数理解析研究所講究録
1029 巻 1998 年 1-16

回転円盤流における軸対称波束攪乱の発達と絶対不安定の構造

航技研　伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

1. はじめに

最近Lingwood[1)]が回転円盤上の三次元流に対して絶対不安定の可能性を提示したことは極めて注目される。絶対不安定の発生が三次元境界層に共通するものであれば、それは後退翼に沿う境界層の遷移機構でも重要な役割をすることが予想されるからである。絶対不安定は時間的にも空間的にも変動する波動型攪乱の群速度の零点に関係して発生することが知られている。しかし、その数学的な特異性と波動の伝播や発達という物理的現象の関係はまだ十分説明されていない。境界層の線形安定理論は波数と振動数を結びつける局所的な分散関係を複素関数の形で与える。したがって、群速度も複素数であり、その実部だけで波動の伝播が記述されることにはならない。最近筆者[2)]は複素特性曲線法を提案し、三次元境界層における点源楔状攪乱や環状波束攪乱の記述に成功して

いる。この理論は複素群速度をそのまま使用するため、絶対不安定の数学的および物理的構造の説明に極めて有望な方法と思われる。そこで、回転円盤流の局所固有解に複素特性曲線法を適用し、群速度の零点近傍の解の振舞いを記述する。それによって、絶対不安定と呼ばれる急激な攪乱増幅を発生させる機構が存在するか、そのための条件は何かを明らかにする。

2．三次元境界層の安定特性

まず、実用的に最も重要な後退翼上の三次元境界層において絶対不安定が発生する可能性があるかどうかを見るため、前縁に直角な翼弦方向に対する最大空間増幅率曲線の変化を調べる。境界層の局所的線形安定理論は、固有値問題の解として、一つの空間座標に依存する複素分散関係式を定める：

$$\omega = \Omega(\alpha, \beta, X). \tag{2.1}$$

空間増幅攪乱の場合には、ω と β が実数で、α（X方向波数）が複素数値を取り、虚部 α_i が空間的減衰率を表わす。最大増幅率曲線は $\mathrm{Im}[\Omega_\alpha]=\mathrm{Im}[\Omega_\beta]=0$ を満たし、その発散は同時に $\mathrm{Re}[\Omega_\alpha]=0$ を満たす点が存在するときに起きる。α を ω と β の関数と見るとき、その偏微分 $\partial\alpha/\partial\omega$, $\partial\alpha/\partial\beta$ は Ω_α の零点で無限大になり、これが絶対不安定に必要な特異点の条

件である。筆者の最近の研究[2]では、斜め円柱に沿う境界層の全体的な安定特性が調べられており、この目的に極めて好都合である。そこでは Falkner-Skan-Cooke の速度分布を利用した境界層近似計算法と平行流近似に壁面と外部流線の曲率および境界層流の非平行性の一部を付け加えた安定計算法が適用されている。斜め円柱は後退翼の前縁近傍を模擬しており、三次元境界層に特徴的な、横流れ不安定と流線曲率不安定が競合して現われる流れ場として最も重要な例である。この方法はかなり粗い近似計算であるが、後退翼境界層の主要な性質を見るには十分である。そこで図1には、この近似計算法を用いて得られた最大空間増幅率曲線の例を示す。実

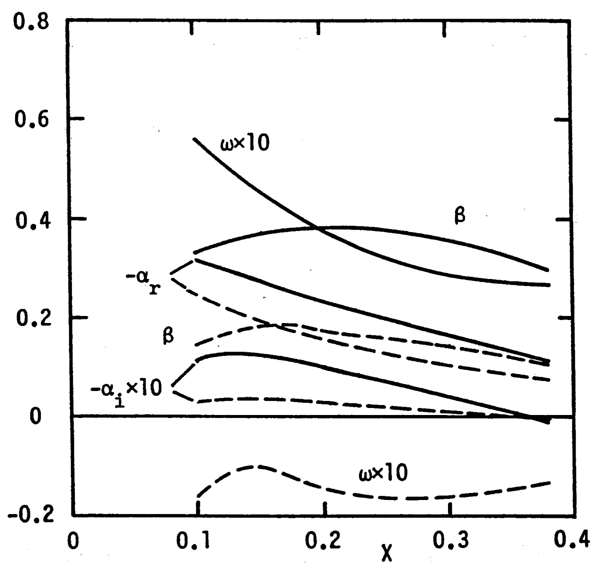

図1．斜め円柱に沿う境界層の最大空間増幅率曲線

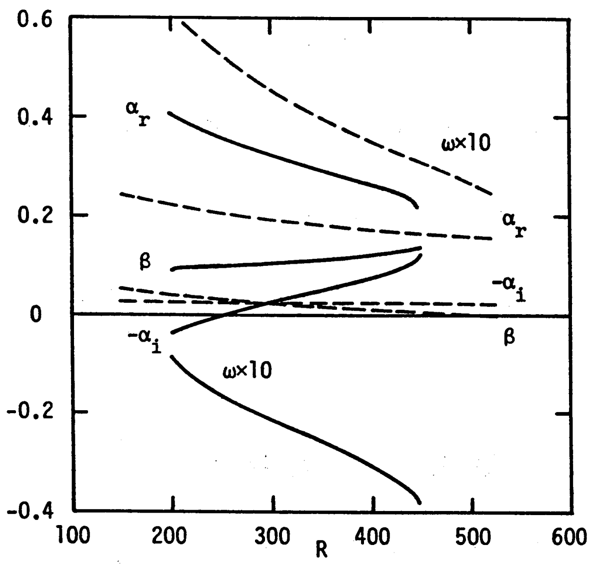

図2．回転円盤流の最大空間増幅率曲線

線は横流れ攪乱、破線は流線曲率攪乱を表わし、両者とも計算領域内で特異な振舞いを示してはいない。この結果は、少なくとも後退翼の前縁に近い領域では絶対不安定の発生する可能性が低いことを意味している。

三次元境界層のもう一つの代表的な例は回転円盤流であり、ここでも後退翼の場合と同様に横流れ不安定と流線曲率不安定の両方が発生する。しかしこの問題では、速度分布が相似形であり、半径方向に分布形状が変化しないために、境界層近似計算法を必要としない利点がある。図2はこの流れに対する最大空間増幅率曲線である。この計算には筆者の最近の論文[3)]で与えられた近似攪乱方程式が用いられた。図2の横流れ不安定曲線は$R \fallingdotseq 450$で発散的様相を示すが、これは群速度Ω_αが0になるからである。群速度の零点が存在することはここで用いた方程式に特有のものではなく、オル・ゾンマーフェルト方程式を用いても同じである[4)]。Lingwood[1)]はこの特異点に伴って絶対不安定が発生すると主張している。

3．複素特性曲線法

線形安定理論では、複素波数と振動数を複素数の位相関数$\Theta(X,Y,T)$の偏微分係数として定義することができる：

$$\hat{\alpha} = \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \qquad \hat{\beta} = \frac{\partial \Theta}{\partial Y}, \qquad \hat{\omega} = -\frac{\partial \Theta}{\partial T}. \tag{3.1}$$

これらは攪乱方程式に現われるものとは異なる基準長さと基準速度で無次元化されており、両者の変換則を

$$\alpha = \hat{\alpha}\, h_1(X), \qquad \beta = \hat{\beta}\, h_2(X), \qquad \omega = \hat{\omega}\, h_0(X), \tag{3.2}$$

と書くとき、変換係数は回転円盤流では $h_1 = 1$, $h_2 = h_0 = R^{-1}$ で与えられる。定義式(3.1)から位相関数を消去すると、

$$\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial Y} = \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial X}, \qquad \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial T} = -\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial X}, \qquad \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial T} = -\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial Y} \tag{3.3}$$

の関係が得られるので、時間的空間的に変化する波数と振動数はこの適合条件を満たさねばならない。波数と振動数を定数と考える古典的な安定理論では、(3.3)は自動的に満たされているから、適合条件は何も情報を提供しないが、定義式(3.1)を用いることによって波数と振動数の時間的空間的変化を許すとき、適合条件(3.3)はそれらの変化に対する重要な法則を提示することになる。

上記の適合条件は、攪乱の形態によってはさらに簡単化されるが、ここではまず、最も一般的な場合として、点源から瞬間的に励起されたスポット状波束攪乱を考える。固有値関係(2.1)と変換則(3.2)を用いて、(3.3)から $\hat{\alpha}$ を消去すると、

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial T} + \frac{h_1\,\Omega_\alpha}{h_0}\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial X} + \frac{h_2\,\Omega_\beta}{h_0}\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial Y} = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial T}+\frac{h_1\ \Omega_\alpha}{h_0}\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial X}+\frac{h_2\ \Omega_\beta}{h_0}\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial Y}=0 \qquad (3.4)$$

が得られ、これらは $dX/dT=h_0^{-1}h_1\ \Omega_\alpha$, $dY/dT=h_0^{-1}h_2\ \Omega_\beta$ によって定義される特性曲線に沿って $\hat{\omega}$ と $\hat{\beta}$ が変化しないことを意味する。この性質を利用するため、固有値関係(2.1)と群速度をつぎのように書き換える。

$$\hat{\alpha}\equiv\frac{\alpha}{h_1}=\hat{\alpha}\ (X;\hat{\omega}\ ,\hat{\beta}\ ),$$

$$C_1\equiv\frac{h_1\ \Omega_\alpha}{h_0}=C_1(X;\hat{\omega}\ ,\hat{\beta}\ ),\qquad C_2\equiv\frac{h_2\ \Omega_\beta}{h_0}=C_2(X;\hat{\omega}\ ,\hat{\beta}\ ). \quad (3.5)$$

その結果、特性曲線は定数 $\hat{\omega}$ と $\hat{\beta}$ をパラメターとして含む形

$$\frac{dX}{dT}=C_1(X;\hat{\omega}\ ,\hat{\beta}\ ),\qquad \frac{dY}{dT}=C_2(X;\hat{\omega}\ ,\hat{\beta}\ ) \qquad (3.6)$$

に表わされる。

本問題では群速度が複素数であるから、各特性曲線はYとTの複素空間 $Y=Y_r+iY_i$, $T=T_r+iT_i$ に伸展する。そこでそれらが実数値を取るとき、すなわち $Y_i=T_i=0$ の条件が満たされるとき、解が物理空間中に実現されるものと考える。ある攪乱が $X=X_0$, $Y=0$, $T=0$ で流れの中に導入され、下流位置 $X=X_1$ で観測されるものとすれば、観測される攪乱パターンは

$$T_i(\hat{\omega}_r\ ,\hat{\omega}_i\ ,\hat{\beta}_r\ ,\hat{\beta}_i\ )\equiv \mathrm{Im}\left[\int_{X_0}^{X_1}\frac{dX}{C_1(X;\hat{\omega}\ ,\hat{\beta}\ )}\right]=0, \qquad (3.7a)$$

$$Y_i(\hat{\omega}_r, \hat{\omega}_i, \hat{\beta}_r, \hat{\beta}_i) \equiv \mathrm{Im}\left[\int_{X_0}^{X_1} \frac{C_2(X;\hat{\omega},\hat{\beta})}{C_1(X;\hat{\omega},\hat{\beta})} dX\right] = 0, \quad (3.7b)$$

を満たす$\hat{\omega}$と$\hat{\beta}$成分から成るはずである。それらの成分の$X=X_1$における時間的および空間的分布は

$$T = T_r(\hat{\omega}_r, \hat{\omega}_i, \hat{\beta}_r, \hat{\beta}_i) \equiv \mathrm{Re}\left[\int_{X_0}^{X_1} \frac{dX}{C_1(X;\hat{\omega},\hat{\beta})}\right], \quad (3.8a)$$

$$Y = Y_r(\hat{\omega}_r, \hat{\omega}_i, \hat{\beta}_r, \hat{\beta}_i) \equiv \mathrm{Re}\left[\int_{X_0}^{X_1} \frac{C_2(X;\hat{\omega},\hat{\beta})}{C_1(X;\hat{\omega},\hat{\beta})} dX\right], \quad (3.8b)$$

で与えられ、その区間の全増幅率は

$$N = \log\frac{Q_E(X_1)}{Q_E(X_0)} + \hat{\omega}_i T_r(\hat{\omega}_r, \hat{\omega}_i, \hat{\beta}_r, \hat{\beta}_i)$$

$$-\hat{\beta}_i Y_r(\hat{\omega}_r, \hat{\omega}_i, \hat{\beta}_r, \hat{\beta}_i) - \mathrm{Im}\left[\int_{X_0}^{X_1} \hat{\alpha}(X;\hat{\omega},\hat{\beta})dX\right], \quad (3.9)$$

のように表わされる。ただし、Q_Eは基準速度として選ばれた局所外部流速である。

4. 絶対不安定の構造

絶対不安定は$\omega_\alpha=0$が複素分散関係式(2.1)の特異点になることから生じる。複素特性曲線法においても$C_1 \equiv h_0^{-1}h_1\omega_\alpha=0$は特異点であるから、この方法で絶対不安定の現象を記述できるはずである。その場合に問題になることは、攪乱の実現条件(3.7)がどのように係わってくるかである。そこで本節では、与えられた$\hat{\omega}$と$\hat{\beta}$に対して$C_1(X;\hat{\omega},\hat{\beta})=0$を満たす

点 $X=X_*$ が存在するものとし、その近傍における複素群速度の振舞いを調べる。

この目的には、分散関係(2.1)に(3.2)を代入した結果

$$h_0\hat{\omega} = \Omega(h_1\hat{\alpha}, h_2\hat{\beta}, X), \tag{4.1}$$

を用いる方が便利である。上式は $\hat{\alpha}$ の X 依存性を表わすので、$\hat{\omega}$ と $\hat{\beta}$ を定数として両辺を微分すると

$$\frac{d\hat{\alpha}}{dX} = \frac{1}{C_1}\left(\frac{h_0'}{h_0}\hat{\omega} - \frac{h_2'}{h_2}\hat{\beta}\, C_2 - \frac{1}{h_0}\Omega_X\right) - \frac{h_1'}{h_1}\hat{\alpha}, \tag{4.2}$$

が得られ、この関係を用いると群速度の X 微分はつぎのように表わされる。

$$\frac{dC_1}{dX} = \frac{h_1^2\ \Omega_{\alpha\alpha}}{h_0 C_1}\left(\frac{h_0'}{h_0}\hat{\omega} - \frac{h_2'}{h_2}\hat{\beta}\, C_2 - \frac{1}{h_0}\Omega_X\right)$$

$$+ \frac{h_1 h_2'}{h_0}\hat{\beta}\ \Omega_{\alpha\beta} + \frac{h_1}{h_0}\Omega_{\alpha X} + \left(\frac{h_1'}{h_1} - \frac{h_0'}{h_0}\right)C_1, \tag{4.3}$$

いま、群速度の零点近傍を考えれば、さらに簡単化されて、

$$\frac{dC_1}{dX} = \frac{a_0 + O(X_* - X)}{C_1} + b_0 + O(X_* - X) + \left(\frac{h_1'}{h_1} - \frac{h_0'}{h_0}\right)C_1, \tag{4.4}$$

のように表現できる。ただし、a_0 と b_0 はつぎの定数である。

$$a_0 = \left[\frac{h_1^2\ \Omega_{\alpha\alpha}}{h_0}\left(\frac{h_0'}{h_0}\hat{\omega} - \frac{h_2'}{h_2}\hat{\beta}\, C_2 - \frac{1}{h_0}\Omega_X\right)\right]_{X=X_*},$$

$$b_0 = \left[\frac{h_1 h_2'}{h_0}\hat{\beta}\ \Omega_{\alpha\beta} + \frac{h_1}{h_0}\Omega_{\alpha X}\right]_{X=X_*}. \tag{4.5}$$

この式から、X が X_* よりわずかに小さい領域での複素群速度

C_1は、$a_0 \neq 0$ のときには $(X_s - X)^{1/2}$に比例して、$a_0 = 0$ のときには $X_s - X$ に比例して0に近づくことが判る。したがって(3.7a)と(3.8a)における群速度の逆数の積分は、この領域で、

$a_0 \neq 0$のとき $$\int \frac{1}{C_1} dX = -\frac{2}{p_0}(X_s - X)^{1/2} + \text{const.},$$

$a_0 = 0$のとき $$\int \frac{1}{C_1} dX = -\frac{1}{p_1}\log(X_s - X) + O(1) + \text{const.}, \quad (4.6)$$

で与えられ、$a_0 = 0$ のときにだけ対数特異点が現われる。ただし、p_0とp_1は(4.4)から定まる定数である。絶対不安定は特性曲線の積分(3.8a)が $X \to X_s$ に対して無限大になることであるから、そのための必要条件は $a_0 = 0$ である。さらに特異点近傍に留る解が実現条件(3.7)を満たすことも要求されるが、ここではその議論を省略し、以下では実際に回転円盤流において条件 $a_0 = 0$ が満たされるかどうかを調べる。

5. 回転円盤流への適用

回転円盤流では特異点 $C_1 = 0$ は横流れ不安定に関係して現われるので、ここでは簡単のため、攪乱方程式としてオル・ゾンマーフェルト方程式を用い、無次元化には境界層厚さ$\delta = \sqrt{\nu / \omega_D}$ と局所外部流速 $r\omega_D$を使用する。ω_Dは円盤の回転角速度である。このとき半径方向の距離 r をδで無次元化

したものは局所レイノルズ数 $R=r\omega_D\delta/\nu$ に一致する。また、攪乱としては、$R=R_0$に設けられた環状のスリットから瞬間的にジェットを放出したときにできる軸対称波束型攪乱を考え、適当に選ばれた下流位置$R=R_1$で観測が行われるものとする。この場合には攪乱パターンの軸対称性から周方向波数$\hat{\beta}$は実数で、実際には整数値$\hat{\beta}=n$を取るが、計算ではnを連続的な実数として扱う。したがって、複素群速度はレイノルズ数R、複素振動数$\hat{\omega}$および実数波数nの関数で与えられ、特性方程式は

$$\frac{dR}{dT} = C_1(R;\hat{\omega},n) \tag{5.1}$$

のように表わされる。ただし、$\hat{\omega}$とnは特性曲線に沿って変らないパラメターである。

はじめに、複素群速度C_1の特異点$R=R_s$近傍での振舞いを見ておく。図3は、$\hat{\omega}_i=0$ に選び、波数nのいくつかの値に対して$Im[C_1]=0$ を満たす$\hat{\omega}_r$およびそのときの$Re[C_1]$をRに対してプロットしたものである。群速度の実部が$(R_s-R)^{1/2}$に比例して0に近づくことが判る。すなわち(4.6)の $a_0\neq0$ の場合に相当するため、ここでは絶対不安定が起こらない。

図3と同様な計算を$\hat{\omega}_i$の異なる値について行い、$Re[C_1]$

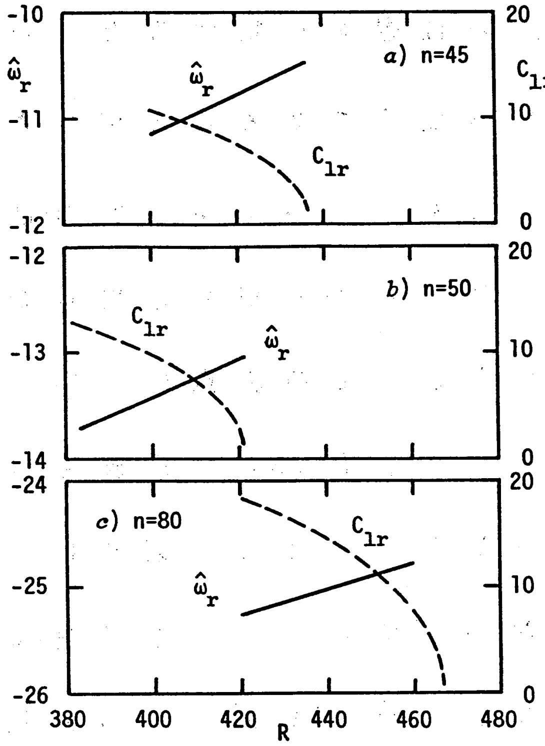

図 3 . 複素群速度の特異点近傍での振舞い

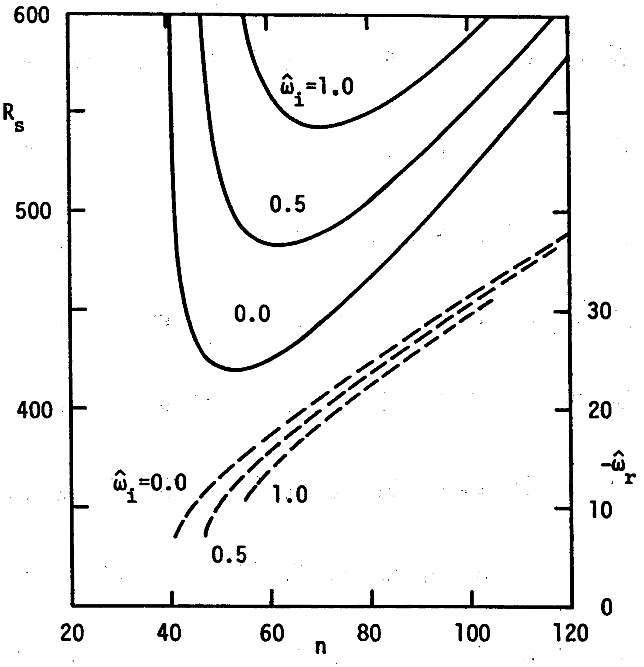

図 4 . 特異点Re数の周方向波数に対する変化

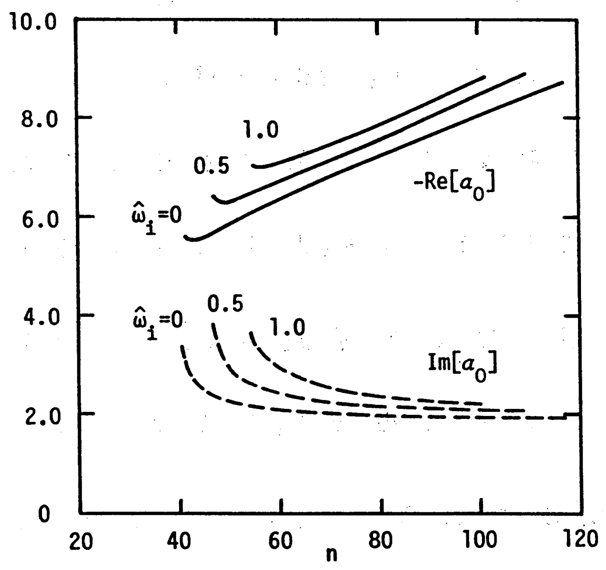

図 5 . 係数 a₀ の特異曲線に沿う変化

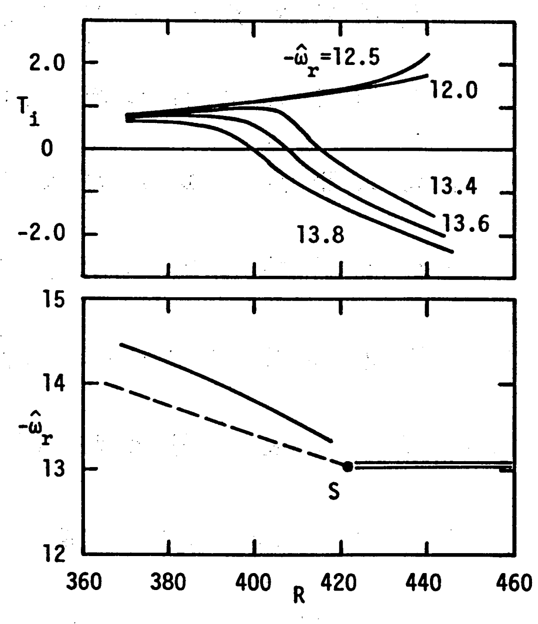

図 6 . 複素特性曲線の積分値と実現条件

曲線を外挿することによって特異点の位置を決定すると、特異点レイノルズ数R_sのnと$\hat{\omega}_i$に対する変化を知ることができる。その結果をまとめたものが図4であり、特に$\hat{\omega}_i=0$の曲線はLingwood[1]の図8に対応する。使用された攪乱方程式の違いによって数値的には一致しないが、同じ特異点について議論していることは間違いない。そこで、(4.5)で定義された係数a_0の特異曲線に沿う変化を計算したところ、図5に示すように実部も虚部も0にはならない。すなわち、本理論にしたがうと、少なくともここで計算されたパラメターの範囲内では、分散関係式の特異点 $C_1=0$ は絶対不安定をもたらさないと結論される。

それでは特異点の存在は攪乱の伝播にどのように影響するかという当然の疑問が生じる。そこで、$R_0=250$で導入された軸対称波束攪乱の複素特性曲線が特異点の近傍でどのような振舞いをするかを調べる。方程式(5.1)をR_0からRまで積分すると複素関数$T(R;\hat{\omega},n)$が定義され、攪乱成分$(\hat{\omega},n)$がRの位置で実空間に現われるためにはその虚部T_iが0になること、すなわち(3.7a)の成立が要求される。いま、nと$\hat{\omega}_i$を固定し、いくつかの$\hat{\omega}_r$についてT_iのRに対する変化をプロットする。各$\hat{\omega}_r$に対して$T_i=0$を満たすRが定まるときには、

さらにこれを $(R, \hat{\omega}_r)$ 面にプロットすると、図6のような結果を得る。これは $n=50$、$\hat{\omega}_i=0$ の場合で、点Sは特異点、破線は $\mathrm{Im}[C_1]=0$ を満たす点を表わす。特異点から下流にはリーマン面の分岐線が伸びており、上流からSの上方を回り込むときと、下方を回り込むときで異なる面に入り込む。T_iの曲線が、$-\hat{\omega}_r > 13.0$ に対しては横座標と交わるのに対して、$-\hat{\omega}_r < 13.0$ の場合には単調に増大して0にならないのはこのリーマン面の存在による。すなわち、特異点の出現は、それより下流側にリーマン面を伴うため、その近傍を通過する攪乱成分の実現条件達成(3.7)を阻害するのである。

図7には、$R_0=250$で導入され、$R_1=400$と$R_1=500$で観測される攪乱成分の全増幅率Nが時間Tに対してプロットされている。この増幅率Nは入力点で全ての攪乱成分が同じ初期振幅を持つ場合に、観測点で測定される振幅の相対的な大きさを表わす。各nに対する曲線は $\hat{\omega}_i=0$ で最大値を取り、その位置が黒丸で示されている。白丸は各n曲線を形成する成分がその点で実現条件(3.7a)を満たし得なくなることを意味している。これは上に述べた特異点の出現による結果である。図4に示されているように、特異点は波数nの比較的大きい領域で発生するから、レイノルズ数が高くなるにつれて、高波

数の撹乱が実現されなくなり、観測される撹乱は小さな波数成分に支配されるようになる。なお、図7で注目すべきことは、R=500では全増幅率がN=17にも達することである。境界層の遷移予知法ではN=10程度で乱流に遷移するとされているから、図7のN値はこれらのレイノルズ数で乱流状態になってもおかしくないことを示している。ただし、オル・ゾンマーフェルト方程式は非平行効果を取入れた撹乱方程式に比べて高い増幅率を与えることが知られているので、その点は割り引いて考える必要がある。

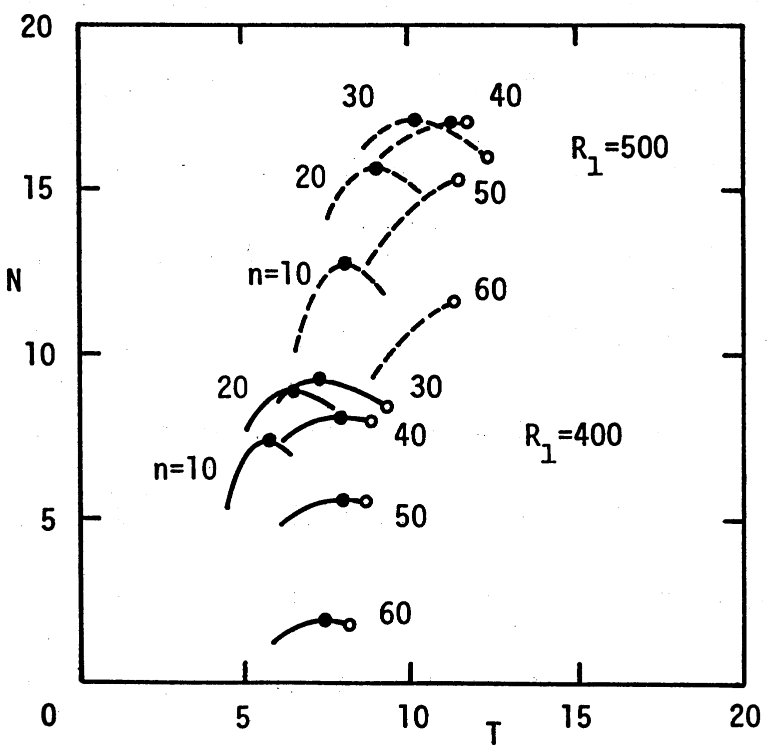

図7．R_0=250で導入されR_1=400とR_1=500で観測される撹乱（実線：R_1=400；破線：R_1=500）

6．むすび

本論文では、線形安定計算から得られる複素分散関係式に複素特性曲線法を適用し、回転円盤上の環状スリットから導入された軸対称波束攪乱の発達を記述するとともに、その手法を利用して、三次元境界層において絶対不安定が発生する可能性を吟味した。その結果つぎの結論が導かれた。

三次元境界層の絶対不安定は境界層の成長する方向の複素群速度C_1が0になる点の存在を必要とするが、群速度の零点が必ずしも絶対不安定を発生させることにはならない。群速度C_1の零点X_sの近傍での振舞いは$C_1 \sim (X_s - X)^{1/2}$の場合と$C_1 \sim X_s - X$の場合がある。後者は極めて特殊な状況においてのみ成立し、その場合にだけ絶対不安定が発生する。今回調べた回転円盤流では、群速度の零点が前者に属するために絶対不安定は発生しない。

参考文献

1) Lingwood, R.J. (1995) Absolute instability of the boundary layer on a rotating disk. J. Fluid Mech. 299, 17-33.

2) Itoh, N. (1996) Development of wedge-shaped disturbances originating from a point source in a

three-dimensional boundary layer. Fluid Dyn. Res. 18, 337-354.

3) Itoh, N. (1996) Simple cases of the streamline-curvature instability in three-dimensional boundary layers. J. Fluid Mech. 317, 129-154.

4) Itoh, N. (1985) Stability calculations of the three-dimensional boundary layer flow on a rotating disk. Laminar-Turbulent Transition, ed. V.V.Kozlov, pp.463-470, Springer.