数理解析研究所講究録
1027巻 1998年 122-125

Some convexity constants related to Hlawka inequalities in Banach spaces

山形大・工 高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
岡山県立大・情報工 高橋泰嗣(Yasuji Takahashi)

n次元Euclid空間 R^n の任意の元x, y, zに対して、常に

$$\|x+y\|+\|y+z\|+\|z+x\| \le \|x\|+\|y\|+\|z\|+\|x+y+z\| \qquad (*)$$

が成り立つ。これが良く知られたHlawka不等式 (cf. [1]) であるが、これは任意の（複素）Hilbert空間Hに対しても成り立つことが知られている。これは不等式（実際には等式が成立）

$$\|x+y\|^2+\|y+z\|^2+\|z+x\|^2 \le \|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+\|x+y+z\|^2$$

を利用することによって示されるのであるが、これらは自然に次の問題を提起する：

Banach空間X及び指数 $s, r \ge 1$ を固定したとき、Xの任意の元x, y, zに対してHlawka型不等式

$$\left(\|x+y\|^s+\|y+z\|^s+\|z+x\|^s\right)^{1/s} \le C\left(\|x\|^r+\|y\|^r+\|z\|^r+\|x+y+z\|^r\right)^{1/r} \qquad (**)$$

が成り立つ定数Cは存在するのか？また存在するとしたら、その最適定数は何なのか？

実はそのような定数Cは常に存在し、$C \le 2^{1-2/r}\cdot 3^{1/s}$ ととれる。実際 $x=a, b, c \in X$ に対して、

$$\|x\| \le \frac{1}{8}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c\| \le \left(\frac{1}{8}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c\|^r\right)^{1/r}$$

が成り立つから、

$$\left(\|a\|^s+\|b\|^s+\|c\|^s\right)^{1/s} \le 3^{1/s}\left(\frac{1}{8}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c\|^r\right)^{1/r} \qquad (***)$$

である。そこで、変数変換：

$$x=a-b+c,\ y=a+b-c,\ z=-a+b+c$$

を考えると、(***) は

$$\left(\|x+y\|^s+\|y+z\|^s+\|z+x\|^s\right)^{1/s}$$
$$\le 2^{1-2/r}3^{1/s}\left(\|x\|^r+\|y\|^r+\|z\|^r+\|x+y+z\|^r\right)^{1/r}$$

となるからである。従って最適定数を $C(s,r;X)$ と書けば、

$$C(s,r;X) \le 2^{1-2/r}\cdot 3^{1/s}$$

を得る。更に $C(s,r;\ell_n^\infty) = 2^{1-2/r}\cdot 3^{1/s}$ $(3 \le n \le \infty)$ である。実際、

$$x = (-1,1,1,0,0,\ldots),\ y = (1,-1,1,0,0,\ldots),\ z = (1,1,-1,0,0,\ldots)$$

は最適定数を実現させるベクトルとなっている。しかしながら、Hlawka 不等式及びそれに付随する不等式から容易に

$$C(1,1;H) = 1,\ C(2,2;H) = 1\ \ (H: \text{a Hilbert space})$$

であるが、

$$1 < 2^{1-2/r}\cdot 3^{1/s}\Big|_{s=1,\,r=1} = \frac{3}{2},\ 1 < 2^{1-2/r}\cdot 3^{1/s}\Big|_{s=2,\,r=2} = \sqrt{3}$$

であるため、Hilbert 空間 H では、Hlawka 型不等式の最適定数 $C(s,r;H)$ はもっとシャープなものが予想される。実際次の様な定理が成り立つ。

Theorem 1. Let H be a Hilbert space. Then

(i) $C(s,r;H) = 2^{1-2/r}$ for $2 \le s < \infty,\ \frac{s}{s-1} \le r < \infty.$

(ii) $C(s,r;H) = 2^{1-2/r}\cdot 3^{1/s-1/2}$ for $1 \le s \le 2 \le r < \infty$.

(iii) $C(s,r;H) = 2\cdot 3^{1/s}(3^r+3)^{-1/r}$ for $1 \le s \le r \le 2$.

証明は変数変換をすることによって、type - cotype 理論に持ち込み、そこで、(p, p')-Clarkson type inequality (Kato-Takahashi [4]), Figiel-Iwaniec-Pelczynski [2] の結果等を利用してなされる。

我々の定理は指数領域：$\min\left(s, \frac{s}{s-1}\right) \le r$ について最適定数 $C(s,r;H)$ を決定したものであるが、残された領域：$\min\left(s, \frac{s}{s-1}\right) > r$ については、$C(s,r;H)$ の決定は困難が予想される。例えば Haagerup [3] は、方程式 $\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, $1 < r < 2$ の一意解を $r_0\ (= 1.84742\ldots)$ としたとき、$C(2,r;H) = 2^{1/2-1/r}$ for $1 \le r \le r_0$ であること、更に $s = 2,\ r_0 \le r < 2$ については、ガンマ関数を用いた定数（これが最適かどうかは不明）で抑えられることを膨大な計算によって示しているが、これとて情報としては measure zero であろう。他に [5], [6] , [7] 等も参照されたい。

最後に Banach 空間 X に対する Hlawka 型不等式の最適定数 $C(s,r;X)$ は、作用素論的に考えると、次のような意味を持つことに注意したい：行列

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を Banach 空間 $\ell_3^s(X)$ から Banach 空間 $\ell_4^r(X)$ への線形作用素と考えるとき、これは有界で且つ単射である。従って、逆写像 $T^{-1}: T(\ell_3^s(X)) \to \ell_3^s(X)$ が考えられる。この

とき変数変換：

$$a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{y+z}{2},\ c=\frac{z+y}{2}$$

を考えると、不等式 (**) は

$$2\left\|(a,b,c)\right\|_{\ell_3^s(X)} \le C\left\|T(a,b,c)\right\|_{\ell_4^r(X)}$$

となる。このことは、

$$C(s,r;X)=2\left\|T^{-1}\right\|$$

であることを示している。従って最適定数 $C(s,r;X)$ を求めることは、ある種の具体的な作用素ノルムを求めていることになる。

最適定数を実現させるベクトルを全て求めることは困難であるが、$r=s=1$ の場合、つまりもともとの Hlawka 不等式 (*) については決定できることを証明を付けて述べてみる。

Theorem 2. Hilbert 空間 H の元 x, y, z が与えられたとき、 Hlawka inequality

$$\left\|x+y\right\|+\left\|y+z\right\|+\left\|z+x\right\|\le\left\|x\right\|+\left\|y\right\|+\left\|z\right\|+\left\|x+y+z\right\|$$

の等号が成立するための必要十分条件は、次のどれかが成り立つことである：

(i) x, y, z のうちどれか一つはゼロである。

(ii) $x+y+z=0$.

(iii) H の単位ベクトル e が存在して、$x=\alpha e, y=\beta e, z=\gamma e$ と書ける。但し、α,β,γ は $\left|\alpha+\beta\right|+\left|\beta+\gamma\right|+\left|\gamma+\alpha\right|=\left|\alpha\right|+\left|\beta\right|+\left|\gamma\right|+\left|\alpha+\beta+\gamma\right|$ を満たすスカラーである。

証明。等号成立と仮定する。 x, y, z のどれもゼロでないとする。従って、Hlawka inequality を示すとき、知られた等式

$$\begin{aligned}
&(\left\|x\right\|+\left\|y\right\|+\left\|z\right\|+\left\|x+y+z\right\|-\left\|x+y\right\|-\left\|y+z\right\|-\left\|z+x\right\|)(\left\|x\right\|+\left\|y\right\|+\left\|z\right\|+\left\|x+y+z\right\|)\\
&=(\left\|y\right\|+\left\|z\right\|-\left\|y+z\right\|)(\left\|x\right\|-\left\|y+z\right\|+\left\|x+y+z\right\|)\\
&\quad+(\left\|z\right\|+\left\|x\right\|-\left\|z+x\right\|)(\left\|y\right\|-\left\|z+x\right\|+\left\|x+y+z\right\|)\\
&\quad+(\left\|x\right\|+\left\|y\right\|-\left\|x+y\right\|)(\left\|z\right\|-\left\|x+y\right\|+\left\|x+y+z\right\|)\ (\ge 0)
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{cases}
(1)\ y=\alpha z \text{ or } (1')\ y+z=\alpha' z\\
(2)\ z=\beta x \text{ or } (2')\ z+x=\beta' y\\
(3)\ x=\gamma y \text{ or } (3')\ x+y=\gamma' z
\end{cases}$$

でなければならない。ここに$\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,\gamma'$ はあるスカラーである。従って、

$(1) \wedge (2) \wedge (3), (1) \wedge (2') \wedge (3), (1) \wedge (2) \wedge (3'), (1) \wedge (2') \wedge (3'), (1') \wedge (2) \wedge (3), (1') \wedge (2') \wedge (3),$
$(1') \wedge (2) \wedge (3'), (1') \wedge (2') \wedge (3'),$
の8通りが考えられるが、$(1') \wedge (2') \wedge (3')$ 以外の場合については、(iii) に帰する。そこで $(1') \wedge (2') \wedge (3')$ の場合について考えると、

$$y + z = \alpha' x,\ z + x = \beta' y,\ x + y = \gamma' z$$

である。x, y, z のどれもゼロでなかったから

$$\begin{vmatrix} -\alpha' & 1 & 1 \\ 1 & -\beta' & 1 \\ 1 & 1 & -\gamma' \end{vmatrix} = 0$$

である。ここでもし $\alpha' = 0$ と仮定すると、上の4式から、$x = (\beta' + 1)y$ を得る。これは (iii) に帰する。$\beta' = 0, \gamma' = 0$ も同様であるから、結局 α', β', γ' は全てゼロでないと仮定出来る。従って、$z + x = \beta' y,\ x + y = \gamma' z$ から、$(1 + \frac{1}{\gamma'})x = (\beta' - \frac{1}{\gamma'})y$ を得る。ここでもし $\beta' \neq \frac{1}{\gamma'}$ なら、$y + z = \alpha' x$ と合わせて、(iii) に帰する。もし、$\beta' = \frac{1}{\gamma'}$ なら $\gamma' = -1$ でなければならないから、これは (ii) に帰する。

逆に (i), (ii), (iii) のうちのどれかが成り立てば、Hlawka inequality の等号が成立することを見ることは易しい。証明終

References

[1] P. S. Bullen, D. S. Mitrinovic and P. M. Vasic, Means and Their Inequalities, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster/Tokyo, 1988.

[2] T. Figiel, T. Iwaniec and A. Pelczynski, Computing norms and critical exponents of some operators in L^p-spaces, Studia Math., 79(1984), 227-274.

[3] U. Haagerup, The best constant in the Khintchine inequality, Studia Math., 70 (1982), 231-283.

[4] M. Kato and Y. Takahashi, Type, cotype constants and Clarkson's inequalities for Banach spaces, Math. Nachr., 186(1997), 187-196.

[5] R. Latala and K. Oleszkiewicz, On the best constant in the Khinchin-Kahane inequality, Studia Math., 109(1994), 101-104.

[6] S. J. Szarek, On the best constants in the Khinchin inequality, Studia Math., 58 (1976), 197-208.

[7] L. R. Williams and J. H. Wells, L^p inequalities, J. Math. Anal. Appl., 64(1978), 518-529.