数理解析研究所講究録
1022巻 1997年 35-42

自由群の自己同型群の上のあるコホモロジー類について
ON CERTAIN COHOMOLOGY CLASSES ON THE AUTOMORPHISMS OF FREE GROUPS

河澄響矢（北大理）
Nariya KAWAZUMI
(Hokkaido Univ.)

森田茂之先生（東大数理）との共同研究によって得られた結果を報告します。ただし文責は飽くまでも河澄にあります。とくに braid 群の部分のポカは河澄が一人でやったことです。

リーマン面のモジュライ空間または写像類群のコホモロジー類で最も重要なのは森田・マンフォード類 [Mo1] [Mu] です。これを、ねじれ係数のコホモロジー類に一般化したのが一般森田・マンフォード類（generalized Morita-Mumford classes）[Ka1] [KM] です。ここでは一般森田・マンフォード類の一部分、とくにその中で最も基本的な（拡張された）ジョンソン準同型が自由群の自己同型群に拡張することを示し、基本的性質を述べます。

金平糖というお菓子があります。百科事典を調べると芥子粒、飴粒、肉桂、胡麻などを芯にして氷砂糖を溶かした溶液を固めて作るそうです。あの独特の形は芯の芥子粒があって始めてあらわになるわけで、氷砂糖の不細工な形からは想像できません。Nielsen の有名な定理により、種数 $g(\geq 1)$ 境界成分 1 のコンパクト曲面の写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ は $2g$ 個の文字

$$a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$$

の生成する自由群 F_{2g} の自己同型群 A_{2g} の、境界成分に対応する語

$$w := a_1 b_1 {a_1}^{-1} {b_1}^{-1} a_2 b_2 {a_2}^{-1} {b_2}^{-1} \cdots a_g b_g {a_g}^{-1} {b_g}^{-1}$$

を止めるもの全体のなす部分群に同型：

$$\mathcal{M}_{g,1} \cong \{\varphi \in A_{2g}; \varphi(w) = w\}$$

です。これは写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ が、自己同型群 A_{2g} を砂糖液とし境界成分に対応する語 w を芥子粒とする金平糖であることを示しているのではないでしょうか。このような状況は森田・マンフォード類についてはもう少しはっきり成り立って、（拡張された）ジョンソン準同型 [Mo4] という砂糖液を語 w に由来する（symplectic）交叉形式という芥子粒によって縮約すると、森田・マンフォード類という金平糖が出来上がる [Mo6] [KM] ということになっています。ここでは砂糖液／ジョンソン準同型のみを調べることにします。金平糖／森田・マンフォード類のもつ独特の面白さに到達するのは無理でしょうが、栄養価くらいははっきりさせようという心算です。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

自由群の自己同型群の上のあるコホモロジー類について

1. コホモロジー類の定義.

記号を準備する。$n \geq 2$ を自然数とし、F_n を n 個の文字 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の生成する自由群、A_n をその自己同型群とする

$$\begin{aligned} F_n &:= \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, \\ A_n &:= \mathrm{Aut}(F_n). \end{aligned}$$

H によって自由群 F_n の可換化、H^* によってその双対を表す

$$\begin{aligned} H = H_{(n)} &:= (F_n)^{\mathrm{abel}} = F_n/[F_n, F_n] = H_1(F_n; \mathbb{Z}) \\ H^* = H^*_{(n)} &:= \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Z}) = H^1(F_n; \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

これらにはいずれも自己同型群 A_n が自然なやりかたで左作用する。可換群としてはどちらも $\mathbb{Z}^n$ に同型だが A_n-加群としては別物である。実際 1 次元コホモロジー群を計算して見るとすべての $n \geq 2$ について $H^1(A_n; H) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ に対して $H^1(A_n; H^*) \otimes \mathbb{Q} = 0$ となっている。

内部自己同型を考えることによって準同型

$$\iota : F_n \to A_n, \quad \gamma \mapsto \iota(\gamma)$$

が得られる。ただし $\iota(\gamma)(\delta) := \gamma\delta\gamma^{-1}$, $(\gamma, \delta \in F_n)$ である。仮定 $n \geq 2$ により F_n の中心は自明だから ι は単射であり、像 $\iota(F_n)$ は群 A_n の正規部分群である。その商群 $A_n/\iota(F_n)$ は外部自己同型群とよばれ $\mathrm{Out}(F_n)$ などと表される。ファイバー積 $\overline{A_n} := A_n \times_{\mathrm{Out}(F_n)} A_n$

$$\begin{aligned} \overline{A_n} :=& \{(\varphi, \psi) \in A_n \times A_n;\ \varphi \equiv \psi \bmod \iota(F_n)\} \\ =& \{(\varphi, \psi) \in A_n \times A_n;\ \psi\varphi^{-1} \in \iota(F_n)\} \end{aligned}$$

を考える。1-コサイクル $k_0 \in Z^1(\overline{A_n}; H)$ を

$$k_0(\varphi, \psi) := [\psi\varphi^{-1}] \in (F_n)^{\mathrm{abel}} = H, \quad (\varphi, \psi) \in \overline{A_n}$$

によって定義する [Mo3]（「第 3 種アーベル微分」[Ka3]）。ただし $[\gamma] \in H$ は $\gamma \in F_n$ の可換化を表わす。

自然な群の短完全列:

$$1 \to F_n \xrightarrow{\iota} \overline{A_n} \xrightarrow{\pi} A_n \to 1$$

を考える。ただし $\pi : \overline{A_n} \to A_n$ は $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi$ によって与えられ、ι は $\gamma \mapsto (1, \iota(\gamma))$ によって与えられるものとする。このとき任意の A_n-加群 M について Gysin 準同型 (ファイバー積分)

$$\pi_\sharp : H^q(\overline{A_n}; M) \to H^{q-1}(A_n; H^* \otimes M)$$

が誘導される [HS]。

以上の準備の下に、各 $q \geq 0$ に対しコホモロジー類 $\eta_q \in H^q(A_n; H^* \otimes H^{\otimes q+1})$ を

$$\eta_q := \pi_\sharp({k_0}^{q+1}) \in H^q(A_n; H^* \otimes H^{\otimes q+1})$$

によって定義する。準同型

$$\alpha_q : H^* \otimes H^{\otimes(q+1)} \to \Lambda^q H, \quad f \otimes v_0 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_q \mapsto f(v_0) v_1 \wedge \cdots \wedge v_q,$$

によってコホモロジーの係数 $H^* \otimes H^{\otimes q+1}$ を縮約して

$$\zeta_q := {\alpha_q}_*(\eta_q) \in H^q(A_n; \Lambda^q H)$$

と定義する。定義から直ちに分かるように $q = 0$ のとき $\eta_0 = k_0|_{F_n} = 1_H \in (H^* \otimes H)^{A_n}$ である。

コホモロジー類 η_q および ζ_q を写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ に制限したものは、それぞれ一般森田・マンフォード類 $m_{0,q+2}$, $m_{1,q}$ に他ならない [Ka2]。コホモロジー類 η_q は Torelli 群の上では Johnson [J2] が既に定義している。記号 η_q は Johnson の記法にしたがっている。

2. (拡張された) ジョンソン準同型**.**

ジョンソン準同型とマグナス展開の密接な関係は森田 [Mo5] および北野 [Ki] によって明らかにされつつある。ここでもその方針にしたがって η_1 が (拡張された) ジョンソン準同型に他ならないことを示す。

第 2 Magnus 展開 $\theta : F_n \to H \otimes H$ とは条件

(2.1) $\qquad \theta(\gamma\delta) = \theta(\gamma) + \theta(\delta) + [\gamma] \otimes [\delta], \quad (\forall \gamma, \delta \in F_n)$

(2.2) $\qquad \theta(x_i) = 0, \quad (1 \leq \forall i \leq n)$

によって一意的に特徴づけられる写像である [Bi] [Bou]。ただし $[\gamma] \in H$ は $\gamma \in F_n$ の可換化を表わす。写像 θ は交換子群 $[F_n, F_n]$ に制限して始めて準同型となる。この第 2 Magnus 展開 θ を用いて、各 $\varphi \in A_n$ に対して、準同型

$$\tau(\varphi) : H = (F_n)^{\mathrm{abel}} \to H \otimes H, \quad [\gamma] \mapsto \theta(\gamma) - \varphi\theta\varphi^{-1}(\gamma)$$

を考えることができる。これを写像 $\tau : A_n \to H^* \otimes H^{\otimes 2}$ と見なすと、群 A_n の A_n-加群 $H^* \otimes H^{\otimes 2}$ に係数をもつ 1-cocycle となる。また、写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ に制限したものは拡張された Johnson 準同型 [Mo4] の (2 倍) に他ならない。

式 (2.2) を ${k_0}^{\otimes 2} = -d\theta \in C^2(F_n; H^{\otimes 2})$ と解釈することによって次が証明される。

自由群の自己同型群の上のあるコホモロジー類について

定理 1. $\eta_1 = -[\tau] \in H^1(A_n; H^* \otimes H^{\otimes 2})$.

群 A_n の可換化 H への自然な作用が誘導する準同型 $\rho_0 : A_n \to GL(n, \mathbb{Z})$ の核を IA_n と表す。交わり $IA_{2g} \cap \mathcal{M}_{g,1}$ が種数 g 境界成分 1 の Torelli 群に他ならない。Magnus [Ma] が与えた IA_n の有限生成系を用いると次が判る。

命題 2. *Johnson* 準同型 $\tau : H_1(IA_n; \mathbb{Z}) \to H^* \otimes \Lambda^2 H$ は同型である。とくに群 IA_n の可換化 $H_1(IA_n; \mathbb{Z})$ は階数 $n^2(n-1)/2$ の自由加群である。ここで外積 $\Lambda^2 H$ は対応 $u \wedge v \mapsto u \otimes v - v \otimes u$ によって $H^{\otimes 2}$ の部分加群と見なす。

この命題の後半は（遅くとも）Andreadakis [A] によって知られている。この結果を Torelli 群の可換化を決定した Johnson の仕事 [J3] と比較すると呆気なく感じるほど単純である。このあたりに自由群の自己同型群には欠如していて写像類群には備わっている幾何学的な深みが窺われる。

命題 2 を Borel の結果 [B2] と組合せると次が得られる。

系 3. 任意の有限次元既約 $\mathbb{Q}[GL(n, \mathbb{Z})]$-加群 M について n が充分大きいならば

$$H^1(A_n; M) \cong \mathrm{Hom}(H^* \otimes \Lambda^2 H, M)^{GL(n,\mathbb{Z})}$$

3. 縮約公式.

コホモロジー類 η_q たちについても、一般森田・マンフォード類 [KM] と同様の縮約公式が成り立つ。逆に η_q たちの縮約公式は一般森田・マンフォード類の縮約公式を本質的に含意している。

定理 4. 任意の η_q, $q \geq 2$ は ${\eta_1}^q \in H^q(A_n; (H^* \otimes H^{\otimes 2})^{\otimes q})$ についてその係数を適当に縮約することによって得られる。逆に任意の $GL(n; \mathbb{Z})$-準同型 $f : (H^* \otimes H^{\otimes 2})^{\otimes q} \to \Lambda^q H$ について、${\eta_1}^q$ の係数を縮約したもの $f_* {\eta_1}^q$ は η_q のスカラー倍である。

群 $\overline{A_n}$ のコホモロジー群が標準的に分解することから証明される。

これを応用すると森田・マンフォード類の「原始性」[Mi] [Mo1] に類似した現象が観察できる。$n_1 + n_2 = n$ なる自然数 $n_1, n_2 \geq 2$ をとる。群 A_{n_2} は自然なやりかたで文字 $x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2} = x_n \in F_n$ に働くから準同型

$$i : A_{n_1} \times A_{n_2} \to A_n$$

が得られる。第 k 射影を $p_k : A_{n_1} \times A_{n_2} \to A_{n_k}$, $k = 1, 2$ と表す。群 $A_{n_1} \times A_{n_2}$ の作用を保つ直和分解 $(H =) H_{(n)} = H_{(n_1)} \oplus H_{(n_2)}$ を用いて写像

$${p_k}^* : H^*(A_{n_k}; H^*_{(n_k)} \otimes {H_{(n_k)}}^{(q+1)}) \to H^*(A_{n_1} \times A_{n_2}; H^*_{(n)} \otimes {H_{(n)}}^{(q+1)})$$

を考えることができる。$\Lambda^q H_{(n)}$ についても同様の写像を考えることができる。

定理 **5**（コホモロジー類 η_q および ζ_q の「原始性」）**.** 各 $q \geq 0$ について次が成り立つ

(1) $i^*\eta_q = {p_1}^*\eta_q + {p_2}^*\eta_q \in H^q(A_{n_1} \times A_{n_2}; H^*_{(n)} \otimes {H_{(n)}}^{(q+1)})$,

(2) $i^*\zeta_q = {p_1}^*\zeta_q + {p_2}^*\zeta_q \in H^q(A_{n_1} \times A_{n_2}; \Lambda^q H_{(n)})$.

4. Artin braid 群.

知られているように [Bi]、Artin braid 群 B_n は語 $x_1 x_2 \cdots x_n \in F_n$ の A_n における等方部分群に同型である

$$B_n = \{\varphi \in A_n;\ \varphi(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n\}.$$

この同型によってコホモロジー類 ζ_p を Artin braid 群 B_n に引き戻す。pure braid 群のコホモロジーへの対称群の作用の Lehrer と Solomon による記述 [LS] を援用し、§3 の定理 5(2) を使って次が得られる。

定理 **6.** 任意の $0 \leq p \leq n$ について $H^p(B_n; \Lambda^p H)$ の部分集合

$$\{\zeta_{\lambda_1}\zeta_{\lambda_2}\cdots\zeta_{\lambda_{n-p}};\ \lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-p} \geq 0) : \text{数 } p \text{ の } n-p \text{ 個の部分への負でない分割}\}$$

は一次独立である。

（９６年１２月の研究集会ではこの部分集合が線型空間 $H^p(B_n; \Lambda^p H) \otimes \mathbb{Q}$ の基底になると言いましたが、これは河澄の計算間違いでした。お詫びして訂正します。）

$p \leq n/2$ の場合、数 p の $n-p$ 個の部分への負でない分割の総数は n によらない。かくして、

系 **7.** 全次数が n 以下ならば、コホモロジー類 ζ_p たちは、可換環 $\oplus_{q=1}^n H^q(A_n; \Lambda^q H)$ において代数的独立である。ここで $\deg(\zeta_p) = 2p$ と数えるものとする。

写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の上で代数的独立であるのは $\deg < 2g/3 = n/3$ までである [L] [Ka2] ことが分かっている。

5. 自明係数コホモロジーについて.

最後に、自己同型群 A_n の有理自明係数コホモロジー$H^*(A_n;\mathbb{Q})$ について簡単に触れて置きたいと思います。

写像類群について Harer [Hr 1 - 4] が行ったのと同様に、自己同型群 A_n についても virtual cohomology dimension (vcd), ホモロジー安定性および低次元コホモロジー群などが知られています。その幾つかを述べると

(1) $\mathrm{vcd}(A_n) = 2n-2$ (Culler-Vogtmann [CV])

(2) $* << n$ ならば

$$H^*(A_n;\mathbb{Z}) = H^*(A_{n+1};\mathbb{Z})$$

(Hatcher [Ht], Hatcher-Vogtmann [HV].)

(3) $1 \leq * \leq 5$ について $H^*(A_n;\mathbb{Q}) = 0$, ただし $H^4(A_4;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ だけは除く（[HV]）。

したがって写像類群と同様に、安定コホモロジー環 $\lim_{n\to\infty} H^*(A_n;\mathbb{Z})$ を求めるということが大きな問題となります。

写像類群では（拡張された）ジョンソン準同型から森田・マンフォード類がえられたわけですが、自己同型群 A_n については我々のコホモロジー類 η_p から非自明な有理コホモロジー類は作ることが出来ません。それは virtual cohomology dimension が $2n-2$ であることと $q < 2n$ のとき

$$\left((H^* \otimes \Lambda^2 H)^{\otimes q} \otimes \mathbb{Q}\right)^{GL(n;\mathbb{Z})} = 0$$

であることから分かります。上述の Hatcher-Vogtmann の低次元コホモロジーの計算を勘案すると $\lim_{n\to\infty} H^*(A_n;\mathbb{Q})$ は自明もしくは高々$GL(\infty;\mathbb{Z})$ の寄与程度ではないか？という（あまり根拠の無い）感想が浮かんできます。

（１９９７年３月２８日記）

References

[A] S. Andreadakis, On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups, Proc. London. Math. Soc. **15** (1965), 239-268.

[Bi] J.S. Birman, *Braid, Link and Mapping Class Groups,* Ann. of Math. Stud. **82** Princeton Univ. Press., Princeton, New Jersey, 1974

[B1] A. Borel, Stable real cohomology of arithmetic groups, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **7** (1974), 235-272.

[B2] ——-, Stable real cohomology of arithmetic groups II, in *Manifolds and Groups, Papers in Honor of Yozo Matsushima*, Progress in Math. **14**, Birkhäuser, Boston, 1981, 21-55.

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Ch. 2., Hermann, Paris, 1972.

[CV] M. Culler and K. Vogtmann, Moduli of graphs and automorphisms of free groups, Invent. math. **84** (1986), 91-119.

[HL] R. Hain and E. Looijenga, Mapping class groups and moduli spaces of curves, preprint.

[Hr1] J. Harer, Stability of the homology of the mapping class group of orientable surfaces, Ann. Math. **121** (1985), 215-249.

[Hr2] ——-, The virtual cohomology dimension of the mapping class group of an orientable surface, Invent. math. **84** (1986), 157-176.

[Hr3] ——-, The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, Invent. math. **72** (1983), 221-239.

[Hr4] ——-, The third homology group of the moduli space of curves, Duke Math. J. **63** (1991), 25-55.

[Ht] A. Hatcher, Homology stability for graphs of automorphism of free groups, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 39-62.

[HV] A. Hatcher and K. Vogtmann, Cerf theory for graphs, preprint.

[HS] G. Hochschild and J.P. Serre, Cohomology of group extensions, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 110-134.

[J1] D. Johnson, An abelian quotient of the mapping class group $\mathcal{I}_g$, Math. Ann. **249** (1980), 225-242.

[J2] ——-, A survey of the Torelli group, Contemporary Math. **20** (1983), 165-179.

[J3] ——-, The structure of the Torelli group, II, III, Topology, **24** (1985), 113–144

[KM] N. Kawazumi and S. Morita, The primary approximation to the cohomology of the moduli space of curves and cocycles for the stable cohomology classes, Math. Research Lett. **3** (1996), 629-641.

[Ka1] N. Kawazumi, A generalization of the Morita-Mumford classes to extended mapping class groups for surfaces, to appear in Invent. math.

[Ka2] ——, On the stable cohomology algebra of extended mapping class groups for surfaces, preprint (Hokkaido Univ, 1995).

[Ka3] ——, 第3種アーベル微分と写像類群, 京都大学数理解析研究所講究録 **967** "Analysis of Discrete Groups," (1996), 25-41.

[Ki] T. Kitano, Johnson's homomorphism of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and the Massey higher products of mapping tori, Topology and its appl. **69** (1996), 165-172.

[Ko] M. Kontsevich, Feynman diagrams and low-dimensional topology, in *Proceedings of the first European Congress of Mathematicians*, vol. 2, Progress in Math. **120**, Birkhäuser, Boston, 1994, 97-121.

[LS] G.I. Lehrer and L. Solomon, On the action of the symmetric group on the cohomology of the complement of its reflecting hyperplanes, J. Alg. **104**, (1986), 410-424.

[L] E. Looijenga, Stable cohomology of the mapping class group with symplectic coefficients and of the universal Abel-Jacobi map, J. Algebraic Geometry **5** (1996), 135-150.

[Ma] W. Magnus, Über n-dimensionale Gittertransformationen, Acta Math. **64** (1934), 353–367.

[MKS] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Dover, New York, 1976.

[Mi] E.Y. Miller, The homology of the mapping class group, J. Differential Geometry **24** (1986), 1-14.

[Mo1] S. Morita, Characteristic classes of surface bundles, Invent. Math. **90** (1987), 551-577.

[Mo2] ——, Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles I, Ann. Inst. Fourier **39** (1989), 777-810.

[Mo3] ——, Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles II, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **105** (1989), 79-101.

[Mo4] ——, The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group, Invent. Math. **111** (1993), 197-224.

[Mo5] ——, Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, Duke Math. J. **70** (1993), 699-726.

[Mo6] ——, A linear representation of the mapping class group of orientable surfaces and characteristic classes of surface bundles, in *Topology and Teichmüller Spaces*, World Scientific, Singapore, 1996, 159-186.

[Mu] D. Mumford, Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, in *Arithmetic and Geometry*, Progress in Math. **36**, Birkhäuser, Boston, 1983, 271-328.