

# 点ソースモデルに関する対数ポテンシャル逆問題に対する 窓 Fourier 変換の応用

岡山理科大学総合情報学部  
大阪大学工学部

大江貴司 (Takashi OHE)  
大中幸三郎 (Kohzaburo OHNAKA)

## 1 はじめに

偏微分方程式の逆問題の現実問題への適用を考える場合、対象領域の部分境界でしかデータが得られないことがある [1]。本稿ではこの様な状況の下で、点ソースモデルに関する対数ポテンシャル逆問題 [2] について考える。とくに点ソースモデルのパラメータ推定逆問題に対し窓 Fourier 変換を適用した解法を示し、その数値的性質について示す。

## 2 対数ポテンシャル逆問題

領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  を原点を中心とした半径  $R$  の円領域とし、 $\Gamma = \partial\Omega$  とする。また  $\Gamma_{obs}$  を零でない長さを持つ  $\Gamma$  の部分集合とする。領域  $\Omega$  内で定義されたソース項  $f$  によって生成される対数ポテンシャル  $u_L(f)$  を

$$u_L(f)(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\Omega} f(x', y') \log \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} dx' dy', \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

で定義する。ただし、ソース項は個数  $N$  および強度  $q \neq 0$  が既知の点ソースモデル

$$f(x, y) = q \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j, y - y_j), \quad (x_j, y_j) \in \Omega \quad (2)$$

で表されるものとする [2]。このときに次の問題を考える。

### [問題]

関数  $g$  を  $\Gamma$  上の解析関数とする。式 (2) で表されるソース項  $f$  に対する対数ポテンシャル  $u_L(f)$  について  $u_L(f)(x, y) = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Gamma_{obs}$  が成立するするとき、点ソースモデル  $f$  の未知パラメータ  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  を決定せよ。

この問題の解は存在すれば一意である。これは  $u_L(f)|_{\Gamma}$  が  $\Gamma$  上で解析的であり、 $u_L(f)|_{\Gamma_{obs}}$  を解析接続することにより  $u_L(f)|_{\Gamma}$  が一意的に得られること、および点ソースモデルのパラメータ  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  が  $u_L(f)|_{\Gamma}$  の Fourier 係数列

$$\gamma_k \equiv \int_0^{2\pi} u_L(f)(R \cos \theta, R \sin \theta) \exp(ik\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

に対して一意であることを用いて証明できる [3]。ここで  $u_L(f)|_{\Gamma}$  は  $u_L(f)$  の  $\Gamma$  への制限を表す。なお、点ソースモデルのパラメータ  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  と Fourier 係数列  $\{\gamma_k, k \in \mathbb{Z}\}$  の間

には次の関係式が成立する。

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{q}{2k} \sum_{j=1}^N \left( \frac{x_j + iy_j}{R} \right)^k, & k \geq 1 \\ -Nq \log R, & k = 0 \\ \frac{q}{2k} \sum_{j=1}^N \left( \frac{x_j - iy_j}{R} \right)^k, & k \leq -1 \end{cases} \quad (4)$$

式(4)は点ソースモデルのパラメータ  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  を決定するためには、Fourier 係数  $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, N$  を求めればよいことを示している [4,5]。

実際に解を求める際には、 $u_L(f)|_\Gamma$  の Fourier 係数列  $\{\gamma_k, k \in \mathbf{Z}\}$  を  $u_L(f)|_{\Gamma_{obs}}$  から求める必要がある。本稿ではこの方法として窓 Fourier 変換を用いた方法を示す。

### 3 窓 Fourier 変換

窓 Fourier 変換とは、 $h \in L^2(\Gamma)$  に対する  $\Gamma_{obs}$  を台として持つような関数  $w \in L^\infty(\Gamma)$  を重み関数とした Fourier 変換

$$\xi_k(h) = \int_0^{2\pi} h(R \cos \theta, R \sin \theta) w(R \cos \theta, R \sin \theta) \exp(ik\theta) d\theta, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (5)$$

である [6]。関数  $h \in L^2(\Gamma)$  の窓 Fourier 変換  $\xi(h) \equiv \{\xi_k(h), k \in \mathbf{Z}\}$  は  $\xi(h) \in l^2$  であり、 $h$  の Fourier 係数列  $\gamma(h) \equiv \{\gamma_k(h), k \in \mathbf{Z}\}$  との間に  $\xi(h) = W\gamma(h)$  となるような有界線形作用素  $W$  が存在する。

作用素  $W$  は定義域  $l^2$  上で退化作用素であり、その逆作用素は一意ではない。しかし、定義域を  $\Gamma$  上の解析関数の Fourier 係数列の集合に制限した場合には、逆作用素は一意となることが証明できる。本稿で考える問題では  $u_L(f)|_\Gamma$  が解析的であることから、その窓 Fourier 変換に対し Fourier 係数列は一意となる [3]。したがって解析関数の Fourier 係数列を値域とする  $W$  の逆作用素を構成すればよい。

### 4 逆問題の解法

前節で示した作用素  $W$  の逆作用素の構成を考える。窓 Fourier 変換  $\xi$  および作用素  $W$  を用いると、Fourier 係数列  $\gamma$  を

$$\gamma = \lambda W\gamma + (I - \lambda W)\gamma = \lambda\xi + (I - \lambda W)\gamma \quad (6)$$

の形に分解することができる。ここで  $\lambda$  は定数である。式(6)を用いて

$$\gamma^{(0)} = \xi \quad (7)$$

$$\gamma^{(n)} = \lambda\xi + \gamma^{(n-1)} - \lambda W\gamma^{(n-1)}, \quad n \geq 1 \quad (8)$$

で生成される  $\gamma$  の近似列  $\{\gamma^{(n)}\}$  を考える。このとき  $\gamma^{(n)}$  の存在範囲は解析関数の Fourier 係数列の範囲に限定されないため、 $\gamma^{(n)}$  が収束した場合においてもその極限が  $\gamma$  であることは保証されない。そこで  $\gamma^{(n)}$  の存在範囲を限定するため、次式により近似列を構成することを考える。

$$\gamma^{(n)} = \lambda\xi + \gamma^{(n-1)} - \lambda Wg(\gamma^{(n-1)}), \quad n \geq 1 \quad (9)$$

ここで  $g(\cdot)$  は、次式で構成される非線形作用素である。

$$g(\gamma) = \{g_k(\gamma), k \in \mathbf{Z}\} \in l^2 \quad (10)$$

$$g_k(\gamma) = \begin{cases} \frac{q}{2k} \sum_{j=1}^N z_j(\gamma)^k, & k \geq 1 \\ -Nq \log R, & k = 0 \\ \frac{q}{2k} \sum_{j=1}^N \overline{z_j(\gamma)}^k, & k \leq -1 \end{cases} \quad (11)$$

ただし  $z_j(\gamma)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  は

$$\gamma_k = \frac{q}{2k} \sum_{j=1}^N z_j(\gamma)^k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

の解を表す。作用素  $g(\cdot)$  は  $\gamma \in l^2$  から点ソースモデルの Fourier 係数列の性質を満たすような数列を生成する  $l^2$  から  $l^2$  への非線形作用素である。式 (9) により生成される近似列について、収束した場合にその極限が  $\gamma$  であることが証明できる。

## 5 収束比の評価

式 (9) に含まれるパラメータ  $\lambda$  の近似解の収束に対する影響について考える。点ソースモデルの Fourier 係数列の真の値  $\gamma$  について

$$\gamma = \lambda \xi + \gamma - \lambda W g(\gamma) \quad (13)$$

が成立することから、式 (9) から式 (13) を引くことにより

$$\delta\gamma^{(n)} = \delta\gamma^{(n-1)} - \lambda W (g(\gamma^{(n-1)}) - g(\gamma)) \quad (14)$$

を得る。ここで  $\delta\gamma^{(n)} = \gamma^{(n)} - \gamma$  である。右辺第 2 項を  $\delta\gamma^{(n-1)}$  により Taylor 展開し、高次項を無視すると  $\delta\gamma^{(n)}$  は

$$\delta\gamma^{(n)} \simeq \left( I - \lambda W \frac{\partial g}{\partial \gamma}(\gamma^{(n-1)}) \right) \delta\gamma^{(n-1)} \quad (15)$$

で近似できる。よって

$$\left\| \frac{\delta\gamma^{(n)}}{\delta\gamma^{(n-1)}} \right\| \simeq \left\| I - \lambda W \frac{\partial g}{\partial \gamma}(\gamma^{(n-1)}) \right\| \quad (16)$$

を評価することにより、近似解の収束比、およびそのパラメータ  $\lambda$  に対する依存性が評価できる。

## 6 数値実験

第 4 節で示した解法に関する数値実験結果を示す。領域  $\Omega$  の半径を 1 とし、点ソースを図 1 に示す位置に配置した。なお各点ソースの強度は  $q = 0.3$  とした。対数ポテンシャルの観測部分区間  $\Gamma_{obs}$  は

$$\Gamma_{obs} = \bigcup_{m=1}^M \left\{ \theta \mid \frac{2(m-1)\pi}{M} - \frac{T}{2M} \leq \theta \leq \frac{2(m-1)\pi}{M} + \frac{T}{2M} \right\} \quad (17)$$

で定義した。ここで  $M$  は観測部分区間の個数で 1, 2, 3 の値をとり、 $T$  は観測部分区間全体の幅で 180 度から 360 度まで 30 度きざみで変化させた。また、対数ポテンシャルの誤差を含む観測値  $\widetilde{u}_L(f)(x, y)$  を次式により生成した。

$$\widetilde{u}_L(f)(x, y) = u_L(f)(x, y) + n(0, l \cdot p) \quad (18)$$

$$p = \sqrt{\int_{\Gamma_{obs}} u_L(f)(x, y)^2 d\Gamma(x, y) / \int_{\Gamma_{obs}} d\Gamma(x, y)} \quad (19)$$

ここで、 $n(m, \sigma)$  は平均  $m$ 、標準偏差  $\sigma$  の正規乱数を表す。また  $l$  はノイズレベルを表し、0,  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$  とした。

窓関数  $w$  としては、次式で定義される  $\Gamma_{obs}$  の定義関数  $\chi_{\Gamma_{obs}}$  を用いた。

$$w(\theta) = \chi_{\Gamma_{obs}}(\theta) \equiv \begin{cases} 1, & \theta \in \Gamma_{obs} \\ 0, & \theta \in \Gamma \setminus \Gamma_{obs} \end{cases} \quad (20)$$

なお窓 Fourier 変換の計算には中点則による数値積分を用い、観測部分区間の個数  $M$  が 1, 2, 3 の場合に対し、それぞれ 21, 22, 21 個の点を用いた。また式 (9) におけるパラメータ  $\lambda$  は 1 とした。近似列  $\{\gamma^{(n)}\}$  の収束判定条件は、式 (12) の解  $z_j(\gamma)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  を用いて

$$\left| z_j(\gamma^{(n)}) - z_j(\gamma^{(n-1)}) \right| < 10^{-6}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

とし、最大反復回数を 500 とした。

ノイズレベル  $l = 0$  の場合について、収束に要した反復回数および点ソースの推定位置の最大誤差の値を表 1 に示す。表 1 より、同じ部分区間の個数では部分区間の幅が増加するほど、また同じ観測部分区間幅では観測部分区間の個数が増加するほど、収束に要する反復回数が減少することがわかる。また収束した場合について、推定位置の誤差はほぼ同程度であることが確認できる。

ノイズレベルを変化させた場合について、点ソースの推定位置の最大誤差の値を表 2 に示す。表 2 より、 $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$  および  $10^{-2}$  程度の観測誤差レベルに対して、推定位置の最大誤差はそれぞれ  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$  および  $10^{-3}$  程度であり、ノイズレベルに対し 1/10 程度であることが確認できる。また、推定位置の誤差は観測部分区間の大きさ、および個数にはほとんど影響されないことがわかる。

最後に第 5 節で示した近似解の収束比、およびそのパラメータ  $\lambda$  に対する依存性に関する数値結果を示す。領域  $\Omega$  および点ソースの配置は先に示したものと同一ものを取り、観測区間の大きさ  $T$  を 300 度に固定した。観測部分区間の個数は 1 とし、パラメータ  $\lambda$  を 0.1 から 1.9 の範囲で 0.1 きざみで変化させた。また  $\frac{\partial g}{\partial \gamma}(\gamma^{(n-1)})$  の評価に用いる  $\gamma^{(n-1)}$  としては、最終的に収束した推定値を用いた。図 2 に近似解の収束比の真値と式 (16) による評価値のパラメータ  $\lambda$  に対する依存性を示す。図 2 より、近似解の収束比を最適にする  $\lambda$  の値が存在することが確認できる。また式 (16) により近似解の収束比がほぼ正確に評価でき、さらにそれを最適にする  $\lambda$  の値も正しく評価できることがわかる。

## 7 まとめ

点ソースモデルに対する対数ポテンシャル逆問題において、境界の一部分におけるデータのみが得られる場合に対する数値解法として窓 Fourier 変換を用いた数値解法を示した。また本稿で示した数値解法に対する実験をおこない、複数の点ソースの位置が正確に推定できることが確認

できた。また観測誤差がある場合についても、推定位置の誤差は観測誤差レベルの  $1/10$  程度であることがわかった。さらに近似解の収束比に関する評価をおこない、実際の近似解の収束比がほぼ正確に評価できることが確認できた。

## 参考文献

- [1] 久保, 逆問題, 培風館, 1992.
- [2] Stromeier, D., and Ballani, L., Manuscripta Geodaetica, 9(1984), 125-136.
- [3] 大江, 大中, 日本応用数理学会論文誌, 7(1997), 295-306.
- [4] 山谷, 大中, 日本応用数理学会論文誌, 7(1997), 65-78.
- [5] Ohe, T., and Ohnaka, K., Appl. Math. Modelling, 19(1995), 429-436.
- [6] Chui, C.K., An Introduction to Wavelets, Academic Press, Orlando, 1992.

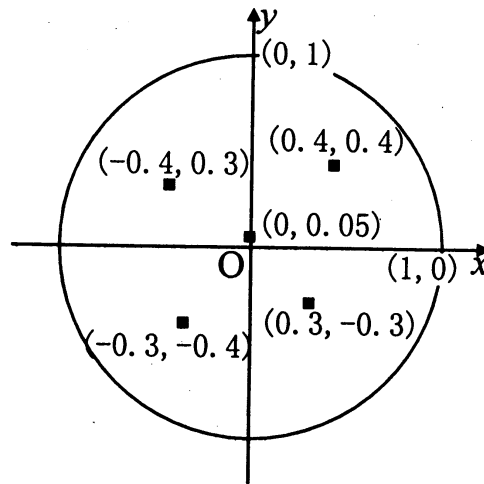


図 1. 点ソースの配置

表 1. 部分区間の幅  $T$  と収束に要した反復回数および推定位置の誤差

$T$	部分区間の個数 $M = 1$		部分区間の個数 $M = 2$		部分区間の個数 $M = 3$	
	反復回数	推定位置の誤差	反復回数	推定位置の誤差	反復回数	推定位置の誤差
180	N.C.	6.3E-2	N.C.	4.2E-2	N.C.	8.3E-3
210	N.C.	2.4E-2	N.C.	1.6E-2	396	1.8E-5
240	N.C.	8.6E-3	N.C.	7.1E-5	154	6.2E-6
270	206	9.8E-6	145	8.0E-6	66	2.3E-6
300	54	2.0E-6	45	1.7E-6	31	6.5E-7
330	31	8.5E-7	16	2.7E-7	15	1.2E-7
360	3	2.0E-7	3	1.7E-8	3	8.0E-11

注意: N.C. は収束しなかったことを表す。

表2. ノイズレベルと推定位置の誤差

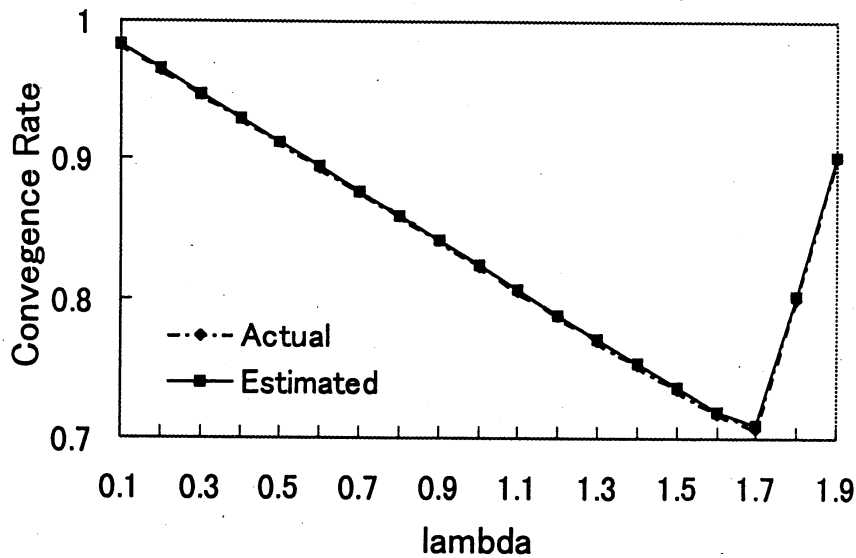
(a) 部分区間の個数 $M = 1$				(b) 部分区間の個数 $M = 2$			
$T$	ノイズレベル			$T$	ノイズレベル		
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$		$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$
180*	6.3E-02	6.4E-02	7.5E-02	180*	4.2E-02	4.2E-02	5.2E-02
210*	2.4E-02	2.5E-02	4.4E-02	210*	1.6E-02	1.6E-02	1.9E-02
240*	8.6E-03	9.2E-03	1.5E-02	240*	2.7E-05	4.2E-04	4.7E-03
270	1.2E-04	1.1E-03	1.1E-02	270	7.3E-05	8.0E-04	7.9E-03
300	4.7E-05	4.6E-04	4.6E-03	300	9.0E-05	9.1E-04	9.1E-03
330	1.5E-04	1.5E-03	1.5E-02	330	6.9E-05	6.9E-04	7.0E-03
360	1.7E-05	1.7E-04	1.7E-03	360	6.0E-05	6.0E-04	6.1E-03

注意: \*のついた角度では収束せず。

(c) 部分区間の個数  $M = 3$ 

$T$	ノイズレベル		
	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$
180*	8.3E-03	8.6E-03	1.2E-02
210	5.9E-05	6.8E-04	6.9E-03
240	9.5E-05	1.0E-03	1.0E-02
270	4.5E-05	4.6E-04	4.7E-03
300	2.5E-05	2.5E-04	2.5E-03
330	4.1E-05	4.1E-04	4.1E-03
360	4.5E-05	4.5E-04	4.4E-03

注意: \*のついた角度では収束せず。

図2. 近似解の収束比のパラメータ $\lambda$ に対する依存性