著者とタイトル “In Memoria di Alfredo Capelli [1855–1910]” が同じでありその一方ページ数がかなり違うので、多分 [N1] は [N2] の要約のようなものかと思われるが、残念なことに [N2] を日本で利用できる場所はないようである(「学術雑誌総合目録」学術情報センター編による)。幸いなことに [N1] の方は掲載雑誌 Giornale di Battaglini が京大に揃っている。さて、[N1] によると著者 Alpinolo Natucci はイタリア数学会 (V° Congresso dell’Unione Matematica Italiana; Pavia, 1955年10月) に於いてこのタイトルで話をしたとある。Alfredo Capelli 生誕 100 年を記念してのことである。因みに、私はこの 1955 年に生まれた。Roger Howe 氏との共著の仕事が Capelli Identity から 100 年に当たる頃であったことは当時も意識していて、それ故に [HU] も Capelli の論文の出た Mathematische Annalen に投稿することにしたのであったし、論説の元になった学会特別講演 (1991.10.11) のタイトルも「100 年目の Capelli Identity」などとしたのであるが、この文献 [N1] [N2] の存在を知った時から、以前にも増して Capelli 先生には特別の親しみを覚えるようになっていたのである。

今回 [N1] を落ちついて詳しく見てみると、少なくとも二つの重要な手がかりが見える。一つは Capelli 自身が [N1] の出ている Giornale di Battaglini という雑誌に論文を幾つも書いているらしいことであり、もう一つは Capelli の亡くなった 1910 年に

Gabrielle Torelli という人による追悼文と論文のリストが *Bollettino di Matematica* という雑誌にあるらしいということである。残念なことに後者の雑誌は京都では見られない。後の方については以前に調査済みではあったが、よく考えてみると、それほどの人であれば他の雑誌でも 1910 年あたりに追悼文が出ていておかしくはない。ということで手始めに *Giornale di Battaglini* の 1910 年を調べて驚いた。何と Gabrielle Torelli による追悼文と論文のリストに加えて巻頭には Capelli 先生の写真まであるではないか。Bollettino ではなかったのか？信じられないような話だが、ともかくこのようにして 1997 年 5 月 6 日に貴重な資料がすぐそばに潜んでいたことを発見したのである。

何故 Battaglini 誌で Capelli 先生の写真まで出る扱いにはなったのかの謎解きはもう少し後にして、1910 年の追悼文について一言先に補足しておきたい。前に見たときには気づかなかったのだが、A. Natucci は [N1] の付録として Capelli の算術の基礎に関する論文の解説を、その Battaglini 誌ですぐ引き続く記事として書いている。その最後のところで G. Torelli とは別の追悼文が引用されている。それは Gregorio Ricci が *Bollettino della Matesis (Soc. it. di matematica)* に書いているものであるが、この雑誌もやはり見当たらない。Ricci ならば全集があるだろうと思って調べたところ、全集はあったがこの記事は割愛されていた。また他のイタリアの雑誌などで 1910 年頃追悼文を探してみたが Battaglini 誌以外にそのようなものを見出すことはできなかった。こうしてみると、なかなかの僥倖に巡り会ったという気がする。

A. Natucci [N1] によれば、Capelli は 1855 年 8 月 5 日 Milano に生まれ、Roma 大学で Cremona, Beltrami, そして Battaglini のもとで学び 1877 年に卒業(学位), とある。その後 Pavia 大学でのポスト・ドクトリアルとして Felice Casorati の講義に出席、次いで外国でのポスト・ドクトリアルとして Berlin で Weierstrass と Kronecker の講義を聴いた。帰国後、Pavia での助手の職を経、Palermo では代数の(はじめは特別の、次いで常勤の)職に就いたが、1885 年には多くが競合するの中の一位として Napoli 大学の代数の教授となった。以後 25 年に亘って(亡くなるまで)その職にあった。また 1894 年からは高等解析 (*Analisi superiore*), 最後の三年 (1907-1910) には高等数学 (*Matematiche superiori*) も講じた。

これが略歴の簡単な紹介であるが、イタリア語とその当時の制度などについての知識が充分でない為、正確な日本語訳かどうか自信がない点をお断わりしておく。さて、以上の記述に於いて何人かの数学者の名前が出てくる中で、我々にとって一人だけ殆ど馴染みのないのが Battaglini である。確かにこの名前は Natucci [N1] の記事が出ている

雑誌に冠されている訳だから、それなりの人なのだろうという程度の見当はつくが、更に [N1] を読み進むと Capelli との深いつながりが見えてくる。

略歴に続いて業績の部分、人物などのちょっとしたスケッチなど、そしてもう少し詳しく数学的な仕事の解説が簡単になされるのだが、最後の部分には Capelli の書いた追悼文への言及がある。その名前の筆頭は Guiseppe Battaglini (1894) であり、つづいて J.J. Sylvester (1898), F. Brioschi (1898), C. Hermite (1901) という具合である。またしても Battaglini は特別であるようだ。どこに出たものかは記していないが、少なくとも Battaglini の追悼文は当然 Battaglini 誌であろう。既に見つけた論文リストで確かめてみると間違いない。ということで、その号を見ると、疑問の数々が氷解するのである。勿論、Gabrielle Torelli の追悼文ほかを注意深く見ても最終的にはそこに到達する訳だが、慣れないイタリア語ではそう簡単なことではなかったのである。

その 1894 年の Battaglini 誌は前年の 1893 年のものと一緒に二年分製本されているが、この二年で表紙が変わっている。実際、正確には雑誌の名前も変わっている。

1893 年では

“**Giornale di Matematiche** ad uso degli studenti delle università italiane” というタイトルで pubblicato per cura del professore G. Battaglini

であるのに対し、1894 年では

“**Giornale di Matematiche di Battaglini** per il progresso degli studi nelle università italiane” というタイトルになり fondato nel 1863 につづいて proseguito dal professore **Alfredo Capelli**

となっている。そして 1894 年の方は volume 番号の後に 1° della 2ª Serie というのが付け加わっている。これで判るように、この雑誌は G. Battaglini によって創刊発行されきたが、彼の死去に伴って編集主幹 (direzioni) を A. Capelli として、この年から新しいシリーズになったのである。同時に創刊者の Battaglini の名前を雑誌名に冠することにしてのである。この体制は A. Capelli の死去する 1910 年まで続き、今度はその年新たな編集責任 Ernest Pascal の下で Capelli の追悼文と業績紹介が写真付きで出たという訳である。長年の活躍に対して当然の扱いであろう。(その年までの雑誌の歴史は第三シリーズ開始に際して E. Pascal が巻頭に書いている。)

このような事情は、この雑誌に少しでも関心があれば或いはもっと早くに判ったのかもしれないという気もするが、仕方がない。数学辞典の引用雑誌のリストにも入ってい

ないのである。

背景となる事情が少し判ったところで、A. Natucci [N1]に加えて G. Torelli [T] も交え、更に Capelli の業績などについて紹介したい。数学的な内容については [T] の方が詳しいし何より論文リストがある。このリストについては、それに基づき若干の補足などを加えたものを作成し最後に収録するので参照していただきたい。リストを調査した結果、そのリストにある 83 の出版物のうち、少なくとも 45 程度のものが京大の数学図書室に所蔵されていると判ったのである。全部でないのは残念であるが、今までの状態と比べて格段の差である。さて、まず [N1] で判らなかつた一つの日付は Capelli の没した時であるが、[T] に拠ると 1910 年 1 月 28 日の明け方に心臓発作に襲われて死去した、とある。人物像については [N1] の方にむしろ詳しい記述が見られる。例えば Capelli は比較的晩婚で、子供については娘が一人だったらしい。博識で、数学のみならず多くの分野に関心を持ち、また死の直前まで講義の準備に余念がなかつた姿も描かれている。(このあたりについてはイタリア語をもう少しちゃんと勉強してからきっちり訳してみたいと思う。)

数学上の業績 (publications) は [T] によると次のように分類される：解析 (l'Analisi 70)、幾何 (Geometria 2)、その他 (11)。このうち主要な解析の 70 の仕事は分けられて無限小解析 (Analisi infinitesimale 13) と代数解析 (Analisi algebrica 57) となり、更に代数解析の細分として代数的形式の理論 (Teoria delle Forme algebriche 27)、置換論 (Sostituzioni 5)、代数方程式論 (Equazioni algebriche 11)、その他の代数・算術関係 (14) という内訳になっている。以下、彼の論文の引用は最後のリストの番号で行なうこととし、(30) のように太文字で表わす。

その数からいっても主要な仕事は代数的形式の理論であるが、これは不変式論の仕事である。現在 Gordan-Capelli series という名が残ったり、また言うまでもなく有名な Capelli Identity はここに分類される ((11), (18) など)。とは言っても [N1] も [T] も Capelli identity を特に取り出して触れていないのである。この時期ではまだその重要性の評価が充分認識されていなかったということであろうか。その意味で、このような [N1] や [T] があつたとしても、更に現在から彼の業績について見直すことは数学史上の仕事としても意味のないものではないと思う。この分野の著書の ((27)=手書きリトグラフ版講義録) や 70 ページにも亘る 1882 年の論文 ((7) を含め、今後じっくり研究してみたい。

置換論は彼の一番はじめの研究分野で、学位論文 (30) もこの中に含まれるが、それ

は Sylow の定理を扱ったものである (彼は 6 年先んずる Sylow の仕事を知らなかったらしい). Sylow の定理の歴史については [Wt] という, まさしく「数学史」の文献があってそれ自体興味深いテーマである. (他に [CZ1], [CZ2], [S] もあるが, これらには直接当たれなかった. 概要は Math. Review で判る. [Wt], [CZ1], [CZ2] は上述の MathSciNet Search の検索で見つけた文献である). この最後の節は Capelli による証明についてであるが, そのはじめの所に, 当時 Capelli の知ることのできた材料としては Serret と Jordan 及び, Battaglini による (Jordan の教科書に基づいた) 講義だけであることが注意されている.

代数方程式に関してもいろいろな仕事をしている. MathSciNet Search では [R] という文献に出会ったが, このタイトルの Capelli が我々の Capelli なのかは [R] だけからは判らず, 引用されている [TS] に当たらなければならなかった. 果たして [TS] の該当ページに引用されていたのは Alfredo Capelli であった. この定理は或る特別な形の多項式の既約性の判定を与える (38). 他に, 根の限界, 個数に関する Descartes や Fourier の定理のような仕事もあるようだ.

無限小解析に関しても Dirichlet 問題を扱ったり, ϑ 関数を扱ったりして, なかなか多才である. 幾何に関する一つの論文は共形変換が限られた形であるという Liouville の定理に関するものである (71).

以上, 途中かなりを端折って業績を紹介してきた. 本来は詳しく原論文に当たって述べるべきところであるが, それは今後の課題である. しかし, 上のような部分を見ただけでも, Capelli の研究領域は極めて汎いとまでは言わないが, なかなか多岐に亘って仕事をした人であることが判る. Galois 理論や Sylow の定理といった意外な所で彼の名前がでてくるのにも驚かされる. それでいて, 我々日本人に知られるところが少ないのは残念でもある. イタリアの百科事典 (Enciclopedia, Einaudi) で Capelli の名を探すと一箇所, 線型代数の定理として Capelli の定理というのを見つけることができる. MathSciNet Search で見つけた論文のタイトルに 'A generalization of the Kronecker-Capelli theorem on a system of linear equations' というのがある (因みにこの論文に access するのも難しそうである) から, 関係するものであろうが, 定理の名としてはやはり我々に馴染みがない.

著書 (57) は一見すると古い時代の代数の教科書 (日本でいえば, 藤原松三郎の「代数学」) のようだが, 微積分の初歩もあるかと思えば, ϑ 関数も入っているし, なかなか面白い. これだけを見ては, まとまりについて疑問が生ずるかもしれないところだが,

論文リストと照らして見ると著者の研究に密接した講義に基づくものであることが窺い知れるのである。

ICM でも 4 回話をしている (Paris(1), Heidelberg(2), Roma(1)). また今回の文献調査の過程でたまたま見つけたのが、先に言及した Chicago Congress (1893) での講演である。このイタリア語への翻訳が丁度 Battaglini 誌の新シリーズ (Capelli 新編集長) の最初の巻に載っていたので判ったのである。

昨年来、私の学生の伊藤稔君の修士論文で Newton 公式 (基本対称式と冪和対称式の関係) の Lie 環 \mathfrak{gl}_n 対応物を考えてもらったところであったが、そのような公式には普通の冪だけでなく階乗冪 (factorial power) が自然に現われる。例えば Capelli Identity の左辺の非可換行列式の対角成分のシフトのようなものである。それが動機なのかどうかは判らないが、Capelli は或る論文 (45) で階乗冪に関する Newton 公式を扱っている。これも、たまたまが重なるが、今回の文献調査の過程で目に止まったもので、ついでに、元の [T] のリストで欠けているものも見つけてしまった。そして Capelli のこの公式は、伊藤君の一つの公式のまさしく古典的対応物であったのだ。今回の、ささやかではあるが意外な収穫である。はじめの部分で「数学史」に対する些かのためらい乃至は疑問を述べつつも、ついに病みつきになってしまうことを述べたのは、この種の経験からであるのは言うまでもない。

研究会の後日談

研究会を目指して Capelli のことがかなり詳しく判ったのは、大きな収穫であったが、研究会で話したお蔭で更にまた文献上で得るものがあった。大阪産業大学の田村三郎氏からは、研究会の直後に A. Capelli, G. Battaglini, E. Pascal についての文献として Kenneth O. May “Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics” からの情報を丁寧にお教えいただいた。そこには、上で述べたような追悼文などのリストがあり、それに当たればその人について判るという仕組みである。例えば、Gabrielle Torelli による Capelli の追悼文は三つの雑誌に出ていることが判る。寡聞にして May のこの本について全く知らず、有り難い情報であった。しかしながら早速京大の図書室で調べて、カードで存在の確認はしたものの、不当な扱いを受けているらしく、どこにあるかすぐには判らないのであった。それでも書庫の片隅にあるのをなんとか見つけて貰ったので、現在は私の研究室で活用させていただいている。はじめからこの本のことを知っていれば、上に述べたような苦労はなかったのであるが、仕方

がない。

この本が便利なのは、文献だけでなく、その文献が *Math. Review* や *Jahrbuch ueber d. Fortschritte der Math.* で review されている場合にはその情報も併せて記載されていることである。古い文献で直接見ることをできないものも、後者で概要を知ることができる場合がある訳である。今回更にその分の情報が加わって補いとなった。

さて Capelli についての情報源として我々は Gabrielle Torelli による追悼文と論文リストに大きく依拠したのであった。では、この Gabrielle Torelli とはどのような人なのだろうか。研究会では Gabrielle Torelli を代数幾何で有名な Torelli の定理の Torelli であるかの如く言ってしまった。数学辞典をみると有名なのは R. Torelli である。思い込みも手伝ったが、ちょっとの手間を惜しむとこのようなミスが生じるのは恐ろしいことである。では Gabrielle とは誰なのか、そして R. Torelli との関係は？ 早速 May の本を参照する。

Torelli, Gabriele 1849–1931

Torelli, Ruggiere 1884–1915

有名な筈の R. Torelli には Severi による追悼文が1つだけで、一方の Gabrielle に対しては5つの文献がある。また気になるのは二人の生没年である。R. Torelli が Gabrielle の息子で早世したのかという推測も成り立つが、結局出ていた文献またはその review では詳しいことはしばらく判らなかつた。それが、また驚くような形で決着したのである。

ある日図書館に入り、何気なく机の上に目をやると、新着らしい“*Collected Papers of Ruggiero Torelli*” (*Queen’s papers in pure and applied Mathematics, vol. 101, Queen’s University 1995*) という全集にしては薄い本が置いてある。まさしくこれが有名な R. Torelli に間違いはない。私が注文した訳ではなく、気味の悪くなるほどの暗合である。Editors (Ciro Ciliberto and Edoardo Sernesi) による小伝がついている。その *Bibliographical information* の最初の数行を引用すれば、上の疑問の答えになろう。

Ruggiero Torelli was born in Napoli, on June 7, 1884. His father, Gabrielle, was a school mathematics teacher and later became professor of mathematical analysis in the University of Napoli.

ついでに、気になる彼の死についての記述も引用すると：

In 1908 Torelli returned to Pisa, with Bertini, where he remained until 1915,

when the world war started. On May 24, 1915, after giving the manuscript of his last paper to Bertini, he left Pisa and joined the army at the north-east front. He remained there despite a heart disease he did not want to reveal to his family and superiors. He died at Monfalcone by a heart attack while he was sleeping, on September 9, 1915.

ということである。ついでながら R. Torelli には Castelnuovo による追悼文もあるらしい。May の本での Ruggiere は多分誤記であろうが、更にまた遺漏があるということで、なかなか完璧なものはないという例証である。R. Torelli のことも興味深いものだが、本題ではないのでこれ以上は直接全集に当たっていただきたい。

研究会前後に起こったことを中心に、いろいろ書いてきたが、最後にもう一度「数学史」について反省したい。文献などは、もし自分がイタリア人であれば、こんなに苦労しないのを調べがつくものを、と思いつつ、やはり思いがけない出会いの楽しみに惹かれて深入りしてしまうのであるが、それにしても語学をはじめとする基礎知識の不足を痛感する。勿論、はじめから数学史を専門に研究しようというのなら別だが、数学者がこの種の探索に手を染めるのは、泥縄式に始めるしかない訳だ。加えて、時代と国を隔てての一般的常識にも欠けるところも多い。イタリアの数学界全般とまでは言わなくとも、Capelli の回りの状況なども、もっと調べなくてはならない点がある。文献 [P] などはこの辺りの参考になろうとは思いますが、どうにも直接見ることのできない文献が多いのである。限界は限界として気長にやっていくしかないということであろう。

文献

- [B] G. Boole, *Exposition of a general theory of linear transformations, I, II*, Cambridge Math. J. **3** (1841), 1–20, 106–119.
- [D] S.B. Diagne, *Boole — L'oiseau de nuit en plein jour —, Un Savant, Une Époque*, Belin, 1989.
- [CZ1] G. Casadio and G. Zappa, *Histroy of the Sylow theorem and its proofs*, [(Italian) MR 92f:01023], Boll. Storia Sci. Mat. **10** (1990), 29–75.
- [CZ2] ———, *The contributions of Alfredo Capelli to group theory*, [(Italian) MR 94f:01016], Boll. Storia Sci. Mat. **11** (1991), 25–54.
- [H1] Hilbert, *Hilbert's Invariant Theory Papers*, Lie Groups: Histroy, Frontiers, and Applications, vol. VIII; English translation by M. Ackerman; Comments by R. Herman, Math Sci Press, 1978.
- [H2] ———, *Theory of Algebraic Invariants*; English Translation by R.C. Laubacher; edited and with an introduction by B. Strumfels Cambridge Uni-

- versity Press, 1993.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [My] F. Meyer, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie*, Jber. d. Dt. Math.-Verein **1** (1892), 79–292.
- [Nc1] A. Natucci, *In memoria di Alfredo Capelli [1855–1910]*, Giorn. Mat. Battaglini **83** (1955), 297–300.
- [Nc2] ———, *In memoria di Alfredo Capelli [1855–1910]*, Period. Mat. **33** (1955), 257–275.
- [NUW1] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$* , Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.
- [NUW2] ———, *A quantum dual pair $(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{o}_n)$ and the associated Capelli Identity*, Lett. Math. Phys. **34** (1995), 1–8.
- [NUW3] ———, *Dual pairs, spherical harmonics, and a Capelli Identity in quantum group theory*, Compositio Math. **104** (1996), 227–277.
- [P] B. Pettineo, *The Circolo Matematico Palermo and the Palermo Mathematical School in the last century*, [(Italian) MR 83h:01097], Boll. Un. Mat. Ital. A (5) **18** (1981), 357–368.
- [R] E. Rowlinson, *New proofs for two theorems of Capelli*, Canad. Math. Bull. **7** (1964), 431–433.
- [S] W. Scharlau, *Die Entdeckung der Sylow-Sätze (English and French summaries) [The discovery of the Sylow theorems]*, [MR 89f:01041], Historia Math. **15** (1988), 40–52.
- [T] G. Torelli, *Alfredo Capelli—Cenno Necrologico—*, Giornale di Battaglini **48** (1910), 5–15.
- [TS] N. Tschebotaröw and H. Schwerdtfeger, *Grundzüge der Galois'schen Theorie*, Noordhoff, 1950.
- [U1] 梅田 亨 (T. Umeda), *Capelli 恒等式と Multiplicity-free Actions (joint work with Roger Howe)*, 『等質空間上の調和解析と群の表現論』, 数理解析研究所講究録 **761**, 1991, pp. 1–20.
- [U2] ———, *Cayley の公式の組み合わせ論的証明*, 『代数的組合せ論』, 数理解析研究所講究録 **768**, 1991, pp. 103–113.
- [U3] ———, *不変式論・入門・以前 = 第一基本定理と記号的方法 =*, 『現代の母函数』, 1991, pp. 71–188.
- [U4] ———, *100年目の Capelli Identity*, 数学 **46** (1994), 206–227.
- [Wt] W.C. Waterhouse, *The early proofs of Sylow's theorem*, Arch. Hist. Exact Sci. **21** (1979/80), 279–290.
- [Wy] H. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1939/1946.

Publications of Alfredo Capelli

after "Giornale di Mathematiche di Battaglini 1910"

I. Teoria delle forme algebriche

1. Sopra un punto della teoria delle forme binarie, *Giornale di Battaglini*, vol. XVI (1878), p. 217- ★
2. Sopra la corrispondenza (2,2) ossia la forma $f(x^2, y^2)$ e i suoi invarianti e covarianti relativi a due trasformazioni lineari indipendenti delle variabili, *G. di B.*, vol. XVII (1879), p. 69- ★
3. Sopra le forme algebriche termarie a più serie di variabili, *G. di B.*, vol. XVIII (1880), p. 17- ★
4. Sopra un problema di partizione in relazione alla teorie delle forme algebriche, *G. di B.*, vol. XIX (1881), p. 87- ★
5. Sopra gl'invarianti delle forme algebriche binarie, *Giornale di scienze naturali ed economiche di Palermo*, vol. XV (1881)
6. Sul numero dei covarianti di grado dato per forme di qualsivoglia specie, *G. di B.*, vol. XX (1882), p. 293- ★
7. Fondamenti d'una teoria generale delle forme algebriche, *Memoire della R. Accad. dei Lincei, Cl. di sc. f. m. e n.*, vol. XII₃ (1882), pp. 529-598 ★★
8. Alcune formole numeriche in relazione alla teorie delle operazioni di polare, *G. di B.*, vol. XXI (1883), p. 343- ★
9. Estensione della formola pel numero dei covariante al caso delle trasformazioni lineari indipendenti, *Rend. della R. Acc. dei Lincei, Cl. di sc. f. m. e n.*, vol. XV₃ (1883), p. 233-
10. Sopra la permutabilità delle operazioni invariantive, *Rend. della R. Acc. di sc. f. e m. di Napoli*, vol. XXV₁ (1886), p. 135-
11. Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen, *Mathem. Annalen*, Bd. XXIX (1887), pp. 331-338 ★★
12. Sulle operazioni invariantive delle funzioni di n serie di variabili n^{arie} , *Rend. del Circ. mat. di Parelmo*, T. I. (1887), pp. 58-59 ★★
13. Sopra un teorema che si collega strettamente colla formola che serve ad esprimere le forme algebriche di n serie di variabili n^{arie} per mezzo di potenze

del determinante delle variabili e di forme che dipendono da solo $n - 1$ serie di variabili, Rend. del Circ. mat. di Palermo, T. I. (1887), pp. 133-138 **

14. Osservazioni sopra le relazioni che possono aver luogo ideticamente fra le operazioni invariantive, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. I₂ (1887), p. 110-

15. Determinazione delle operazioni invariantive fra due serie di variabili permutabili con ogni altra operazione della stessa specie, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. I₂ (1887), p. 236-

16. Ricerca delle operazioni invariantive fra più serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie, Atti dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, N. I₂ (1888), pp. 1-17

17. Una legge di reciprocità per le operazioni invariantive fra due serie di variabili n^{arie} , Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. II₂ (1888), p. 189-

18. Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques, Mathem. Annalen, Bd. XXXVII (1890), pp. 1-37 **

19. Sopra un'estensione dello sviluppo per polari delle forme algebriche a più serie di variabili, Rend. della R. Acc. dei Lincei, Cl. di sc. fis. mat. e nat., vol. VII₄ (1891), pp. 161-167 **

20. Nuova dimostrazione del teorema sullo sviluppo per polari delle forme algebriche a più serie di variabili, Rend. della R. Acc. dei Lincei, Cl. di sc. f. mat. e n., vol. I₅ (1892), pp. 3-9 **

21. Sul sistema completo delle operazioni di polare permutabili con ogni altra operazione di polare fra le stesse serie di variabili, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. VII₂ (1893), p. 29-

22. Dell'impossibilità di sizigie fra le operazioni fondamentali permutabili con ogni altra operazione di polare fra le stesse serie di variabili, *Ibid.*, vol. VII₂ (1893), p. 155-

23. Alcune formole relative alle operazioni di polare, Trad. d'una comunicazione al Congresso matem. di Chicago, G. di B., vol. XXXII (1894), pp. 376-380 * *original: Quelques formules relatives aux opérations de polaire, 1893.* **

24. Sopra un principio generale di aritmetica ed una nuova dimostrazione del teorema di Hilbert, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. II₃ (1896), p. 198

25. Estensione del teorema di Hilbert al caso di polinomi con infiniti termini, *Ibid.*, vol. II₃ (1896), p. 231-

26. Nuova dimostrazione di una formola relative alle operazioni di polare, *Ibid.*, vol. IX₃ (1903), p. 176-

27. Lezioni sulla Teoria delle forme algebriche, Corso litografato (1902) **

II. Teoria delle sostituzioni

28. Dimostrazione di due proprietà numeriche offerte della teoria delle sostituzioni, ed osservazioni sopra le sostituzioni permutabili con sostituzione data, G. di B., vol. XIV (1876), p. 66- *
29. Intorno ai valori di una funzione lineare di più variabili, *Ibid.*, vol. XIV (1876), p. 141- *
30. Sopra l'isomorfismo dei gruppi di sostituzioni, *Ibid.*, vol. XVI (1878), pp. 32-87 **
31. Sopra la composizione dei gruppi di sostituzioni, Memoire della R. Accad. dei Lincei, Cl. di sc. f. m. e n., vol. XIX₃ (1884), p. 262-
32. Sulle generatrici del gruppo simmetrico delle sostituzioni di n elementi, G. di B., vol. XXXV (1897), p. 354- *

III. Teoria delle equazioni algebriche

33. Sopra la teoria funzioni algebriche di più variabili, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. IV₂ (1890), p. 297-
34. Sopra la teoria dell'irrazionali algebrici, *Ibid.*, vol. V₂ (1891), p. 61-
35. Sopra la compatibilità e la incompatibilità di più equazioni di 1° grado fra più incognite, Rivista di Matematica, vol. II (1892), pp. 54-58 **
36. Sulla separazione delle radici delle equazioni mediante il calcolo delle differenze — Note I e II, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. VIII₂ (1894), pp. 191 e 214
37. Sull'uso delle progressioni ricorrenti nella risoluzione delle equazioni algebriche, *Ibid.*, vol. I₃ (1895), p. 194-
38. Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche — Note I e II, *Ibid.*, vol. III₃ (1897), p. 243-; vol. IV₃ (1898), pp. 84 e 243
39. Sulla riduttibilità della funzione $x^n - A$ in un campo qualunque di razionalità, Mathemat. Annalen, Bd. LIV (1901), pp. 602- *
40. Sulla matrice di Sylvester per la risultante di due funzioni intere, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. XXIII (1907), pp. 130-136 **
41. Sulla risoluzione generale delle equazioni per mezzo di sviluppi in serie — Note I e II e III, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. XIII₃ (1907), pp.

192, 289 e 342

42. Determinazione del coefficiente generale nello sviluppo in serie della radice di un'equazione algebrica, *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, T. XXVI (1908), pp. 363-368 ★★

43. Sui coefficienti degli sviluppi in serie di potenze delle funzioni algebriche di più variabili, *Atti del IV congresso internazionale dei matematici a Roma* (1909), vol. II, pp. 156-162 ★★

IV. Teorie varie d'Algebra e d'Aritmetica

44. Sopra certi sviluppi di determinanti, *Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli*, vol. III₂ (1889), p. 58-

45. L'analisi algebrica e l'interpretazione fattoriale delle potenze, *G. di B.*, vol. XXXI (1893), pp. 291-313 e pp. 340-353; vol. XXXIII (1895), pp. 361-370 (*continua*) ★★

46. Saggio di introduzione dei numeri irrazionali col metodo delle classi contigue, *Ibid.*, vol. XXXV (1897), p. 209- ★

47. Sull'ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell'aritmetica, *Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli*, vol. VI₃ (1900), p. 138-

48. Le iper-aritmetiche e l'indirizzo combinatorio dell'aritmetica ordinaria, *Atti del II congresso internazionale dei matematici a Parigi* (1900), pp. 407-418 ★★

49. Sulla genesi combinatoria dell'aritmetica, *G. di B.*, vol. XXXIX (1901), p. 81- ★

50. Il concetto di valore e l'introduzione nell'aritmetica di numeri negativi e frazionii, *Ibid.*, vol. XXXIX (1901), p. 240- ★

51. Elementi di aritmetica ragionata e di algebra ad uso dell'istruzione secondaria, *Napoli* (1902-04)

52. Lezioni sui numeri reali estratte dalle Istituzioni di Analisi Algebrica, *Napoli* (1903)

53. Intorno all'algoritmo di Euclide, *Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli*, vol. IX₃ (1903), p. 299-

54. Sulle progressioni infinite di numeri reali — Note I e II, *Ibid.*, vol. XI₃ (1905), pp. 80 e 204

55. Ein Beitrag zum Fermat'schen Satze, *Atti del II congresso internazionale dei matematici ad Heidelberg* (1905), pp. 148-150 ★★

56. Sull'opportunità di dare nell'insegnamento secondario uno sviluppo maggiore alla matematica combinatoria, *Boll. di matematica*, vol. V (1906)

57. *Instituzioni di Analisi Algebrica*, Napoli: I edz. 1894 (col titolo “Lezioni di Algebra complementare as uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche”); II edz. 1898 (idem); III edz. 1902; IV edz. 1909 (pre-scindendo dal trattato col titolo “Corso di Analisi algebrica” comunicato a pubblicare in collaborazione col Prof. Garbieri nel 1886 e rimasto incompiuto) **

V. Analisi infinitesimale

58. Sopra l'integrale dell'equazione alle derivate parziali di Laplace, G. di B., vol. XXIII (1885), p. 123- *

59. Breve dimonstarzione di un noto corollario del teorema di Green, Rend. del Circ. Mat. di Parelmo, T. I (1887), pp. 1-2 **

60. Osservazione sopra un teorema enunciato da Hermite, Rend. del Circ. Mat. di Parelmo, T. I (1887), p.45 **

61. Sopra la teoria Riemanniana delle trascendenti abeliane, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. III₂ (1889), p. 236-

62. Sulla risoluzione generale delle equazioni ed in ispecie delle trinomie per mezzo di interali definiti, *Ibid.* vol. VI₂ (1892), p. 39-

63. Alcune osservazioni sugl'integrali commui a due sistemi di equazioni differenziali, *Ibid.* vol. VI₃ (1900), p. 100-

64. Sulla continuità delle funzioni di più variabili reali, *Ibid.* vol. VIII₃ (1902), p. 22-

65. Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione — Note I, II, e III, Rend. della R. Acc. dei Lincei, Cl. di sc. f. m. e n., vol. XI₅ (1902), p. 255-263; vol. XII₅ (1903), p. 224-; vol. XI₅ (1904), p. 651 **

66. Sull'arbitrarietà delle caratteristiche nell formole di addizione delle funzioni ϑ di una variabile, *Ibid.* vol. XIV₅ (1905), p. 470- *

67. Sulle formole generali di addizione delle funzioni ϑ di più argomenti, *Ibid.*, vol. XIV₅ (1905), p. 59- **

68. Sulla inversione delle corrispondenze — Note I e II, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. XI₃ (1905), pp. 236-, 470-

69. Über die Additionsformeln der Thetafunktionen, Atti del II congresso internazionale dei matematici ad Heidelberg (1905), pp. 272-274 **

70. Sulla dimonstrazione ed estensione di un teorema di Borel, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. XV₃ (1909), p. 151-

VI. Geomeria

71. Sopra la limitata possibilità di trasformazioni conformi nello spazio, Ann. di Matem. T. XIV₂ (1886), pp. 227-237 **
72. Soluzione di quesito proposto dal Prof. P. H. Schoute, Rend. del Circ. Mat. di Parelmo, T. I (1887), pp. 45 e 53-54 **

VII. Note bibliografiche e biografiche, discordi, relazioni, traduzioni

73. Sopra un manoscritto del fu Prof. Gaetano Batà, Rend. del Circ. Mat. di Parelmo, T. I (1887), pp.69- **
74. Riviste bibliografiche, *Ibid.* T. I (1887), pp. 9, 11, 19, 23 **
75. La Matematica nella sintesi delle scienze, Discorso inaugurale, Annuario della R. Università di Napoli per l'anno scolastico 1889-90
76. Commemorazione di Raffaele Rubini, Atti dell'Acc. Pontaniana di Napoli, vol. XXI (1891)
77. Giuseppe Battaglini, G. di B., vol. XXXII (1894), pp. 205-208 **
78. Per la commemorazione di J. J. Sylvester, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. III₃ (1897), p. 165-
79. Francesco Brioschi, G. di B., vol. XXXVI (1898), pp. 51- *
80. In commemorazione di C. Hermite, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. VII₃ (1901), p. 53-
81. Relazione sul concorso bandito dall'Acc delle sc. f. e m. di Napoli al premio di Lire 1000 per le scienze matematiche, Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli, vol. XI₃ (1905), p. 53-
82. Versione dal tedesco dell'articolo «Jürgens: Il concetto della molteplicità continua n volte infinta», G. di B., vol. XLV (1907), p.1- *
83. Versione dal tedesco dell'articolo «Lüroth: Sulla corrispondenza biunivoca fra due molteplicità», G. di B., vol. XLVI (1908), p.1- *

Names of the journals listed

Italian Journals

- Giornale di Matematiche di Battaglini (=Giornale di Battaglini= G. di B.), Napoli 1863-: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 23, 28, 29, 30, 32, 45, 46, 49, 50, 58,

- 77, 79, 82, 83** [20] *
- *Giornale di scienze naturali ed economiche di Palermo*: **5** [1] ×
 - *Atti della Reale Accademia dei Lincei (Memoire), Class di scienze fisiche, matematiche e naturali (=Memoire della R. Accad. dei Lincei, Cl. di sc. f. m. e n.), Roma, 1876–*: **7, 31** [2] *
 - *Atti della Reale Accademia dei Lincei (Memoire), Class di scienze fisiche, matematiche e naturali (=Rend. della R. Acc. dei Lincei, Cl. di sc. f. m. e n.):* **9, 20, 65, 66, 67** [5] *
 - *Rendiconti della Reale Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli (Rend. della R. Acc. di sc. f. e m. di Napoli)*: **10** [1] ×
 - *Rendconti del Circo matematiche di Parelmo (=Rend. del Circ. mat. di Parelmo)*: **12, 13, 40, 42, 59, 60, 72, 73, 74** [9] *
 - *Rendconti dell'Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli (=Rend. dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli)*: **14, 15, 17, 21, 22, 24, 25, 26, 33, 34, 36, 37, 38, 41, 44, 47, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 68, 70, 78, 80, 81** [27] ×
 - *Atti dell'Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli (=Atti dell'Acc. di sc. f. e m. di Napoli)*: **16** [1] ×
 - *Rivista di Matematica, Torino 1891–*: **35** [1] *
 - *Bolletino di matematica (=Boll. di matematica)*: **56** [1] △
 - *Annali di Matematica Pura ed Applicata (=Ann. di Matem.)*: **71** [1] *
 - *Atti dell'Accademia Pontaniana di Napoli*: **76** [1] *△

German Journal

- *Mathematische Annalen (=Mathemat. Annalen)* **11, 18, 39** [3] *

Addresses at Congress

- *Chicago (1893)* **(23)** [(1)] *
- *ICM Paris (1900)* **48** [1] *
- *ICM Heidelberg (1904)* **55, 69** [2] *
- *ICM Roma (1908)* **43** [1] *

Books

- 27.** *Lezioni sulla Teoria delle forme algebriche, Corso litografato (1902)* **

57. *Instituzioni di Analisi Algebrica*, Napoli: I edz. 1894 (col titolo “Lezioni di Algebra complementare as uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche”); II edz. 1898 (idem); III edz. 1902; IV edz. 1909 (pre-scindendo dal trattato col titolo “Corso di Analisi algebrica” comunicato a pubblicare in collaborazione col Prof. Garbieri nel 1886 e rimasto incompiuto) **

Conversions

- ★ available at Math. Dept. Kyoto University
- ★△ seems available in Kyoto Univ., but not at Math. Dept.
- △ seems available in Japan, but not in Kyoto
- × seems not available in Japan